Rubrique. Problèmes mathématiques de la mécanique / Mathematical Problems in Mechanics. À mentionner aussi sous la rubrique Géométrie différentielle / Differential Geometry.

Titre. Sur la géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives.

Auteur. Charles-Michel Marle, correspondant de l'Académie.

Résumé. On donne un cadre général pour l'étude mathématique des systèmes mécaniques comportant des liaisons actives. On montre que le champ de vecteurs dynamique d'un tel système est somme de trois termes, le premier étant le champ dynamique lorsque les liaisons sont fixées, le second étant hamiltonien, associé à l'énergie cinétique des liaisons actives, et le troisième étant le relèvement horizontal, relativement à une connexion d'Ehresmann, du champ de vecteurs, sur l'espace des états des liaisons actives, représentant l'évolution infinitésimale de cet état au cours du temps.

Titre en anglais. Geometry of mechanical systems with active constraints.

Abstract. We present a general setting for the mathematical description of mechanical systems with active constraints. We prove that the dynamical vector field of such a system splits into a sum of three terms. The first term is the dynamical vector field for fixed constraints. The second is a Hamiltonian vector field associated with the kinetic energy of the active constraints. The third term is the horizontal lift, relative to an Ehresmann connection, of the vector field on the manifold of states of the active constraints which represents the time evolution of this state.

Abridged English version

A mechanical system is said to be *with active constraints* when during the motion an operator (either external or part of the system) can act upon some of the constraints, driving the motion by that way. Examples: a cat in free fall who manages to reach the ground on his feet; a child on a swing who increases the swing's amplitude; an artificial satellite with an orientable telescope. We were led to this study by the works of Marsden, Montgomery and Ratiu [1], [2], [3], where the reader can find another viewpoint.

The configuration space of the system is a smooth manifold M. The active constraints are modelled [4] by a surjective sbmersion $\pi : M \to S$ onto another smooth manifold S, which is the space of states of the active constraints. The configuration space when the active constraints are frozen in state $s \in S$ is $M_s = \pi^{-1}(s)$. Kinematic non-holonomic constraints [5] [6] are not considered here. A Lagrangian $L : TM \to \mathbf{R}$ is given. When the active constraints are left completely free, the equations of are the Lagrange equations associated with L. But we assume that the operator acts on the active constraints in such a way that a parametrized smooth curve $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ is prescribed in S. A standard procedure leads to the equations of motion first in Lagrange's formalism, then, when the Lagrangian is hyper-regular [7] [8], in Hamilton's formalism. They take the simple form (4), (5) (Lagrange's formalism) or (7), (8), (9) (Hamilton's formalism, H being the Hamiltonian and $\mathcal{L}$ the Legendre transformation) when the local coordinates (q^i, q^α) in M, s^α in S, are adapted to the map π, *i.e.*, such that π reads as $(q^i, q^\alpha) \mapsto (s^\alpha = q^\alpha)$. (The numbers between braces such as (4) refer to equations written in the main part of this note in French.) Eq. (8) is to be solved for the p_α's in terms of the q^i, q^α, p_i and $\dfrac{d\sigma^\alpha}{dt}$, and these expressions substituted into Eq. (7). This is possible in many cases, for example for classical Lagrangians (10). Eq. (9), like Eq. (5) in Lagrange's formalism, is useful only for obtaining the Lagrange multipliers λ_α.

An intrinsic geometric formulation of this substitution procedure is obtained by using as a phase space the bundle V^*M, dual bundle to the vertical bundle $VM = \ker(T\pi)$. It has a natural Poisson manifold structure [9]. Let $\zeta : T^*M \to V^*M$, $q : V^*M \to M$ be the natural projections. We define $\widetilde{\pi} = \pi \circ q$, and $\widetilde{T\pi} : TM \to \pi^*(TS)$ as the bundle map with values in the pull-back of the tangent bundle TS, corresponding to $T\pi : TM \to TS$. Then assuming that Eq. (8) can be solved for the p_α's amounts to assuming that the map $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1}) : T^*M \to V^*M \oplus \pi^*(TS)$ is a diffeomorphism. For each time t, let $s = \sigma(t)$, $\dot{s} = \dfrac{d\sigma(t)}{dt}$. The map $z \mapsto \big(z, \pi^*(\dot{s})\big)$ is injective from $\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ into $V^*M \oplus \pi^*(TS)$. By composition with $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1})^{-1}$, we obtain an injective immersion $\chi_{\dot{s}} : \widetilde{\pi}^{-1}(s) \to T^*M$. Let X_H be the Hamiltonian vector field on T^*M associated with H. Take its restriction to the image of $\chi_{\dot{s}}$, and project it by ζ on V^*M. We obtain a vector field *along* the submanifold $\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ of V^*M (which *is not*, in general, tangent to that submanifold), which yields the infinitesimal time evolution of the system.

