



ÉCOULEMENTS MONOPHASIQUES EN MILIEU POREUX

C. MARLE

Institut Français du Pétrole.

Réf. 15.249

Extrait de la
REVUE DE L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE
ET ANNALES DES COMBUSTIBLES LIQUIDES

Vol. XXII, n° 10, octobre 1967

7, rue Nélaton, PARIS, 15^e

ÉCOULEMENTS MONOPHASIQUES EN MILIEU POREUX

C. MARLE

Institut Français du Pétrole.

Un milieu poreux est constitué par un solide de forme compliquée, englobant des vides qui peuvent contenir des fluides. On connaît les équations qui régissent l'écoulement de ces fluides à l'échelle microscopique des pores, mais la complexité de la géométrie du milieu, qui d'ailleurs n'est jamais complètement connue, rend leur résolution impossible. Aussi utilise-t-on des équations d'origine empirique, telles que la loi de Darcy, pour décrire les phénomènes considérés seulement à l'échelle macroscopique, pour un bloc de milieu poreux assez grand. Le présent article tente de montrer qu'on peut donner à ces équations macroscopiques une base théorique, en les déduisant des équations microscopiques par des prises de moyenne.

La première partie indique de façon détaillée le processus de passage d'une grandeur microscopique, valable à l'échelle des pores, à une grandeur macroscopique, valable à l'échelle d'un bloc de milieu poreux. Ce passage peut être effectué de deux façons différentes, soit par prises de moyenne dans l'espace, soit par l'emploi de fonctions aléatoires et le passage à l'espérance mathématique. La dérivation des grandeurs microscopiques est étudiée; on montre que les opérations de dérivation et de passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique ne commutent pas en général: selon l'ordre dans lequel ces opérations sont effectuées, on peut obtenir des résultats différents.

La seconde partie applique les concepts développés à l'écoulement d'un fluide pur dans un milieu indéformable. On montre que le gradient de la pression macroscopique diffère de la valeur macroscopique du gradient de la pression. Pour l'écoulement lent d'un fluide incompressible, la loi de Darcy est établie, ainsi que la symétrie du tenseur de perméabilité (déjà démontrée par Matheron). Grâce à une méthode de perturbations, la forme du terme correctif qui apparaît dans la loi de Darcy lorsque l'écoulement n'est plus très lent est établie.

A porous medium is made up of a solid with a complicated form which encompasses empty spaces that may contain fluids. The equations governing the flow of these fluids on a microscopic pore scale are known, but the complexity of the geometry of the medium, which moreover is not entirely known, makes them impossible to solve. Therefore, equations of empirical origin are used, such as Darcy's law, to describe phenomena considered only on a macroscopic scale for a relatively large porous-medium block. The present article attempts to show that a theoretical basis can be given to these macroscopic equations by deducing them from microscopic equations through an averaging process.

The first part gives a detailed description of the process of going from a microscopic quantity that is valid on the pore scale to a macroscopic quantity that is valid on a porous-medium-block scale. This transition can be done in two different ways, either by taking averages in space, or by using random functions and then mathematical expectation. The differentiation of microscopic quantities is examined. The order of operations of differentiation and of transition from a microscopic to a macroscopic scale cannot usually be changed; i. e. depending on the order in which these operations are performed, different results can be obtained.

The second part applies the concepts developed to the flow of a pure fluid in an undeformable medium. The macroscopic pressure gradient is shown to differ from the macroscopic value of the pressure gradient. For the slow flow an incompressible fluid,

Darcy's law is set up along with the symmetry of the permeability tensor (already proven by Matheron). By means of a method of small perturbations, the form of the corrective term appearing in Darcy's law when flow is no longer very slow is determined.

