REND. SEM. MAT.
UNIVERS. POLITECN. TORINO
Vol. 43°, 2 (1985)

Charles-Michel Marle

MODELE D'ACTION HAMILTONIENNE D'UN GROUPE DE LIE SUR UNE VARIETE SYMPLECTIQUE(*)

Summary: *Let Φ and Φ' be two hamiltonian actions of a Lie group G, respectively on the symplectic manifolds (M, Ω) and (M', Ω'), x be a point of M and x' a point of M'. We say that Φ and Φ' are equivalent at (x, x') when there exists an equivariant symplectic diffeomorphism of a G-invariant open neighborhood of x onto a G-equivariant open neighborhood of x', which maps x on x'. We define the notion of characteristic elements of a hamiltonian action at a given point, and we show that when Φ and Φ' are equivalent at (x, x') then the characteristic elements of Φ at x and of Φ' at x', are the same. We show that under some additional assumptions, this necessary condition for equivalence is also sufficient. Finally, we study the existence of a symplectic manifold (M, Ω), of a point x of M and of a hamiltonian action Φ of a given Lie group G on (M, Ω), which admits at x some given characteristic elements. Under some assumptions, we give an explicit model of hamiltonian action which solves this problem. Results are used for classifying hamiltonian actions of the rotation group $SO(3)$.*

1. Généralités, description des problèmes étudiés et énoncé des résultats.

1.1. Soit G un groupe de Lie connexe agissant à gauche sur une variété symplectique connexe (M, Ω), par une action $\Phi : G \times M \to M$. Pour tout élément g de G, on note Φ_g le difféomorphisme de M :

$$x \mapsto \Phi_g(x) = \Phi(g,x) \ , \ (x \in M) \ ,$$

Classificazione per soggetto: 53B99, 53C99, 22E70

(*) Conferenza tenuta il 5/4/1984.

et pour tout élément X de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, on note X_M le champ de vecteurs sur M (dit champ de vecteurs fondamental associé à X), défini par:

$$X_M(x) = \frac{d}{dt} \Phi(\exp(-tX), x)|_{t=0}$$

On rappelle que l'action Φ est dite *symplectique* si, pour tout $g \in G$:

$$\Phi_g^* \Omega = \Omega ,$$

et qu'elle est dite *hamiltonienne* si elle est symplectique et si de plus, pour tout élément X de $\mathcal{G}$, le champ de vecteurs X_M est globalement hamiltonien. Dans ce cas, il existe une application différentiable $J : M \to \mathcal{G}^*$ (dual de $\mathcal{G}$), telle que, pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$i(X_M)\,\Omega = -\,d\langle J, X\rangle ;$$

cette application J est appelée *moment* de l'action hamiltonienne Φ ; elle n'est pas unique: une autre application J_1 de M dans $\mathcal{G}^*$ est aussi un moment de l'action Φ, si et seulement si $J_1 - J$ est constante. Souriau [10] a montré qu'il existe une action affine unique a_θ de G sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour partie linéaire l'action coadjointe Ad^*, pour laquelle le moment J est équivariant, c'est-à-dire vérifie, pour touts $g \in G$, $x \in M$:

$$J(\Phi(g,x)) = a_\theta(g, J(x)) .$$

L'action a_θ a pour expression:

$$a_\theta(g, \xi) = Ad_g^* \xi + \theta(g) , (g \in G , \ \xi \in \mathcal{G}^*) ,$$

où $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ est un 1-cocycle symplectique de G.

Un autre moment $J_1 = J + \mu$ (avec μ constante, élément de $\mathcal{G}^*$) est équivariant pour l'action affine a_{θ_1}, associée au 1-cocycle symplectique:

$$\theta_1 = \theta + \partial\mu ,$$

où $\partial\mu$ désigne le 1-cobord de G, à valeurs dans $\mathcal{G}^*$:

$$\partial\mu(g) = \mu - Ad_g^* \mu , \ (g \in G) .$$

1.2. On suppose désormais l'action Φ hamiltonienne, et on en choisit un moment J. Soit x un point de M. On pose:

$$G_x = \{g \in G \mid \Phi(g,x) = x\}\,;\, N_x = \{\Phi(g,x) \mid g \in G\}\,;$$

$$J(x) = \xi \in \mathcal{G}^*\ ;$$

$$G_\xi = \{g \in G \mid a_\theta(g, \xi) = \xi\}\ ;\ \mathcal{O}_\xi = \{a_\theta(g\,,\xi) \mid g \in G\}.$$

En raison de l'équivariance de J, le groupe d'isotropie G_x de x est un sous-groupe fermé du groupe d'isotropie G_ξ de ξ, qui lui-même est un sous-groupe fermé de G. On notera $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_\xi$ les algèbres de Lie, respectivement, de G_x et de G_ξ.

L'espace tangent en x à l'orbite N_x est:

$$T_x N_x = \{X_M(x) \mid X \in \mathcal{G}\}$$

et son orthogonal symplectique est (Abraham et Marsden [1], Marsden et Weinstein [9]) :

$$\operatorname{orth}(T_x N_x) = \ker T_x J\,.$$

On sait que la restriction à $\operatorname{orth}(T_x N_x)$ de la 2-forme Ω_x (valeur de Ω en x) a pour noyau $T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$. Par projection sur l'espace quotient:

$$H = \operatorname{orth}(T_x N_x)/T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$$

on en déduit donc une 2-forme symplectique Ω_H sur l'espace vectoriel H.

Pour tout élément g de G_x, Φ_g est un difféomorphisme symplectique de M laissant le point x fixe, donc $T_x \Phi_g$ est un automorphisme de l'espace vectoriel symplectique $(T_x M\,,\,\Omega_x)$. Cet automorphisme laisse invariants les sous-espaces vectoriels $T_x N_x$ et $\operatorname{orth}(T_x N_x)$, donc aussi leur intersection. Par quotient, il détermine donc un automorphisme ρ_g de l'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H). L'application ρ, qui à chaque élément g de G_x, associe l'automorphisme ρ_g de (H, Ω_H), est un homomorphisme de G_x dans le groupe symplectique $Sp\,(H, \Omega_H)$.

1.3. Définition. Avec les notations précisées ci-dessus, on appelle famille d'éléments caractéristiques de l'action hamiltonienne Φ au point x , la famille:

$$(\theta - \partial\xi \ , \ G_x \ , \ (H, \Omega_H) \, , \rho)$$

constituée par le cocycle symplectique:

$$\theta - \partial\xi : g \mapsto \theta\,(g) - \xi + Ad^*_g\,\xi \, ,$$

le sous-groupe d'isotropie G_x du point x, l'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H), et l'homomorphisme ρ de G_x dans le groupe symplectique $Sp\,(H, \Omega_H)$.

1.4. Remarque. Les éléments caractéristiques de l'action Φ au point x ne dépendent pas du choix du moment J de l'action Φ : en effet si l'on remplace J par $J_1 = J + \mu$ (μ constante élément de $\mathcal{G}^*$), θ est remplacé par $\theta_1 = \theta + \partial\mu$, et ξ par $\xi_1 = \xi + \mu$, de sorte que l'on a $\theta_1 - \partial\xi_1 = \theta - \partial\xi$.

De même, le sous-groupe d'isotropie G_ξ du point ξ , pour l'action affine a_θ , ne dépend pas du choix du moment J ; G_ξ n'est autre que le sous-groupe d'isotropie de l'origine pour l'action-affine $a_{\theta - \partial\xi}$:

$$G_\xi = \{g \in G \,|\, a_\theta\ (g, \xi) = \xi\} = \{g \in G \,|\, a_{\theta - \partial\xi}\ (g, 0) = 0\}.$$

La donée des éléments caractéristiques de l'action hamiltonienne Φ au point x , suffit donc pour déterminer G_ξ .