We assume now that a vector field Y on S is given and that the operator acts in such a way that the time evolution of the state of constraints is an integral curve of Y. The above described procedure yields a vector field D_Y on V^*M, called the *dynamical vector field*, which projects onto Y by $\widetilde{\pi}$. The motion of the system is an integral curve of D_Y.

Proposition. *For any vector field Y on S, the corresponding dynamical field D_Y is a Poisson vector field on V^*M. For $Y = 0$, i.e., for frozen constraints, D_0 is Hamiltonian for the Poisson structure of V^*M, hence tangent to the symplectic foliation.*

When L is a classical Lagrangian given by Eq. (10), with g a Riemannian metric on M, we define by Eqs. (11) and (12) a function K_Y on M, considered as a function on V^*M by composition with q. Let X_{K_Y} be the corresponding Hamiltonian vector field on V^*M.

Theorem. *The vector field $D_Y - D_0 + X_{K_Y}$ is the horizontal lift to V^*M of the vector field Y on S relative to an Ehresmann connection* [10] *on the bundle $\widetilde{\pi} : V^*M \to S$, called the dynamical connection, determined when π and g are given.*

Finally, we define an Ehresmann connection on the bundle $\pi : M \to S$, which we call the *kinematic connection*, for which the horizontal lift at $x \in M$ of a vector $v \in T_{\pi(x)}S$ is the unique vector $w \in T_xM$ which projects onto v and which is orthogonal for the metric g to the subspace $\ker(T_x\pi)$. Then:

Proposition. *The dynamical connection is the unique Ehresmann connection on the bundle $\widetilde{\pi} : V^*M \to M$ which satisfies the two properties:*

1. *For each $z \in V^*M$ and $u \in T_{\widetilde{\pi}(z)}S$, the horizontal lift of u at z relative to the dynamical connection projects by q onto the horizontal lift of u at $q(z)$ relative to the kinematic connection.*

2. *The horizontal lift of any vector field Y on S relative to the dynamical connection is a Poisson vector field on V^*M, tangent to the zero section of $q : V^*M \to M$.*

Texte de la note

1. Le problème étudié et sa formalisation mathématique.

On dira qu'un système mécanique est *à liaisons actives* s'il comporte certaines liaisons sur lesquelles un opérateur (qui peut soit faire partie du système, soit lui être extérieur) agit, influant ainsi sur le mouvement du système. Un enfant sur une escarpolette peut, en agissant sur les articulations de son corps, mettre celle-ci en mouvement. Un chat qui tombe en chute libre peut, en déformant son corps, modifier son orientation dans l'espace afin d'arriver au sol sur ses pattes. Ce sont deux exemples de systèmes mécaniques à liaisons actives. Un satellite artificiel comportant des parties articulées qu'on peut commander (panneaux solaires, antennes, volants d'inertie, télescopes) est aussi un système mécanique à liaisons actives.

L'étude des systèmes à liaisons actives nous a été suggérée par la lecture des travaux de Marsden, Montgomery et Ratiu [1] [2] [3], où le lecteur pourra trouver d'autres points de vue.

On s'intéresse ici aux systèmes dont l'espace de configuration est une variété différentiable M, de dimension finie, dont les liaisons actives sont représentées par une submersion surjective $\pi : M \to S$ de M sur une autre variété différentiable S. Chaque point $s \in S$ représente un état possible des liaisons actives; la sous-variété $M_s = \pi^{-1}(s)$ de M est l'espace de configuration du système lorsque les liaisons actives sont figées dans l'état s. Les liaisons actives considérées ici sont donc de type géométrique et, lorsqu'elles sont figées, elles sont représentées, comme dans [4], par une sous-variété de la variété de configuration. On laisse de côté pour le moment le cas plus complexe des systèmes, tels que par exemple un patineur sur glace, dont les liaisons actives sont de type cinématique, la formulation des équations du mouvement présentant dans ce cas des difficultés, voire même des ambiguïtés (mentionnées par exemple dans [5] et [6]).