Un medio poroso está constituido por un sólido de forma complicada, englobando vacíos que pueden contener flúidos. Se conocen las ecuaciones que gobiernan el flujo de estos flúidos en la escala microscópica de los poros, pero la complejidad de la geometría del medio, que por otra parte no se puede nunca conocer completamente, hace imposible sus soluciones. Se utilizan también ecuaciones de origen empírico, tales como la ley de Darcy, con el objeto de describir los fenómenos considerados solamente en la escala macroscópica, para una porción bastante grande de medio poroso. El presente artículo trata de demostrar que se puede dar a estas ecuaciones macroscópicas una base teórica, deduciéndolas de las ecuaciones microscópicas si se consideran los valores medios.

La primera parte indica de manera detallada el proceso del paso de un grandor microscópico, válido en la escala de los poros, a un grandor macroscópico, válido en la escala de una gran porción de medio poroso. Este paso puede efectuarse de dos maneras diferentes, ya sea tomando los valores medios en el espacio o mediante el empleo de funciones aleatorias y el paso a la esperanza matemática. Se estudia la derivación de los grandores microscópicos, se demuestra que las operaciones de derivación y paso de la escala microscópica a la escala macroscópica en general no conmutan, según el orden en el cual estas operaciones se efectúan, se pueden obtener resultados diferentes.

La segunda parte aplica los conceptos desarrollados para el flujo de un flúido puro en un medio indeformable. Se muestra que el gradiente de la presión macroscópica difiere del valor macroscópico del gradiente de presión. Para el flujo lento de un flúido incompresible, se establece la ley de Darcy, lo mismo que la simetría del tensor de permeabilidad (ya demostrada por Matheron). Gracias a un método de perturbaciones, se establece la forma del término correctivo que aparece en la ley de Darcy cuando el flujo deja de ser muy lento.

LES BASES DE LA DESCRIPTION MACROSCOPIQUE DES PHÉNOMÈNES EN MILIEU POREUX

1. NATURE DES LOIS DÉCRIVANT LES PHÉNOMÈNES EN MILIEU POREUX

1.1. Lois microscopiques et macroscopiques.

Un milieu poreux est constitué par un solide de forme compliquée, englobant des vides appelés « pores ». Ceux-ci peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler. La partie solide du milieu poreux doit être connexe afin d'avoir une certaine cohésion : c'est en cela qu'un milieu poreux se distingue, par exemple, d'une suspension de particules solides dans un fluide.

Il importe de souligner dès maintenant que les pores du milieu ne sont pas individualisés : leur forme compliquée, leur interconnexion, rendent les notions de « nombre de pores », « dimension moyenne des pores », etc., sans signification précise. Nous nous efforcerons ici de n'utiliser de telles notions qu'après en avoir donné une définition précise. Cependant, dans ce paragraphe d'introduction, nous aurons à employer la notion de « bloc de milieu poreux grand auprès des dimensions des pores », qui ne sera définie avec précision que plus loin : pour l'instant il nous suffit de savoir qu'un bloc de milieu poreux est grand auprès des dimensions des pores si, pour le phénomène considéré, le volume de ce bloc est suffisant pour permettre à un effet de moyenne de se manifester.

Les phénomènes qui se déroulent dans un milieu poreux doivent, normalement, être décrits à l'échelle des pores. S'il s'agit, par exemple de la filtration d'un fluide, le phénomène est décrit par les équations de Navier et l'équation de continuité appliquées à la phase fluide, avec les conditions aux limites résultant de la géométrie des pores du milieu. Envisagés ainsi, les phénomènes qui se

déroulent dans un milieu poreux sont parfaitement décrits par les lois bien connues de l'hydrodynamique et de la physique classiques. Mais une telle description ne peut être employée en pratique : elle est beaucoup trop détaillée pour les besoins ordinaires, car seul le comportement macroscopique global du milieu présente de l'intérêt ; les problèmes aux limites posés par cette description sont excessivement complexes, et d'ailleurs, les conditions aux limites ainsi posées ne sont pas précisées dans tous leurs détails, car la géométrie des pores du milieu est généralement très incomplètement connue.