1.5. Définition. Soient (M, Ω) et (M', Ω') deux variétés symplectiques connexes, Φ et Φ' deux actions hamiltoniennes d'un même groupe de Lie G , respectivement sur (M, Ω) et (M', Ω') , x un point de M et x' un point de M'. On dit que les actions Φ et Φ' sont équivalentes en (x, x'), s'il existe un difféomorphisme symplectique G-équivariant φ d'un voisinage ouvert G-invariant U de x dans M , sur un voisinage ouvert G-invariant U' de x' dans M' , appliquant x sur x' .

1.6. Remarques.

1°) Si les actions Φ et Φ' sont équivalentes en (x, x'), les sous-groupes d'isotropies G_x de x et $G_{x'}$ de x' sont égaux; l'orbite N_x

de x est contenue dans l'ouvert G-invariant U de M, et l'orbite $N'_{x'}$ de x' dans l'ouvert G-invariant U' de M' ; le difféomorphisme symplectique φ applique N_x sur $N'_{x'}$.

2°) On pourrait définir une relation d'équivalence légèrement moins restrictive en admettant la possibilité de modifier l'action Φ' en la composant avec un automorphisme du groupe G. Les résultats établis plus loin s'adapteraient sans difficulté à une telle définition.

On étudiera dans ce qui suit les deux problèmes suivants.

1.7. Problème d'équivalence. Peut-on donner des conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence de deux actions Φ et Φ' en (x,x'), au sens de la définition 1.6?

1.8. Problème d'existence. Soient G un groupe de Lie, θ un 1-cocycle symplectique de G, ξ un élément du dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, G_x un sous-groupe fermé du groupe d'isotropie G_ξ de ξ pour l'action affine a_θ, (H, Ω_H) un espace vectoriel symplectique de dimension $2h$, et ρ un homomorphisme de G_x dans le groupe symplectique $Sp(H, \Omega_H)$. Existe-t-il une variété symplectique (M,Ω), une action hamiltonienne Φ de G sur cette variété, et un point x de M, tels que la famille d'éléments caractéristiques de l'action Φ au point x soit $(\theta - \partial\xi, G_x, (H,\Omega_H), \rho)$?

Les principaux résultats établis ci-après sont les suivants. Certains de ces résultats avaient été précédemment exposés, soux une forme differénte, en [8].

1.9. Proposition. Les hypothèses et notations étant celles de la définition 1.5, soient $(\theta - \partial\xi, G_x, (H,\Omega_H), \rho)$ et $(\theta' - \partial\xi', G_{x'}, (H',\Omega_{H'}), \rho'))$ les éléments caractéristiques (1.3) respectifs de l'action Φ au point x, et de l'action Φ' au point x'. Si Φ et Φ' sont équivalentes en (x, x'), les trois conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\theta - \partial\xi = \theta' - \partial\xi'$.

2. $G_x = G_{x'}$.

3. Il existe un isomorphisme symplectique ψ de l'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H) sur l'espace vectoriel symplectique $(H', \Omega_{H'})$, tel que pour tous $g \in G_x$, $y \in H$:

$$\psi(\rho_g(y)) = \rho'_g(\psi(y)).$$

1.10. Proposition. Les hypothèses et notations étant celles de la définition 1.5 et de la proposition 1.9, on suppose les conditions 1 à 3 de la proposition 1.9 satisfaites. On suppose de plus les deux contitions supplémentaires suivantes satisfaites.

4. Il existe sur M et M' des connexions linéaires invariantes, respectivement, par les actions Φ et Φ' du groupe G.

5. Les orbites N_x du point x et $N'_{x'}$ du point x' sont des sous-variétés, respectivement de M et de M'.

Alors, les actions Φ et Φ' sont équivalentes en (x,x').

1.11. Proposition. Soient G un groupe de Lie connexe, θ un 1-cocycle symplectique de G, ξ un élément du dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, G_x un sous-groupe fermé du groupe d'isotropie G_ξ du point ξ (pour l'action affine a_θ de G sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour partie linéaire l'action coadjointe, associée au cocycle θ), (H, Ω_H) un espace vectoriel symplectique de dimension $2h$, et ρ un homomorphisme continu de G_x dans le groupe symplectique $Sp(H,\Omega_H)$. On suppose satisfaite la condition:

6. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}_\xi$ du sous-groupe G_ξ, possède un supplémentaire dans $\mathcal{G}$, invariant par l'action adjointe du sous-groupe G_x.

Alors il existe une variété symplectique connexe (M, Ω), une action hamiltonienne Φ de G sur cette variété, et un point x de M, tels que la famille d'éléments caractéristiques de l'action Φ au point x soit $(\theta - \partial\xi, G_x, (H, \Omega_H), \rho)$. De plus, la variété symplectique (M, Ω) et l'action Φ vérifient les conditions 4 et 5 de la proposition 1.10.

1.12. Remarques

1°) Lorsque le groupe de Lie G est compact, les condition 4, 5 et 6 des propositions 1.10 et 1.11 sont vérifiées; de plus, tout 1-cocycle symplectique de G est un cobord.

2°) Dans les hypothèses de la proposition 1.11, soit Φ' une autre action hamiltonienne de G sur une variété symplectique (M', Ω'), et x' un point de M', tels que la famille d'éléments caractéristiques de Φ' au point x' soit $(\theta - \partial\xi, G_x, (H, \Omega_H), \rho)$. Si (M', Ω') et Φ' vérifient les conditions 4 et 5 de la proposition 1.10, cette proposition permet d'affirmer que Φ et Φ' sont équivalentes en (x, x'). La solution du problème d'existence 1.8 est donc unique, à une équivalence près (du moins si l'on se restreint aux variétés symplectiques et aux actions hamiltoniennes qui vérifient les conditions 4 et 5 de 1.10).

3°) On donnera plus loin (paragraphe 3) un construction explicite de la variété symplectique (M, Ω) et de l'action Φ, dont la proposition 1.11 affirme l'existence.

2. Le problème d'équivalence.

Ce paragraphe est consacré aux démonstrations des propositions 1.9 et 1.10.

2.1. Les hypothèses et notations étant celles de la définition 1.5, soient $J : M \to \mathcal{G}^*$ et $J' : M' \to \mathcal{G}^*$ des moments, respectivement, des actions Φ et Φ', $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ et $\theta' : G \to \mathcal{G}^*$ les cocycles symplectiques correspondants. On pose:

$$\xi = J(x) \ ; \ \xi' = J'(x') = J' \circ \varphi(x) .$$

Puisque $\varphi : U \to U'$ est un difféomorphisme symplectique G-équivariant, $J' \circ \varphi : U \to \mathcal{G}^*$ est un moment de l'action Φ (restreinte à l'ouvert U). Sur la composante connexe de U contenant x (qui est G-invariante, puisque G est connexe), $J' \circ \varphi - J$ est constant. On a donc, pour tout $g \in G$:

$$J' \circ \varphi(\Phi_g(x)) - J(\Phi_g(x)) = J'(\varphi(x)) - J(x) ,$$

ou encore:

$$J'(\Phi'_g(x')) - J'(x') = J(\Phi_g(x)) - J(x) ,$$

c'est à-dire:

$$\theta'(g) + Ad^*_g \xi' - \xi' = \theta(g) + Ad^*_g \xi - \xi .$$

La propriété 1 de la proposition 1.9 est donc vérifiée.

D'autre part, on a déjà remarqué (1.6, 1°)) que la propriété 2 de la proposition 1.9 était également vérifiée.