On supposera que lorsque les liaisons actives sont laissées complètement libres de jouer, le mouvement du système (dit mouvement libre) est décrit par les équations de Lagrange associées à un lagrangien $L : TM \to \mathbf{R}$, défini sur le fibré tangent TM à la variété de configuration M. Cependant, le mouvement réel du système diffère du mouvement libre car l'opérateur agit sur les liaisons actives. On supposera que cette action a pour effet de prescrire, à chaque instant t, l'état $s = \sigma(t)$ des liaisons actives; autrement dit, l'évolution de l'état des liaisons actives au cours du temps est décrite par une courbe paramétrée $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ dans la variété S, imposée par l'opérateur.

Les variétés M, S, la submersion π, et toutes les applications considérées, sont supposées différentiables de classe C^∞.

Les trois exemples de systèmes à liaisons actives mentionnés ci-dessus (enfant sur une escarpolette, chat en chute libre, satellite artificiel) relèvent, moyennant des approximations raisonnables, du présent formalisme.

2. Les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien.

Soit $c : [t_1, t_2] \to M$ une courbe paramétrée dans M. On lui associe l'intégrale d'action

$$I(c) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(c(t), \frac{dc(t)}{dt}\right)\, dt\,. \tag{1}$$

On a d'autre part une courbe donnée $\sigma : [t_1, t_2] \to S$ dans l'espace des états des liaisons actives, prescrite par l'action de l'opérateur sur ces liaisons.

D'après les principes de d'Alembert-Lagrange, Gauss et Hölder (équivalents pour les liaisons du type considéré ici [5]), la courbe paramétrée c est un mouvement du système compatible avec les liaisons imposées, si et seulement si elle vérifie

$$\pi\bigl(c(t)\bigr) = \sigma(t) \text{ pour tout } t \in [t_1, t_2] \tag{2}$$

et rend l'intégrale d'action I stationnaire pour toute variation δc laissant les extrémités fixes compatible avec les liaisons imposées, c'est-à-dire vérifiant

$$\delta c(t_1) = 0\,, \quad \delta c(t_2) = 0\,, \quad T\pi\bigl(\delta c(t)\bigr) = 0 \text{ pour tout } t \in [t_1, t_2]\,. \tag{3}$$

En exprimant cette propriété, on obtient les classiques équations de Lagrange avec multiplicateurs. Celles-ci prennent une forme particulièrement simple lorsqu'on utilise des coordonnées locales (q^i, q^α) sur M, (s^α) sur S $(1 \leq i \leq p = \dim M - \dim S,\ p+1 \leq \alpha \leq m = \dim M)$, adaptées à la submersion π, c'est-à-dire telles que π ait pour expression locale $(q^i, q^\alpha) \mapsto (s^\alpha = q^\alpha)$. En notant $(q^i, q^\alpha, v^i, v^\alpha)$ les coordonnées locales sur TM associées à (q^i, q^α), les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0\,, \quad (1 \leq i \leq p)\,, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \lambda_\alpha\,, \quad (p+1 \leq \alpha \leq m)\,. \tag{5}$$

Les équations (4), jointes aux équations exprimant les liaisons

$$q^\alpha(t) = \sigma^\alpha(t) \text{ pour tout } t \in [t_1, t_2], \quad (p+1 \leq \alpha \leq m)\,, \tag{6}$$

déterminent le mouvement du système. Une fois celui-ci déterminé, les équations (5) permettent la détermination des multiplicateurs de Lagrange λ_α, qui s'interprètent au moyen de la puissance des forces de liaison.

3. Les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien.

Pour simplifier, on suppose le lagrangien L hyper-régulier [7] [8], c'est-à-dire tel que la transformation de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ qu'il définit soit un difféomorphisme. On pourrait d'ailleurs aisément affaiblir cette hypothèse. On note $H : T^*M \to \mathbf{R}$ le hamiltonien associé à L (hamiltonien du système dans lequel les liaisons actives sont laissées complètement libres). Grâce à la transformation de Legendre $\mathcal{L}$, on peut exprimer les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien. En utilisant comme ci-dessus des coordonnées locales (q^i, q^α) sur M, (s^α) sur S, adaptées à la submersion π, et les coordonnées locales correspondantes $(q^i, q^\alpha, v^i, v^\alpha)$ sur le fibré tangent TM, $(q^i, q^\alpha, p_i, p_\alpha)$ sur le fibré cotangent T^*M, les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\,, \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\,, \end{cases} \quad (1 \leq i \leq p = \dim M - \dim S)\,, \tag{7}$$

$$\frac{d\sigma^\alpha}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0\,, \quad (p+1 \leq \alpha \leq m = \dim M)\,, \tag{8}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \lambda_\alpha\,, \quad (p+1 \leq \alpha \leq m = \dim M)\,. \tag{9}$$