C'est pourquoi les praticiens ont systématiquement cherché à décrire seulement le comportement global d'un milieu poreux, à une échelle grande auprès des dimensions des pores. La loi de Darcy, qui exprime le flux macroscopique de fluide qui filtre dans le milieu sous l'effet d'un gradient macroscopique de charge hydraulique donné, est une description de ce type. A l'origine, ces lois ont été introduites empiriquement, et ont été employées faute de mieux, en raison de leur accord avec l'expérience. Mais la logique voudrait que l'on établisse ces lois rigoureusement, par des prises de moyenne sur les lois élémentaires valables à l'échelle des pores, avec au besoin certaines hypothèses de nature statistique sur la géométrie du milieu poreux. La difficulté de cette approche a conduit la plupart des chercheurs qui s'intéressent aux milieux poreux à se contenter de justifications théoriques incomplètes des lois qu'ils employaient, obtenues par exemple en assimilant le milieu à un modèle simple. Ainsi l'assimilation du milieu à un faisceau de tubes capillaires cylindriques a conduit à voir dans la loi de Darcy une conséquence directe de la formule de Poiseuille, qui décrit l'écoulement d'un fluide dans un tube cylindrique. La faiblesse de cette approche apparaît dans le fait que les paramètres caractéristiques ainsi calculés pour décrire le comportement global du milieu (tels que la perméabilité) ne sont pas quantitativement corrects.

Nous nous efforcerons ici de montrer de façon précise comment les lois qui décrivent, à l'échelle macroscopique, le comportement d'un milieu poreux, résultent des lois élémentaires valables à l'échelle des pores, sans avoir recours à des modèles trop schématiques.

1.2. Lois macroscopiques locales.

Supposons qu'on parvienne à établir de telles lois macroscopiques. Pour les appliquer à un corps poreux de grandes dimensions, soumis, suivant les régions, à des conditions variables, nous devons nécessairement considérer ces lois comme des lois locales. Il y a là une difficulté nouvelle : les lois introduites comme lois moyennes, décrivant le comportement global du milieu, doivent maintenant être considérées comme des lois locales, valables en tout point du milieu. Le milieu poreux, par nature hétérogène et discontinu lorsqu'on l'examine à l'échelle des pores, se trouve dans cette description remplacé par un milieu continu fictif, dont les propriétés en chaque point sont les propriétés macroscopiques locales du corps poreux. La définition précise de celles-ci devra donc permettre leur évaluation, non seulement pour le corps poreux considéré dans son ensemble, mais en chaque point.

1.3. Exemple de définition d'une grandeur macroscopique locale : la porosité.

L'exemple suivant [K. M. HUBBERT, (2)] va montrer les difficultés rencontrées dans la définition des grandeurs macroscopiques.

La porosité d'un échantillon poreux est, par définition, le rapport du volume des vides au volume total de l'échantillon. Ainsi définie, c'est une grandeur globale, caractéristique de l'échantillon entier.

Si le corps poreux considéré est de grandes dimensions, il est nécessaire pour le décrire de façon plus détaillée, de définir une porosité locale en chaque point. Celle-ci pourra être par exemple la

porosité de la partie du corps poreux intérieure à une petite sphère de rayon r , centrée sur le point considéré.

Cette définition a un caractère arbitraire évident : la porosité locale en un point dépend du rayon r de la sphère choisie, et peut varier comme l'indique la figure 1 : si le rayon r est supérieur à une certaine valeur r_B , la valeur est influencée par des zones lointaines et ne convient pas vraiment pour définir une porosité locale ; si au contraire r est inférieur à r_A , la sphère considérée n'est pas assez grande pour permettre à un effet de moyenne de jouer, et la porosité locale ainsi définie est sujette à d'importantes fluctuations. Elle tend d'ailleurs, lorsque r tend vers 0, vers 1 ou 0 suivant que le point considéré est situé dans un vide ou dans le solide. Pour certains types de milieux poreux, il peut exister une plage $r_A < r < r_B$ où la porosité locale, définie comme porosité dans la sphère de rayon r , présente une stabilité relative. Si c'est le cas, il est avantageux d'imposer au rayon r choisi d'être compris dans cet intervalle.