L'application $T_x \varphi : T_x M \to T_{x'} M'$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel symplectique $(T_x M, \Omega_x)$ sur l'espace vectoriel symplectique $(T_{x'} M', \Omega'_{x'})$. En raison de l'équivariance de φ, on a pour tout $g \in G$:

$$T_x \varphi \circ T_x \Phi_g = T_{x'} \Phi'_g \circ T_x \varphi .$$

De plus, $T_x \varphi$ applique l'espace tangent en x à l'orbite N_x, et son orthogonal, respectivement sur l'espace tangent en x' à l'orbite $N'_{x'}$, et son orthogonal. On peut donc, par quotient, déduire de $T_x \varphi$ un isomorphisme symplectique ψ de (H, Ω_H) sur $(H', \Omega_{H'})$, vérifiant pour tout $g \in G$:

$$\psi \circ \rho_g = \rho'_g \circ \psi .$$

La propriété 3 de la proposition 1.9 est donc vérifée. Ceci achève la démonstration de cette proposition.

2.2 Les hypothèses sont maintenant celles de la proposition 1.10. Les éléments x de M et x' de M' étant fixés, soient $\Phi^x : G \to M$ et $\Phi'^{x'}$: $G \to M'$ les applications définies par:

$$\Phi^x (g) = \Phi(g, x) \quad ; \quad \Phi'^{x'} (g) = \Phi' (g, x') .$$

Ces applications sont équivariantes (pour l' action de G sur lui-même par translation à gauche, et les actions Φ de G sur M et Φ' de G sur M'). Les 2-formes fermées $(\Phi^x)^* \Omega$ et $(\Phi'^{x'})^* \Omega'$, images réciproques de Ω par Φ^x et de Ω' par $\Phi'^{x'}$, sont donc invariantes à gauche sur le groupe G.

Soient X et Y deux éléments de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (identifiée à $T_e G$). On a:

$$\begin{aligned}
(\Phi^x)^* \Omega (e) (X, Y) &= \Omega (x) (- X_M (x), - Y_M (x)) \\
&= i (- Y_M) \, d \langle J, X \rangle (x) \\
&= \frac{d}{dt} \langle J (\Phi (\exp (tY), x), X \rangle |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle Ad^*_{\exp(tY)} J(x) + \theta(\exp(tY)), X \rangle |_{t=0} \\
&= \langle \xi, [X, Y] \rangle - \Theta (X, Y).
\end{aligned}$$

On a posé, comme précédemment, $\xi = J(x)$, et on a désigné par Θ la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{G}$:

$$\Theta(X,Y) = \langle T_e\,\theta(X), Y\rangle = -\langle T_e\,\theta(Y), X\rangle .$$

En considérant l'élément ξ de $\mathcal{G}^*$ et de la forme bilinéaire Θ sur $\mathcal{G}$, respectivement comme une 1-forme et une 2-forme invariantes à gauche sur le groupe G, on peut donc écrire:

$$(\Phi^x)^*\ \Omega = -(d\xi + \Theta) .$$

Mais d'autre part on a:

$$\frac{d}{dt} \langle(\theta - \partial\xi)(\exp(tY)), X\rangle|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle\theta(\exp(tY)) - \xi + Ad_{\exp(tY)}\xi, X\rangle|_{t=0}$$

$$= -(d\xi + \Theta)(X,Y) .$$

De même:

$$(\Phi'^{x'})^*\ \Omega' = -(d\xi' + \Theta') \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \langle(\theta' - \partial\xi')(\exp(tY)), X\rangle|_{t=0} = -(d\xi' + \Theta')(X,Y) ,$$

avec bien entendu:

$$\Theta'(X,Y) = \langle T_e\theta'(X), Y\rangle = -\langle T_e\,\theta'(Y), X\rangle .$$

Mais par hypothèse (condition 1 des propositions 1.9 et 1.10), $\theta - \partial\xi$ est égal à $\theta' - \partial\xi'$. On a donc:

$$(\Phi'^{x'})^*\ \Omega' = (\Phi^x)^*\ \Omega .$$

D'autre part, soient N_x et $N'_{x'}$ les orbites respectives de x et de x'. Par hypothèse (condition 5 de la proposition 1.10) ce sont des sous-variétés, respectivement de M et de M', et les applications Φ^x et $\Phi'^{x'}$ sont des submersions surjectives de G, respectivement sur N_x et $N'_{x'}$. Après quotient de G par l'action à droite du sous-groupe G_x, ces deux applications déterminent des difféomorphismes $\Phi^x : G/G_x \to N_x$ et $\Phi'^{x'}$: $G/G_x \to N'_{x'}$. En convenant de désigner par Ω_{N_x} et $\Omega'_{N'_{x'}}$ les 2-formes induites par Ω sur N_x et par Ω' sur $N'_{x'}$, on a:

$$(\hat{\Phi}^x)^*\Omega_{N_x} = (\hat{\Phi}'^{x'})^*\,\Omega'_{N'_{x'}}\,.$$

Le difféomorphisme

$$f = \hat{\Phi}'^{x'} \circ \hat{\Phi}_x^{-1} : N_x \to N'_{x'}$$

vérifie donc:

$$f^*\,\Omega'_{N'_{x'}} = \Omega_{N_x}\,.$$

Les 2-formes Ω_{N_x} sur N_x et $\Omega'_{N'_{x'}}$ sur $N'_{x'}$, sont de même rang constant, et ont pour noyau, respectivement, le sous-fibré vectoriel $TN_x \cap \cap \operatorname{orth} TN_x$ de TN_x, et $TN'_{x'} \cap \operatorname{orth} TN'_{x'}$ de $TN'_{x'}$. On a noté $\operatorname{orth} TN_x$ et $\operatorname{orth} TN'_{x'}$ les orthogonaux de TN_x et $TN'_{x'}$ dans les fibrés vectoriels symplectiques $T_{N_x}M$ et $T_{N'_{x'}}M'$ (restrictions à N_x et à $N'_{x'}$ des fibrés tangents, à M et à M').

Le fibré vectoriel symplectique $\mathcal{H} = \operatorname{orth}\ TN_x/TN_x \cap \operatorname{orth} TN_x$, de base N_x, a pour fibre-type l'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H), et s'identifie au quotient $(G \times H)/G_x$ du fibré trivial $G \times H$ (de base G), par la relation d'équivalence:

(*) (g_1, z_1) équivalent à (g_2, z_2) si $\gamma = g^{-1}\, g_1 \in G_x$ et $z_2 = \rho_\gamma\,(z_1)$.

De plus, l'action de G sur le fibré vectoriel symplectique $\mathcal{H}$, naturellement déduite de l'action Φ, s'identifie à l'action de G sur $(G \times H)/G_x$, quotient de l'action triviale de G sur $G \times H$:

$$(g, (g_1, z_1)) \mapsto (gg_1, z_1)$$

par la relation d'équivalence (*) ci-dessus.

Les mêmes considérations s'appliquent évidemment au fibré vectoriel symplectique $\mathcal{H}' = \operatorname{orth} TN'_{x'}/TN'_{x'} \cap \operatorname{orth} TN'_{x'}$, de base $N'_{x'}$ et de fibre-type $(H', \Omega'_{H'})$.

Par hypothèse (condition 3 de la proposition 1.9) il existe un isomorphisme symplectique ψ de (H, Ω_H) sur $(H', \Omega'_{H'})$ vérifiant, pour tout $g \in G_x$:

$$\psi \circ \rho_g = \rho'_g \circ \psi\,.$$

On en déduit l'existence d'un isomorphisme de fibrés vectoriels symplectiques, également noté ψ, de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$, au dessus du difféomorphisme $f : N_x \to N_{x'}$ de leurs bases, équivariant (pour les actions de G sur $\mathcal{H}$ et sur $\mathcal{H}'$ naturellement déduites, respectivement, de Φ et de Φ').