Dans (8), le terme $\dfrac{d\sigma^\alpha}{dt}$ est connu, puisque la loi d'évolution σ de l'état des liaisons actives en fonction du temps est imposée par l'opérateur. Cette équation doit être utilisée afin de déterminer les coordonnées locales p_α $(p+1 \leq \alpha \leq m)$ en fonction des q^i, q^α, p_i et des quantités connues $\dfrac{d\sigma^\alpha}{dt}$, ce qui est souvent possible, au moins localement. C'est notamment le cas pour un lagrangien classique (expression (10) ci-dessous). Portant ces expressions de p_α dans les équations (7), on obtient un système d'équations qui suffit à déterminer le mouvement (les équations (9) ne sont pas nécessaires pour cela, elles servent seulement à déterminer les multiplicateurs de Lagrange λ_α).

4. Une expression géométrique intrinsèque des équations du mouvement.

Soit $VM = \ker(T\pi)$ le sous-fibré vertical (relativement à la submersion $\pi : M \to S$) du fibré tangent TM. Soit V^*M le fibré dual de VM. On sait qu'il s'identifie au quotient de T^*M (fibré cotangent à M) par son sous-fibré $(VM)^0$, annulateur de VM (fibré des 1-formes sur M nulles sur VM). On a donc une projection canonique $\zeta : T^*M \to V^*M$. On sait que V^*M possède une structure naturelle de variété de Poisson [9] pour laquelle ζ est une application de Poisson. On note $q : V^*M \to M$ la projection canonique (déduite par quotient de la projection canonique $T^*M \to M$) et on pose $\widetilde{\pi} = \pi \circ q : V^*M \to S$. On supposera que pour tout état $s \in S$ des liaisons actives, l'espace de configuration $M_s = \pi^{-1}(s)$ pour des liaisons fixées dans l'état s est connexe. On voit alors que S s'identifie à l'ensemble des feuilles symplectiques de la variété de Poisson V^*M, car pour tout point $s \in S$, $\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ est une feuille symplectique de V^*M canoniquement symplectomorphe à l'espace des phases T^*M_s du système lorsque les liaisons sont figées dans l'état s. Soit $T\pi : TM \to TS$ le prolongement aux vecteurs de la submersion $\pi : M \to S$, $\pi^*(TS)$ le fibré de base M image réciproque par π du fibré tangent TS de base S, et $\widetilde{T\pi} : TM \to \pi^*(TS)$ le morphisme de fibrés correspondant à $T\pi$. En le composant avec la transformation de Legendre inverse $\mathcal{L}^{-1} : T^*M \to TM$, on obtient une application

$\widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1} : T^*M \to \pi^*(TS)$, fibrée au dessus de l'identité de M (mais pas nécessairement linéaire sur chaque fibre). L'application $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1}) : T^*M \to V^*M \oplus \pi^*(TS)$ est fibrée au dessus de l'identité de M. On supposera que c'est un difféomorphisme. Cette hypothèse est automatiquement vérifiée si L est un lagrangien classique (équation (10) ci-dessous). Dans les coordonnées locales utilisées au paragraphe 3, ce difféomorphisme a pour expression $(q^i, q^\alpha, p_i, p_\alpha) \mapsto (q^i, q^\alpha, p_i, \dot{s}^\alpha)$, avec $\dot{s}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$.