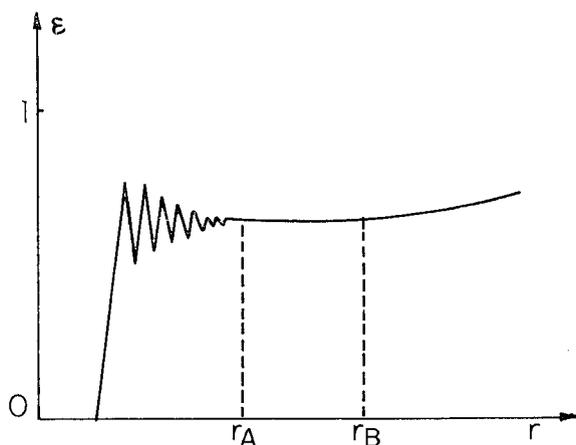


FIG. 1.

Mais on peut rencontrer des milieux pour lesquels cette plage $r_A < r < r_B$ n'existe pas. Ou encore, on peut rencontrer des milieux pour lesquels il existe plusieurs plages de stabilité de la définition de la porosité : la figure 2 représente la porosité dans une sphère de rayon r , centrée sur un point fixe

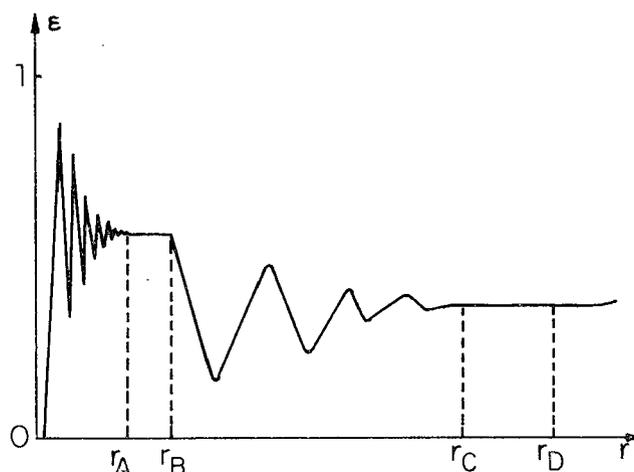


FIG. 2.

en fonction de r , pour un milieu comportant un empilement de strates qui se répètent approximativement périodiquement : le premier palier $r_A < r < r_B$ permet de définir une porosité locale qui convient pour une description fine du milieu, préservant son aspect stratifié ; le second palier $r_C < r < r_D$, obtenu pour une valeur de r assez grande auprès de l'épaisseur des strates, fournit une définition de la porosité qui convient si l'on se contente d'une description plus grossière du milieu, à une échelle nettement supérieure à l'épaisseur des strates. Bien que plus grossière, cette description peut être suffisante, tout en étant beaucoup plus maniable que la description fine.

D'autres inconvénients de cette définition sont bien évidents : pourquoi choisir une sphère, plutôt qu'un parallélépipède ou un ellipsoïde ? d'autre part, la porosité locale ainsi définie n'est qu'une fonction différentiable que si le diamètre de la sphère est infiniment grand auprès des « dimensions des pores » (notion elle-même imprécise). Pour toutes ces raisons, il est souhaitable de revenir sur cette définition des grandeurs macroscopiques locales, et de la modifier afin de lever, autant que possible, ces objections.

2. ESSAI DE DÉFINITION RIGoureuse DES GRANDEURS MACROSCOPIQUES LOCALES

2.1. Les grandeurs macroscopiques en tant que moyennes dans l'espace.

Soit $a(\vec{x})$ une grandeur « microscopique », définie à l'échelle des pores, en tout point \vec{x} du milieu. Cette grandeur pourra être scalaire : dans l'exemple du paragraphe précédent, cette grandeur est la fonction caractéristique des pores, égale à 1 si le point \vec{x} est dans un vide et à 0 si \vec{x} est dans le solide. Elle peut aussi être vectorielle (c'est le cas par exemple du flux de matière) ou même tensorielle.