Compte tenu de la condition 4 de la proposition 1.10, on peut construire des voisinages tubulaires de N_x dans M et de $N'_{x'}$ dans M' tels que les homothéties sur les fibres commutent avec les actions Φ et Φ' du groupe G. D'après un résultat précédemment établi ([6] et [7], théorème 4.5.), généralisant un théorème de Weinstein [12], [13], il existe un difféomorphisme symplectique G-équivariant φ d'un voisinage ouvert G-invariant U de N_x dans M sur un voisinage ouvert G-invariant U' de $N'_{x'}$ dans M', dont la restriction à N_x est le difféomorphisme $f : N_x \to N'_{x'}$. Ceci prouve l'équivalence des actions Φ et Φ' en (x, x'), et achève la démonstration de la proposition 1.10.

3. Le probleme d'existence.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition 1.11.

3.1. Soient G un groupe de Lie connexe, $\theta : G \to \mathcal{G}^*$ un 1-cocycle symplectique de G, ξ un élément du dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, G_x un sous-groupe fermé du groupe d'isotropie G_ξ de ξ (pour l'action affine a_θ de G sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour partie linéaire l'action coadjointe, associée au cocycle θ), (H, Ω_H) un espace vectoriel symplectique de dimension $2h$, et ρ un homomorphisme de G_x dans le groupe symplectique $Sp\,(H, \Omega_H)$. On se propose de construire une variété symplectique (M, Ω) et une action hamiltonienne Φ de G sur cette variété, telles qu'en un point particulier x de M, la famille des éléments caractéristiques de l'action Φ soit précisement $(\theta - \partial\xi, G_x, (H, \Omega_H), \rho)$.

Pour le moment, on ne suppose pas nécessairement satisfaite la condition 6 de la proposition 1.11. La construction présentée ci-dessous est une adaptation d'une construction due à Weinstein [14], [15], qui elle-même est une forme plus intrinsèque d'une construction précédemment présentée par Sternberg [11].

3,2. One note, comme précédemment, Θ la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{G}$ définie par

$$\Theta(X,Y) = \langle T_e\,\theta(X), Y\rangle = -\langle T_e\,\theta(Y), X\rangle .$$

On rappelle que Θ peut être considérée comme une 2-forme fermée, invariante à gauche sur le groupe G .

On note $q : T^*G \to G$ la projection canonique du fibré cotangent à G sur sa base, et α la 1-forme de Liouville sur T^*G . On munit T^*G de la 2-forme symplectique

$$\Omega_{-\theta} = d\alpha - q^*\Theta .$$

On définit deux actions hamiltoniennes de G sur $(T^*G, \Omega_{-\theta})$, notées respectivement Φ_L et Φ_R , en posant pour tous $g \in G$, $z \in T^*G$:

$$\Phi_L\,(g,z) = \hat{L}_g\,(z) \ ;$$
$$\Phi_R\,(g,z) = \hat{R}_{g^{-1}}(z) - \hat{L}_{q(z)g^{-1}}\,(\theta\,(g)) .$$

On a noté $\hat{L}_g$ et $\hat{R}_{g^{-1}}$ les relèvements canoniques à T^*G des difféomorphismes L_g et $R_{g^{-1}}$ de G:

$$L_g\,(\gamma) = g\gamma \ ; R_{g^{-1}}\,(\gamma) = \gamma g^{-1} \ ;$$

($\hat{L}_g$ et $\hat{R}_{g^{-1}}$ sont les transposées de $TL_{g^{-1}}$ et de TR_g , respectivement).

Les actions Φ_L et Φ_R commutent et admettent respectivement pour moment les applications J_L et J_R , définies par:

$$J_L\,(z) = -Ad_{q(z)^{-1}}\,(\hat{L}_{q(z)^{-1}}\,z) + \theta\,(q\,(z)) \ ;$$
$$J_R\,(z) = \hat{L}_{q(z)^{-1}}\,z \ .$$

Lorsqu'on identifie T^*G à $G \times \mathcal{G}^*$, en trivialisant T^*G par translation à gauche, selon:

$$z \in T^*G \mapsto (\gamma = q\,(z) \in G\,,\, \beta = \hat{L}_{q(z)^{-1}}\,z \in \mathcal{G}^*) \ ,$$

les actions Φ_L et Φ_R, et leurs moments J_L et J_R, ont pour expressions:

$$\Phi_L\ (g, (\gamma, \beta)) = (g\gamma, \beta)\ ;$$
$$\Phi_R\ (g, (\gamma,\beta)) = (\gamma g^{-1}, Ad_g^*\ \beta - \theta\ (g))\ ;$$
$$J_L\ (\gamma,\beta) = -Ad_\gamma^* \beta + \theta\ (g)$$
$$J_R\ (\gamma,\beta) = \beta\ .$$

On vérifie que J_L et J_R sont équiquivariants lorsque G agit sur T^*G, respectivement, par les actions Φ_L et Φ_R, et sur $\mathcal{G}^*$, respectivement, par les actions affines a_θ et $a_{-\theta}$ (associées, respectivement, aux cocycles symplectiques θ et $-\theta$).

3.3. On munit le produit $T^*G \times H$ de la forme symplectique $\Omega_{-\theta} + \Omega_H$ (les 2-formes $\Omega_{-\theta}$ sur T^*G et Ω_H sur H étant identifiées à leurs images réciproques sur $T^*G \times H$, respectivement par la première et la seconde projection).

L'action hamiltonienne Φ_L de G sur $(T^*G, \Omega_{-\theta})$ se prolonge en une action hamiltonienne (encore notée Φ_L) de G sur $(T^*G \times H, \Omega_{-\theta} + \Omega_H)$:

$$\Phi_L\ (g, (z,y)) = (\Phi_L\ (g,z), y)\ .$$

Un moment de cette action, encore noté J_L, a pour expression:

$$J_L\ (z,y) = J_L\ (z)\ .$$

La restriction au sous-groupe G_x de G, de l'action hamiltonienne Φ_R de G sur $(T^*G, \Omega_{-\theta})$, se prolonge en une action hamiltonienne, notée $\Phi_{R,\rho}$, de G_x sur $T^*G \times H$, donnée par l'expression:

$$\Phi_{R,\rho}\ (g, (z,y)) = (\Phi_R\ (g,z)\ , \rho_g\ (y))\ .$$

Un moment K de l'action $\Phi_{R,\rho}$ est donné par l'expression:

$$K\ (z,y) = \Pi_{\mathcal{G}_x^*} \circ J_R\ (z) + {}^t p' \circ J_H\ (y)\ .$$

Dans cette expression, $\Pi_{\mathcal{G}_x^*} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}_x^*$ est la projection du dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur le dual $\mathcal{G}_x^*$ de la sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$, transposée de l'injection canonique de $\mathcal{G}_x$ dans $\mathcal{G}$; ${}^t\rho' : (sp\,(H,\Omega_H))^* \to \mathcal{G}_x^*$ désigne l'application linéaire transposée de l'homomorphisme d'algèbres de Lie $\rho' : \mathcal{G}_x \to sp\,(H, \Omega_H)$, associé à l'homorphisme ρ de G_x dans le groupe symplectique $Sp\,(H, \Omega_H)$; enfin $J_H : H \to (sp\,(H, \Omega_H))^*$ désigne le moment, nul à l'origine, de l'action naturelle de $Sp\,(H, \Omega_H)$ sur (H, Ω_H); il a pour expression:

$$J_H\,(y) = \frac{1}{2}\, B_H\,(y,y)\,,$$

où B_H est l'application bilinéaire symétrique de $H \times H$ dans le dual $(sp\,(H, \Omega_H))^*$ de l'algèbre de Lie $sp\,(H, \Omega_H)$ donnée par l'expression suivante (dans laquelle y_1 et $y_2 \in H$, $X \in sp\,(H, \Omega_H)$ étant considéré comme un endomorphisme de l'espace vectoriel H):

$$\langle B_H\,(y_1, y_2), X\rangle = \Omega_H\,(X\,(y_1), y_2) = \Omega_H\,(X\,(y_2), y_1)\,.$$