Soit $s \in S$ un état des liaisons actives, et $\dot{s} \in T_sS$ un vecteur tangent en s à S, représentant l'évolution infinitésimale (dérivée par rapport au temps) de l'état des liaisons actives imposée par l'opérateur. En composant le difféomorphisme $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1})^{-1}$ avec l'application injective $z \mapsto \bigl(z, \pi^*(\dot{s})\bigr)$ de la feuille symplectique $\widetilde{\pi}^{-1}(s) \subset V^*M$ dans $V^*M \oplus \pi^*(TS)$, on obtient une immersion injective $\chi_{\dot{s}} : \widetilde{\pi}^{-1}(s) \to T^*M$, qui dépend évidemment du choix de $\dot{s}$. Dans les coordonnées locales adaptées du paragraphe 3, cette immersion a pour expression $(q^i, q^\alpha, p_i) \mapsto (q^i, q^\alpha, p_i, p_\alpha)$, où les p_α sont obtenus en résolvant l'équation

$$\dot{s}^\alpha = \frac{\partial H(q^i, q^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_\alpha}\,.$$

Soit X_H le champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M, relativement à sa structure symplectique canonique, associé au hamiltonien H. C'est le champ de vecteurs définissant, dans la formulation hamiltonienne, le mouvement libre du système (mouvement lorsque les liaisons actives sont laissées complètement libres). On restreint ce champ de vecteurs à l'image de l'immersion $\chi_{\dot{s}}$, et on projette cette restriction sur V^*M, par le prolongement aux vecteurs de la projection $\zeta : T^*M \to V^*M$. On obtient ainsi un champ de vecteurs *le long* de la sous-variété $\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ de V^*M (qui, en général, *n'est pas* tangent à cette sous-variété). On remarque que la projection sur S de ce champ de vecteurs est automatiquement égale au vecteur $\dot{s} \in T_sS$.

Ce champ de vecteurs le long de $\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ est l'expression géométrique intrinsèque des équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien.

5. Propriétés de la dynamique.

Dans cette partie, on suppose un champ de vecteurs Y donné sur S. L'opérateur agit sur les liaisons actives de manière telle que l'évolution $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ de leur état au cours du temps soit une courbe intégrale de Y. La construction décrite dans le paragraphe précédent permet alors de définir un champ de vecteurs D_Y sur V^*M, appelé *champ dynamique*, ayant Y pour projection sur S. Ce champ définit la dynamique du système: on peut en effet considérer V^*M comme l'espace des états dynamiques du système, et l'évolution au cours du temps de cet état dynamique est une courbe intégrale de D_Y. On montre alors:

Proposition. *Pour tout choix du champ de vecteurs Y sur S, le champ de vecteurs dynamique correspondant D_Y est un automorphisme infinitésimal de Poisson. Lorsque Y est identiquement nul, c'est-à-dire lorsque les liaisons actives sont figées, le champ dynamique correspondant, noté D_0, est hamiltonien (relativement à la structure de Poisson de V^*M), donc tangent au feuilletage symplectique.*

On remarque que $D_Y - D_0$ est un automorphisme infinitésimal de Poisson de V^*M, mais n'est en général pas hamiltonien.

On suppose maintenant le lagrangien $L : TM \to \mathbf{R}$ de la forme

$$L(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v) - P(x)\,, \quad x \in M\,,\ v \in T_xM\,, \tag{10}$$

où g est une métrique riemannienne et P une fonction différentiable sur M. C'est un lagrangien classique: $\frac{1}{2} g_x(v, v)$ est l'énergie cinétique et $P(x)$ l'énergie potentielle du système. La métrique g permet de définir une forme bilinéaire symétrique Θ sur le fibré vectoriel $\pi^*(TS)$ ayant pour expression

$$\Theta_x(\pi^*u_1, \pi^*u_2) = g_x(v_1, v_2)\,, \qquad x \in M\,,\ u_1 \text{ et } u_2 \in T_{\pi(x)}S\,, \tag{11}$$

où π^*u_1 et π^*u_2, éléments de la fibre en x de $\pi^*(TS)$, sont les images inverses des vecteurs u_1 et u_2, tangents à S au point $\pi(x)$, et où v_1 et v_2 sont les vecteurs tangents à M au point x, orthogonaux au sous-espace vertical $V_xM = \ker(T_x\pi)$, dont les projections par $T\pi$ sur S sont, respectivement, u_1 et u_2.