Soit $m(\vec{x})$ une fonction de pondération, supposée intégrable et telle que son intégrale, étendue à tout l'espace, soit 1 :

$$\int m(\vec{x}) dx = 1 \quad [2.1]$$

Il sera commode dans la suite de supposer la fonction $m(\vec{x})$ à support borné. Cela n'est cependant pas nécessaire si le milieu poreux lui-même est borné, car alors $a(\vec{x})$ est identiquement nul en dehors d'un domaine borné, de sorte que les intégrales qui seront rencontrées dans la suite, en principe étendues à tout l'espace, sont en fait étendues au seul volume effectivement occupé par le milieu poreux.

Par définition, la grandeur macroscopique locale $a_m(\vec{x})$, relative à la grandeur microscopique $a(\vec{x})$ et à la fonction de pondération $m(\vec{x})$, sera :

$$a_m(\vec{x}) = \int a(\vec{x} + \vec{x}') m(\vec{x}') dx' \quad [2.2]$$

Cette définition a été tout d'abord introduite [G. MATHERON, 1, (5)] pour une application un peu différente, l'échantillonnage d'une grandeur physique.

La définition du paragraphe 1.3 est un cas particulier de la présente définition : il suffit en effet de choisir pour fonction $m(\vec{x})$:

$$m(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi r^3} & \text{pour } |\vec{x}| \leq r \\ 0 & \text{pour } |\vec{x}| > r \end{cases} \quad [2.3]$$

Il est utile de généraliser cette définition au cas où la grandeur microscopique $a(\vec{x})$ est, non plus une fonction, mais une distribution. Les distributions sont en effet souvent mieux adaptées que les fonctions à la description de grandeurs physiques réparties dans l'espace. C'est particulièrement le cas si a doit représenter une grandeur qui n'est définie que sur une surface, par exemple une densité superficielle de matière adsorbée sur l'interface fluide-solide du milieu poreux. La généralisation évidente de la définition [2.2] fait intervenir le produit de convolution (noté $*$) :

$$a_m = a * \overset{v}{m} \quad [2.4]$$

où l'on a posé :

$$\overset{v}{m}(\vec{x}) = m(-\vec{x}) \quad [2.5]$$

La grandeur a_m n'est autre que la régularisée de la distribution a par la fonction $\overset{v}{m}(\vec{x})$ [SCHWARTZ, (6)].

Montrons comment la définition [2.4] est applicable à une grandeur microscopique relative à l'interface fluide-solide, par exemple une densité superficielle de matière adsorbée. Si α est cette densité superficielle (fonction définie seulement sur l'interface), on est amené à représenter mathématiquement cette grandeur par la distribution :

$$a = \alpha \delta_{fs}$$

δ_{fs} étant la distribution de Dirac sur l'interface fluide-solide. La grandeur macroscopique a_m est toujours définie par [2.4] :

$$a_m = a * \overset{v}{m} = \alpha \delta_{fs} * \overset{v}{m} = \int \int_{\vec{x} + \vec{x}' \in \Sigma_{fs}} \alpha(\vec{x} + \vec{x}') m(\vec{x}') dS$$

l'intégrale étant étendue à l'interface fluide-solide Σ_{fs} .

Il est souvent avantageux d'imposer à la fonction de pondération $m(\vec{x})$ d'être continue et indéfiniment dérivable : l'exemple classique d'une fonction à support borné ayant ces propriétés est :

$$m_r(\vec{x}) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{r}{r^2 - x^2}\right) & \text{si } |x| < r \\ 0 & \text{si } |x| > r \end{cases} \quad [2.6]$$

le coefficient C étant choisi afin de satisfaire la condition [2.1].

Dans ces conditions, la grandeur macroscopique a_m est aussi une fonction continue et indéfiniment dérivable, même si la grandeur microscopique correspondante a ne possède pas ces propriétés.