Le moment K est équivariant pour l'action $\Phi_{R,\rho}$ de G_x sur $T^*G \times H$, et l'action affine $a_{-\tilde{\theta}}$ de G_x sur $\mathcal{G}_x^*$, associée au 1-cocycle symplectique:

$$-\tilde{\theta} = -\Pi_{\mathcal{G}_x^*} \circ \theta\,|_{G_x}\,.$$

En utilisant le fait que G_x est un sous-groupe de G_ξ (groupe d'isotropie de l'élément ξ de $\mathcal{G}^*$, pour l'action a_θ), on voit que l'élément de $\mathcal{G}^*$:

$$-\tilde{\xi} = -\Pi_{\mathcal{G}_x^*}\,(\xi)$$

est un point fixe pour l'action $a_{-\tilde{\theta}}$. D'autre part, K est une submersion (puisque l'action $\Phi_{R,\rho}$ est libre). Par conséquent:

$$Q = K^{-1}\,(-\tilde{\xi})$$

est une sous-variété de $T^*G \times H$, invariante par l'action $\Phi_{R,\rho}$ de G_x. D'autre part, le moment K est constant sur chaque orbite de l'action Φ_L ; par suite, la sous-variété Q est invariante par l'action Φ_L du groupe G.

Soit P le quotient de Q par G_x, c'est-à-dire l'ensemble des orbites de l'action $\Phi_{R,\rho}$ de G_x sur Q.

3.4. Proposition. Le quotient $P = Q/G_\xi$ possède une structure de variété différentiable telle que la projection canonique $\Pi_P : Q \to P$ soit une submersion. De plus, il existe sur P une 2-forme symplectique Ω_P, telle que $\Pi_P^* \Omega_P$ soit la 2-forme induite sur Q par $(\Omega_{-\theta} + \Omega_H)$. L'action Φ_L de G sur Q détermine, après passage au quotient, une action hamiltonienne $\hat{\Phi}_L$ de G sur (P, Ω_p), admettant pour moment l'application $\hat{J}_L : P \to \mathcal{G}^*$, vérifiant:

$$\hat{J}_L \circ \Pi_p = J_L|_Q$$

Démonstration. Lorsqu'on convenient d'identifier T^*G à $G \times \mathcal{G}^*$ en utilisant la trivialisation de T^*G par translation à gauche, la sous-variété Q de $T^*G \times H$ s'identifie au sous-ensemble de $G \times \mathcal{G}^* \times H$:

$$Q = \{(\gamma, \beta, y) \in G \times \mathcal{G}^* \times H \mid \Pi_{\mathcal{G}_x^*}(\beta) = -{}^t\rho' \circ J_H(y) - \tilde{\xi}\} .$$

On voit que Q est fibrée au dessus $G \times H$, la fibre au dessus du point (γ, y) de $G \times H$ étant le sous-espace affine de $\mathcal{G}^*$:

$$\Pi^{-1}_{\mathcal{G}_x^*} \ (-{}^t\rho' \circ J_H(y) - \tilde{\xi}) .$$

Le sous-espace vectoriel associé à ce sous-espace affine ne dépendant pas du point (γ, y) de $G \times H$ considéré: c'est le noyau de $\Pi_{\mathcal{G}_x^*}$, c'est-à-dire l'annulateur $\mathcal{G}_x^0$ de $_x$ dans $\mathcal{G}^*$.

L'action de G_x sur Q a pour expression:

$$\Phi_{R,\rho}(g, (\gamma, \beta, y)) = (\gamma g^{-1}, \beta, \rho_g(y))$$

et on vérifie qu'elle applique la fibre au dessus de (γ, y) sur la fibre au dessus de $(\gamma g^{-1}, \rho_g(y))$. On en déduit l'existence, sur le quotient $P = Q/G_x$, d'une structure de variété différentiable fibrée en espaces affines, dont la fibre type est l'annulateur $\mathcal{G}_x^0$ de $\mathcal{G}_x$ dans $\mathcal{G}^*$, et dont la base est le quotient $(G \times H)/G_x$ de $G \times H$ par la relation d'équivalence:

$$(\gamma_1, y_1) \text{ équivalent à } (\gamma_2, y_2) \text{ si } \gamma_2^{-1}\gamma_1 \in G_x \text{ et } y_2 = \rho_{\gamma_2^{-1}\gamma_1}(y) .$$

Cette base est elle-même un fibré vectoriel de base G/G_x, et de fibre-type H.

L'existence sur P d'une forme symplectique Ω_P, dont l'image réciproque par Π_P est la forme induite sur Q par $(\Omega_{-\theta} + \Omega_H)$, se déduit du fait que (P, Ω_P) est la variété symplectique réduite, associée au moment K de l'action $\Phi_{R,\rho}$, et au point $-\tilde{\xi}$ de $\mathcal{G}^*$, au sens de Marsden et Weinstein [9].

Enfin l'action hamiltonienne Φ_L de G sur $T^*G \times H$ détermine, par restriction à Q puis quotient par G_x, une action hamiltonienne $\hat{\Phi}_L$ de G sur (P, Ω_P), admettant pour moment $\hat{J}_L$: cela résulte du fait que Q est invariante par les actions Φ_L et Φ_R, et que ces deux actions hamiltoniennes commutent.

3.5 Remarques.

1°) Afin d'établir quelques formules explicites, on convient comme précédemment d'identifier T^*G à $G \times \mathcal{G}^*$ en le trivialisant par translation à gauche, donc d'identifier $T^*G \times H$ à $G \times \mathcal{G}^* \times H$. L'espace tangent en un point (γ, β, y) à $T^*G \times H$ s'identifie donc à $T_g G \times \mathcal{G}^* \times H$. Avec ces conditions, soient:

$$Z_1 = (TL_\gamma X_1, \eta_1, u_1) \ , \ Z_2 = (TL_\gamma X_2, \eta_2, u_2)$$

(avec X_1 et $X_2 \in \mathcal{G} = T_e G$, η_1 et $\eta_2 \in \mathcal{G}^*$, u_1 et $u_2 \in H$) deux éléments de $T_{(\gamma,\beta,y)}(T^*G \times H)$. On a:

$$(\Omega_{-\theta} + \Omega_H)(\gamma, \beta, y)(Z_1, Z_2) = \langle\eta_1, X_2\rangle - \langle\eta_2, X_1\rangle - \langle\beta, [X_1, X_2]\rangle - \\ - \Theta(X_1, X_2) + \Omega_H(u_1, u_2) \ .$$

2°) Le point (γ, β, y) de $T^*G \times H$ appartient à Q si et seulement si:

$$\Pi_{\mathcal{G}_x^*}(\beta) = -{}^t\rho' \circ J_H(y) - \tilde{\xi} \ .$$

Lorsque c'est le cas, l'élément $Z_1 = (TL_\gamma X_1, \eta_1, u_1)$ de $T_{(\gamma,\beta,y)}(T^*G \times H)$ appartient à $T_{(\gamma,\beta,y)} Q$ si et seulement si:

$$\Pi_{\mathcal{G}_x^*}(\eta_1) = -{}^t\rho' \circ B_H(y, u_1) \ .$$

D'autre part, l'orthogonal de $T_{(\gamma,\beta,y)}(T^*G \times H)$ est l'espace tangent en (γ, β, y) à l'orbite de l'action $\Phi_{R,p}$ su groupe G_x, passant par ce point. L'élément $Z_2 = (TL_\gamma X_2, \eta_2, u_2)$ de $T_{(\gamma,\beta,y)}(T^*G \times H)$ appartient à orth $(T_{(\gamma,\beta,y)} Q)$ si et seulement si:

$$X_2 \in \mathcal{G}_x \ ; \ \eta_2 = -ad^*_{X_2} \beta + \Theta(X_2) \ ; \ u_2 = -\rho'(X_2)y \ .$$

On peut d'ailleurs contrôler ce résultat en utilisant l'expression de la 2-forme $\Omega_{-\theta} + \Omega_H$ donnée dans la remarque précédente.