On définit une fonction $K_Y : M \to \mathbf{R}$ en posant

$$K_Y(x) = \frac{1}{2}\Theta_x\bigl(\pi^*(Y_{\pi(x)}), \pi^*(Y_{\pi(x)})\bigr)\,. \tag{12}$$

On peut convenir d'appeler K_Y *énergie cinétique des liaisons actives.* Par un léger abus de notations, on notera encore $K_Y : V^*M \to \mathbf{R}$ l'application composée de K_Y et de la projection canonique $q : V^*M \to M$. On note X_{K_Y} le champ de vecteurs hamiltonien sur V^*M (pour la structure de Poisson canonique de cette variété) qui lui est associé. On montre alors:

Théorème. *Le champ de vecteurs $D_Y - D_0 + X_{K_Y}$ sur V^*M est le relèvement horizontal du champ de vecteurs Y sur S relativement à une connexion d'Ehresmann* [10] *sur le fibré $\widetilde{\pi} : V^*M \to S$. Cette connexion d'Ehresmann, appelée connexion dynamique, est entièrement déterminée par la submersion $\pi : M \to S$ et par la métrique riemannienne g sur M.*

Pour définir la connexion dynamique, on définit d'abord une connexion d'Ehresmann sur le fibré $\pi : M \to S$, dite *connexion cinétique*, pour laquelle, pour tout $x \in M$ et tout $u \in T_{\pi(x)}S$, le relèvement horizontal de u au point x est l'unique vecteur $v \in T_xM$ orthogonal au sous-espace vertical $V_xM = \ker(T_x\pi)$ (relativement à la métrique riemannienne g) tel que $T_x\pi(v) = u$. On a alors:

Proposition. *La connexion dynamique est caractérisée par les deux propriétés suivantes.*

1. *Pour tout $z \in V^*M$ et tout $u \in T_{\widetilde{\pi}(z)}S$, le relèvement horizontal de u au point z relativement à la connexion dynamique a pour projection (par Tq) sur M le relèvement horizontal de u au point $x = q(z)$ relativement à la connexion cinétique.*

2. *Le relèvement horizontal sur V^*M, relativement à la connexion dynamique, de tout champ de vecteurs Y sur S, est un automorphisme infinitésimal de la structure de Poisson de V^*M, tangent à la section nulle de $q : V^*M \to M$.*

Remarque. Le théorème ci-dessus montre que le champ de vecteurs dynamique D_Y sur V^*M est somme de trois termes:

$$D_Y = D_0 - X_{K_Y} + H(Y)\,,$$

où D_0 est le champ dynamique à liaisons figées, X_{K_Y} le champ hamiltonien associé à l'énergie cinétique des liaisons actives K_Y, et $H(Y)$ le relèvement horizontal de Y relativement à la connexion dynamique. En utilisant une autre approche, Marsden, Montgomery et Ratiu [1] [2] [3] ont introduit la connexion dynamique pour certains types de systèmes mécaniques à liaisons actives, notamment pour les systèmes mobiles et pour le problème du chat en chute libre. Pour ce dernier problème, la fonction K_Y se trouve être constante sur chaque feuille de la variété de Poisson V^*M, de sorte que le champ de vecteurs X_{K_Y} est nul. La présentation générale donnée ici et la décomposition du champ dynamique en somme de trois termes sont, à notre connaissance, nouvelles.

Références bibliographiques.

1. J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, Reduction, symmetry and Berry's phase in mechanics, *Preprint* (95 pages), December 1988. To appear as a Memoir of the American Mathematical Society.
2. R. Montgomery, The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case, *Commun. Math. Phys.* 120, 1988, p. 269–294.
3. R. Montgomery, Isoholonomic problems and some applications, *Commun. Math. Phys.* 128, 1990, p. 565–592.
4. F. Cardin and G. Zanzotto, On constrained mechanical systems: d'Alembert's and Gauss' principles, *J. Math. Phys.* 30 (7), July 1989, p. 1473–1479.
5. V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, chapter 1. In *Dynamical systems III* (V. I. Arnold, ed.), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.

6. N. Woodhouse, *Geometric quantization*, chapter 2, Oxford University Press, Oxford, 1980.

7. R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, chapter 3, Benjamin, Reading, 1978.

8. C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, chapitre 11, Hermann, Paris, 1969.

9. P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, chapter 3, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

10. C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950*, p. 29–55, Masson, Paris, 1950.

Adresse de l'auteur. Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques (UFR 920), 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05. Téléphone: (1) 44-27-58-69, secrétariat (1) 44-27-53-32. Adresse électronique: marle@frcirp81.bitnet.

Adresse pour l'envoi des épreuves pour correction. Celle de l'auteur.