3°) La sous-variété Q, étant invariante par l'action $\Phi_{R,\rho}$ du groupe G_x, est coisotrope. On peut d'ailleurs le vérifier en utilisant les résultats de la remarque précédente.

4°) Le point $m = (e, -\xi, 0)$ de $T^*G \times H$ (toujours identifié à $G \times \mathcal{G}^* \times H$) appartient à Q. Un élément $Z_1 = (X_1, \eta_1, u_1)$ de $T_m(T^*G \times H)$ appartient à $T_m Q$ si et seulement si:

$$\Pi_{\mathcal{G}^*_x}(\eta_1) = 0 \ .$$

Par conséquent $T_m Q$ s'identifie à $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^0_x \times H$.

Un élément $Z_2 = (X_2, \eta_2, u_2)$ de $T_m(T^*G \times H)$ appartient à orth $(T_m Q)$ si et seulement si:

$$X_2 \in \mathcal{G}_x \ ; \ \eta_2 = ad^*_{X_2} \xi + \Theta(X_2) = 0 \ ; \ u_2 = 0 \ .$$

En effet, η_2 est nul car X_2 est élément de $\mathcal{G}_x$, donc de $\mathcal{G}_\xi$. On voit donc que orth $T_m Q$ s'identifie à $\mathcal{G}_x \times \{0\} \times \{0\}$.

3.6. Soit $x = \Pi_P(m)$ la projection, sur la variété symplectique réduite (P, Ω_p), du point $m = (e, -\xi, 0)$ de Q (considéré dans la remarque ci-dessus). On a:

$$\hat{J}_L(x) = J_L(m) = \xi \ .$$

D'autre par, l'action affine de G sur $\mathcal{G}^*$ qui rend $\hat{J}_L$ équivariant, est évidemment a_θ, et le groupe d'isotropie de x (pour l'action hamiltonienne $\hat{\Phi}_L$ de G sur P) n'est autre que G_x. Soit N_x l'orbite du point x, sous l'action $\hat{\Phi}_L$. Pour déterminer la famille des éléments caractéristiques de $\hat{\Phi}_L$ au point x, il reste à déterminer l'homomorphisme, associé à cette action, du groupe G_x dans le groupe symplectique de l'espace vectoriel symplectique $\operatorname{orth}(T_x N_x)/T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$.

L'espace $T_x P$ s'identifie au quotient $T_m Q/\operatorname{orth}(T_m Q)$. Le sous-espace $T_x N_x$ de $T_x P$, s'identifie au quotient du sous-espace $E = (T_m \Pi_p)^{-1} (T_x N_x)$ de $T_m Q$, par $\operatorname{orth}(T_m Q)$. Avec les mêmes conventions que dans la remarque 3.5, 3°), le sous-espace E de $T_m Q$ s'identifie au sous-espace $\mathcal{G} \times \{0\} \times \{0\}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \times H$. Le sous-espace $\operatorname{orth}(T_x N_x)$ de $T_x P$, s'identifie au quotient du sous-espace $\operatorname{orth} E \cap T_m Q$ de $T_m Q$, par $\operatorname{orth}(T_m Q)$. Mais, d'après les résultats établis dans le remarque 3.5, on a:

$$\operatorname{orth} T_m Q \subset E \subset T_m Q$$

donc:

$$\operatorname{orth} T_m Q \subset \operatorname{orth} E \subset T_m Q$$

de sorte que le sous-espace $\operatorname{orth}(T_x N_x)$ de $T_x P$ s'identifie au quotient de $\operatorname{orth} E$ par $\operatorname{orth}(T_m Q)$. On trouve:

$$\operatorname{orth} E = \{(X, \operatorname{ad}^*_X \xi + \Theta(X), u) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}^* \times H \mid X \in \mathcal{G}\}.$$

L'espace $\operatorname{orth}(T_x N_x)/T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$ s'identifie donc au quotient de $\operatorname{orth} E$ par $E \cap \operatorname{orth} E$. Mais compte tenu des expressions de E et de $\operatorname{orth} E$ obtenues ci-dessus, $E \cap \operatorname{orth} E$ s'identifie à $\mathcal{G}_\xi \times \{0\} \times \{0\}$. En définitive, l'espace vectoriel symplectique $\operatorname{orth}(T_x N_x)/T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$ s'identifie à $\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi \times H$; la 2-forme symplectique $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi \times H}$ sur cet espace a pour expression:

$$\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi \times H}((\dot{X}_1, u_1), (\dot{X}_2, u_2)) = -\langle \xi, [X_1, X_2] \rangle + \Theta(X_1, X_2) + \Omega_H(u_1, u_2).$$

Dans cette expression $\dot{X}_1$ et $\dot{X}_2$ sont des éléments de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$, X_1 et X_2 des éléments de $\mathcal{G}$, représentants respectivement de X_1 et X_2, u_1 et u_2 des éléments de H. On remarque que le second membre ne dépend pas du choix des représentants X_1 et X_2. On voit donc que $\operatorname{orth}(T_x N_x)/T_x N_x \cap \operatorname{orth}(T_x N_x)$ s'identifie à la somme directe des deux espaces vectoriels symplectiques (H, Ω_H) et $(\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi, \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi})$, la 2-forme $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi}$ étant définie par la formule (voir Kirillov [4]):

$$\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi}(X_1, X_2) = -\langle \xi, [X_1, X_2] \rangle + \Theta(X_1, X_2).$$

Enfin, la représentation linéaire de G_x dans l'espace vectoriel symplectique $\mathrm{orth}\,(T_x N_x)/T_x N_x \cap \mathrm{orth}\,(T_x N_x)$, est somme directe de deux représentations: la représentation, notée $\widetilde{ad}$, de G_x dans $\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi$, déduite de la restriction à G_x de la représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}$, par quotient par le sous-espace G_x-invariant $\mathcal{G}_\xi$; la représentation ρ de G_x dans X. On peut donc énoncer:

3.7. Proposition. La famille d'éléments caractéristiques de l'action hamiltonienne $\hat{\Phi}_L$ de G sur (P, Ω_p), au point x de P, est $(\theta - \partial\xi, G_x, (\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi, \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{G}_\xi}) \oplus (H_1, \Omega_H), \widetilde{ad} \oplus \rho)$.

3.8. On suppose maintenant satisfaite la propriété 6 de la proposition 1.11: il existe un supplémentaire W de $\mathcal{G}_\xi$ dans $\mathcal{G}$, invariant par l'action adjointe du sous-groupe G_x. Soit $\lambda : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_\xi$ la projection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}_\xi$ parallèlement à λ, et ${}^t\lambda : \mathcal{G}_\xi^* \to \mathcal{G}^*$ sa transposée.

3.9. Proposition. On note F^* le sous-fibré affine de T^*G, dont la fibre au dessus d'un point γ de G est le sous-espace affine de T_g^*G :

$$F_\gamma^* = \hat{L}_\gamma \left(-\xi + {}^t\lambda\left(\mathcal{G}_\xi^*\right)\right) .$$

Alors F^* est invariant par l'action Φ_L du groupe G et par la restriction de l'action Φ_R au sous-groupe G_x de G. De plus, la 2-forme induite par $\Omega_{-\theta}$ sur F^* est non dégénérée sur un ouvert de F^*, invariant par ces deux actions, contenant le point $-\xi$.

Démonstration. Lorsqu'on identifie T^*G à $G \times \mathcal{G}^*$ en le trivialisant par translation à gauche, F^* s'identifie à:

$$F^* = \{(\gamma, -\xi + {}^t\lambda(\eta)) \mid \gamma \in G \;,\; \eta \in \mathcal{G}_\xi^*\}.$$

Soit $g \in G$. On a:

$$\Phi_L\,(g, (\gamma, -\xi + {}^t\lambda\,(\eta))) = (g\gamma, -\xi + {}^t\lambda\,(\eta)) ,$$

ce qui prouve l'invariance de F^* par l'action Φ_L.

On suppose maintenant $g \in G_x$. On a

$$\Phi_R\ (g, (\gamma, -\xi + {}^t\lambda\,(\eta))) = (\gamma g^{-1}\ , -(Ad_g^*\ \xi + \theta\ (g)) + Ad_g^* \circ {}^t\lambda\ (\eta))$$
$$= (\gamma g^{-1},\ -\xi + {}^t\lambda\ (Ad^*\ \eta))$$

car g est élément de G_ξ, et ${}^t\lambda$ commute avec Ad_g^*. On voit donc que F^* est invariant par la restriction de l'action Φ_R à G_x.

Par ailleurs, le point $-\xi$ de $\mathcal{G}^*$ (identifié à T_e^*G) appartient évidemment à F^* ; le fait que la 2-forme induite par $\Omega_{-\theta}$ sur F^* soit non dégénérée en ce point (donc sur un ouvert invariant contenant ce point) résulte d'une propriété générale établie par ailleurs ([7], proposition 3.6), et peut aisément être vérifié directement. □

3.10. Corollaire. La 2-forme induite par $(\Omega_{-\theta} + \Omega_H)$ sur la sous-variété $F^* \times H$ de $T^*G \times H$, est non dégénérée sur un ouvert V de $F^* \times H$, invariant par les actions Φ_L de G et $\Phi_{R,\rho}$ de G_x, contenant le point $m = (-\xi, o)$.

3.11. Comme précédemment, on considère la sous-variété $Q = K^{-1}(-\widetilde{\xi})$ de $T^*G \times H$. On pose:

$$Q_1 = (F^* \times H) \cap Q\ .$$

La sous-variété Q_1 est invariante par les actions Φ_L de G et $\Phi_{R,\rho}$ de G_x. On note $P_1 = Q_1/G_x$ l'ensemble des orbites de l'action $\Phi_{R,\rho}$ de G_x sur Q_1, et $\Pi_{P_1} : Q_1 \to P_1$ la projection canonique. On voit que P_1 est une sous-variété de la variété symplectique (P, Ω_p) précédemment définie (3.4), invariante par l'action $\hat{\Phi}_L$ du groupe G, contenant l'orbite N_x du point $x = \Pi_P\ (m)$. En utilisant le corollaire 3.10, on voit également que la 2-forme Ω_{P_1} induite par Ω_P sur P_1, est non dégénérée sur un ouvert M de P_1, invariant par l'action $\hat{\Phi}_L$, contenant l'orbite N_x.

3.12. Proposition. L'action $\hat{\Phi}_L$ du groupe de Lie G, restreinte à la sous-variété symplectique (M, Ω_{P_1}) de (P, Ω_P), est hamiltonienne, et la famille des éléments caractéristiques de cette action au point x est $(\theta - \partial\xi, G_x, (H, \Omega_H), \rho)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre, point par point, les calculs effectués paragraphes 3.5 et 3.6, en remplaçant T^*G par F^* et Q par Q_1. On voit ainsi que $T_m Q_1$ s'identifie à $\mathcal{G} \times (\mathcal{G}_x^0 \cap {}^t\lambda(\mathcal{G}_\xi^*)) \times H$, que son orthogonal $\mathrm{orth}(T_m Q_1)$ (dans l'espace vectoriel symplectique $(T_m M, \Omega_{P_1}(m))$ s'identifie à $\mathcal{G}_x \times \{0\} \times \{0\}$, et que l'orthogonal de $E = (T_m \Pi_{P_1})^{-1}(T_x N_x)$ dans $(T_m M, \Omega_{P_1}(m))$, et non plus, comme en 3.6, dans $(T_m(T^*G \times H), (\Omega_{-\theta} + \Omega_H)(m)))$, s'identifie à $\mathcal{G}_\xi \times \{0\} \times H$. L'espace $\mathrm{orth}_M(T_x N_x)/T_x N_x \cap \cap\, \mathrm{orth}_M(T_x N_x)$ s'identifie donc au quotient de $\mathcal{G}_\xi \times \{0\} \times H$ par $\mathcal{G}_\xi \times \{0\} \times \{0\}$, c'est-à-dire à H. □

3.13. En établissant la proposition 3.12, on a construit un modèle d'action hamiltonienne qui résoud le problème d'existence 1.8, sous les hypothèses de la proposition 1.11. On a donc démontré cette proposition.

3.14. Remarque. Dans le cas particulier où $G_x = G_\xi$ et où $H = \{0\}$ (donc $P = 0$), la variété symplectique (M, Ω_{P_1}) construite en 3.11 et 3.12 n'est autre que l'espace homogène G/G_ξ, et s'identifie à l'orbite du point ξ de $\mathcal{G}^*$, sous l'action hamiltonienne a_θ. On retrouve donc le résultat de Souriau [10] et Kostant [5] à propos des espaces homogènes hamiltoniens. On doit cependant remarquer que la construction faite ici suppose vérifiée la condition 6 de la proposition 1.1, alors que le résultat de Kostant et Souriau est valable sans cette hypothèse.

4. Quelques exemples.

4.1. On va étudier le cas où G est le groupe $SO(3)$. Puisque ce groupe est compact, les conditions 4, 5 et 6 des propositions 1.10 et 1.11 sont vérifiées. D'autre par, la cohomologie symplectique de ce groupe étant triviale, on peut supposer le cocyle θ nul. L'algèbre de Lie $so(3)$, de dimension 3, possède un produit scalaire euclidien Ad-invariant au moyen duquel on peut identifier $so(3)$ à son dual. Les actions adjointe et coadjointe s'identifient alors à l'action usuelle du groupe $SO(3)$ sur l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.

Le sous-groupe d'isotropie G_ξ d'un élément non nul ξ de $\mathscr{G}^*$, de dimension 1, est le sous-groupe à un paramètre des rotations autour de la direction définie par ξ ; il est isomorphe à S^1. Le seul sous-groupe fermé de G_ξ de dimension 1 est G_ξ lui-même. Les sous-groupes fermés de G_ξ de dimension 0 sont les sous-groupes finis des rotations d'un angle multiple de $\dfrac{2\pi}{n}$ (n entier) autour de la direction définie par ξ.

Lorsque ξ est nul, le sous-groupe G_ξ est G entier. Les sous-groupes fermés de G sont de dimension 3, 1 ou 0. Le seul sous-groupe fermé de dimension 3 est G lui-même. Les sous-groupes fermés de dimension 1, tous isomorphes à S^1, sont les sous-groupes des rotations autour d'une direction déterminée. Enfin les sous-groupes fermés de dimension 0 sont finis: ce sont les sous-groupes des rotations laissant invariant un polyèdre.

Soit ρ un homomorphisme d'un sous-groupe fermé G_x de G dans le groupe symplectique $Sp(H, \Omega_H)$ d'un espace vectoriel symplectique réel (H, Ω_H), de dimension $2h$. Puisque G_x est compact, on peut définir sur H un produit scalaire euclidien invariant par ρ. On sait alors qu'il existe sur H une structure d'espace vectoriel complexe de dimension h, et une structure hermitienne, dont le produit euclidien et la forme symplectique Ω_H sont, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire. L'homomorphisme ρ est alors une représentation unitaire du groupe G_x dans un espace vectoriel complexe de dimension h. On connait explicitement toutes les représentations unitaires irréductibles du groupe $G = SO(3)$, et de ses sous-groupes fermés.

Les considérations ci-dessus permettent d'énumérer toutes les familles possibles d'éléments caractéristiques d'actions hamiltoniennes du groupe $SO(3)$, sur des variétés symplectiques, donc de classifier complètement, à une équivalence près, les voisinages de toutes les orbites possibles de telles actions.

4.2. L'espace des phases du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe (étudié par Arnold [2], [3]) est un exemple de variété symplectique sur laquelle agit le groupe $G = SO(3)$ par une action hamiltonienne: c'est tout simplement $(T^*G, d\alpha)$, et l'action de G n'est autre que Φ_L. Cette action étant transitive, le sous-groupe d'isotropie G_x d'un point x de l'espace des phases est toujours trivial.

Si x appartient à l'image de la section nulle de T^*G, $\xi = J_L(x)$ est nul. Le groupe G_ξ n'est autre que G. La famille des éléments caractéristiques de l'action Φ_L en x est $(0, \{e\}, \{0\}, 0)$; l'espace H est réduit à un point. La variété symplectique (M, Ω_{P_1}) construite selon le procédé exposé en 3.11 et 3.12 n'est autre que $(T^*G, d\alpha)$.

Si x n'appartient pas à l'image de la section nulle de T^*G, $\xi = J_L(x)$ est non nul. Le groupe G_ξ, de dimension 1, est isomorphe à S^1, et les fibres du fibré vectoriel F^* défini en 3.9 sont de dimension 1. L'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H) est de dimension 2, et l'homomorphisme ρ est trivial (puisque G_x est trivial). La famille des éléments caractéristiques de l'action Φ_L en x est $(-\partial\xi, \{e\}, (H, \Omega_H), 0)$.

4.3. L'espace des phases du mouvement d'un point matériel dans un champ central, dérivant d'un potentiel, est un autre exemple de variété symplectique sur laquelle agit le groupe $G = SO(3)$, par une action hamiltonienne. Cet espace n'est autre que $E \times E$ (produit de l'espace vectoriel euclidien E, de dimension 3, par lui-même), et la forme symplectique Ω dont il est muni a pour expression;

$$\Omega((\vec{x}, \vec{p}), (\vec{x}', \vec{p}')) = \vec{x}.\vec{p}' - \vec{x}'.\vec{p}.$$

On a convenu d'identifier E à sont dual au moyen de sa structure euclidienne. Les produits figurant au second membre de l'expression ci-dessus sont des produits scalaires. Pour considérer le cas le plus général possible on a supposé que le potentiel ne présentait pas de singularité à l'origine (dans le cas contraire, il faudrait prendre pour espace des phases $(E\backslash\{0\}) \times E$, au lieu de $E \times E$).

Moyennant le choix d'une orientation sur E et son identification avec le dual de l'algèbre de Lie $so(3)$, le moment de l'action hamiltonienne de G sur l'espace des phases est l'application:

$$(\vec{x}, \vec{p}) \mapsto \xi = \vec{p} \times \vec{x}.$$

Le produit figurant au second membre est le produit vectoriel.

Si $\vec{x}$ et $\vec{p}$ ne sont pas colinéaires, G_ξ, de dimension 1, est isomorphe à S^1, et le sous-groupe $G_{(\vec{x},\vec{p})}$ (précédemment noté G_x) est trivial. L'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H) est de dimension 2, et l'homomorphisme ρ est trivial. La famille des éléments caractéristiques de l'action de G sur l'espace des phases, au point $(\vec{x}, \vec{p})$, est $(-\partial\xi, \{e\}, (H, \Omega_H), 0)$.

Si $\vec{x}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires, mais non tous deux nuls, G_ξ est égal à G, et $G_{(\vec{x},\vec{p})}$, de dimension 1, est isomorphe à S^1. L'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H) est de dimension 2; on peut l'identifier à $\mathbb{C}$, muni de la structure symplectique $\Omega_{\mathbb{C}}$, partie imaginaire de sa structure hermitienne usuelle. La représentation ρ de $G_{(\vec{x},\vec{p})}$ dans (H, Ω_H) est triviale. La famille des éléments caractéristiques de l'action de G sur l'espace des phases, au point $(\vec{x}, \vec{p})$, est donc $(0, S^1, (\mathbb{C}, \Omega_{\mathbb{C}}), 0)$.

Si $\vec{x}$ et $\vec{p}$ sont tous deux nuls, G_ξ et $G_{(\vec{x},\vec{p})}$ sont tous deux égaux à G. L'espace vectoriel symplectique (H, Ω_H), de dimension 6, s'identifie à $E \times E$, et la représentation ρ correspond simplement à l'action de G sur l'espace des phases $E \times E$; on sait que c'est la somme directe $\rho_1 \oplus \rho_1$ de deux représentations irréductibles de poids 1 (correspondant, chacune, à l'action usuelle du groupe $SO(3)$ sur l'espace vectoriel euclidien E, de dimension 3). La famille des éléments caractéristiques de l'action de G sur l'espace des phases, au point $(0,0)$, est donc $(0, SO(3), (E \times E, \Omega), \rho_1 \oplus \rho_1)$.

Remerciements. L'auteur remercie M. de Wilde et P. Lecomte, qui lui ont donné l'occasion de présenter une partie de ce travail au séminaire de Géométrie différentielle d'Esneux (Belgique), en septembre 1983. Ses remerciements s'adressent également à D. Galletto, S. Benenti et W.M. Tulczyiew, qui l'ont reçu en avril 1984 à l'Istituto de Fisica Matematica J.L. Lagrange (Torino, Italià), où ce travail a été achevé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham, and J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics,* (2nd edition). Benjamin-Cummings, Reading, 1978.

[2] V. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1, 1966, p. 319-361.

[3] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Editions Mir, Mo-

scou, 1976.

[4] A. Kirillov. *Eléments de la théorie de représentations.* Editions Mir, Moscou, 1974.

[5] B. Kostant. *Quantization and unitary representations.* Lecture notes in Mathematics 170, Springer Verlag, Berlin,1970, p. 87-208.

[6] C. M. Marle. *Sous-variétés de rang constant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectiques.* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 295 (1982), I, 119-122.

[7] C.M. Marle. *Sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique.* Société Mathématique de France, Astérisque 107-108, 1983, p. 69-86.

[8] C.M. Marle. *Le voisinage d'une orbite d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie.* Feuilletages et quantification géométrique (P. Dazord et N. Desolneux-Maulis, éditeurs), Hermann, Paris, 1984, p. 19-35.

[9] J. Marsden and A, Weinstein. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry.* Reports on Mathematical Physics, 5, 1974, p. 121-130.

[10] J.M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris 1969.

[11] S. Sternberg. *Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 74, n. 12, December 1977, p. 5253-5254.

[12] A. Weinstein. *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds.* Advances in mathematics 6, 1971, p. 329-346.

[13] A. Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds.* C.B.M.S. Regional conference series n. 29, American Mathematical Society, Providence,1977.

[14] A. Weinstein. *A universal phase space for particles in Yang-Mills fields.* Letters in Mathematical Physics 2, 1978, p. 417-420.

[15] A. Weinstein. *Neighborhood classification of isotropic embeddings.* J. Differential Geometry 16, 1981, p. 125-128.

C.M. MARLE, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6),Mathématiques,4, Place Jussieu 75252 Paris Cedex05, France.

Lavoro pervenuto in redazione il 29/V/1984