Dans de nombreux cas les grandeurs macroscopiques peuvent être représentées par des distributions tempérées [SCHWARTZ (6)]. Il n'est plus nécessaire alors d'imposer à la fonction de pondération utilisée pour définir les grandeurs microscopiques correspondantes d'être à support borné : une décroissance suffisamment rapide à l'infini suffit (fonction tempérée). On peut dans ce cas choisir par exemple pour fonction de pondération :

$$m_\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma^3 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\vec{x}^2}{2\sigma^2}} \quad [2.7]$$

(m_σ n'est autre que la loi « normale » du calcul des probabilités pour l'espace à trois dimensions, d'écart-type σ).

Ce qui précède donne une définition précise de la notion de grandeur macroscopique, mais laisse subsister une grande liberté dans le choix de la fonction de pondération $m(\vec{x})$. Ceci paraît inévitable, car le choix de la fonction $m(\vec{x})$ dépend au fond du degré de finesse qu'on désire conserver dans la description macroscopique : plus la fonction $m(\vec{x})$ est à décroissance rapide en fonction de \vec{x} , et plus la description macroscopique est détaillée. Une autre définition des grandeurs macroscopiques, donnée dans le paragraphe suivant, va nous permettre de voir un nouvel aspect du caractère arbitraire du choix que l'on doit faire pour construire une description macroscopique.

2.2. Les grandeurs macroscopiques en tant qu'espérances mathématiques.

La notion de grandeur macroscopique locale se rencontre dans de nombreuses branches de la physique, et notamment en mécanique statistique : un fluide est considéré comme un ensemble de particules, et sa densité locale en un point peut être définie comme le nombre de particules contenues dans un petit élément de volume entourant ce point. Cet élément de volume doit être assez petit auprès des dimensions d'ensemble du système, et cependant assez grand pour contenir un grand nombre de molécules.

Or un autre point de vue, dû à W. GIBBS, est souvent utilisé en mécanique statistique : il consiste à définir les grandeurs macroscopiques comme des moyennes prises, non dans l'espace, mais sur l'ensemble de tous les systèmes « macroscopiquement identiques ». Cette notion de systèmes macroscopiquement identiques peut être définie de façon précise dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique : dans le cas d'un gaz par exemple, ce sont toutes les configurations possibles que peut prendre un ensemble de molécules contenues dans un volume donné et se partageant une énergie globale donnée.

Il serait extrêmement désirable d'introduire la même notion pour la description des milieux poreux car la prise de moyennes sur un ensemble de milieux différents permet l'introduction directe et logique de notions statistiques. Une grandeur microscopique $a(\vec{x})$ apparaît, de ce point de vue, comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire, et la grandeur macroscopique correspondante n'est autre que l'espérance mathématique de cette fonction aléatoire. Malheureusement, la donnée physique dont nous disposons est un milieu poreux unique, et non une infinité de milieux poreux formant un ensemble à partir duquel pourrait être construite cette fonction aléatoire. Rien ne nous permet, à partir d'une réalisation d'une fonction aléatoire, de remonter à la fonction aléatoire elle-même puis à son espérance mathématique. Cette difficulté, rencontrée dans l'étude d'un objet naturel (que ce soit un milieu poreux ou un gisement minier) a été souvent soulignée [notamment MATHERON, 1, (5)]. La théorie des fonctions aléatoires a été également employée pour décrire les écoulements dans les milieux poreux, à une échelle supérieure à celle qui nous intéresse ici [SCHWYDLER (7)] (il s'agit de milieux hétérogènes, et les grandeurs microscopiques sont dans ce cas la porosité et la perméabilité locales, tandis que les grandeurs macroscopiques correspondantes intéressent un gisement d'hydrocarbures dans son ensemble). Cet auteur justifie l'emploi de notions statistiques en faisant remarquer que si la structure du milieu est parfaitement déterminée et nullement aléatoire, la connaissance que nous en avons est nécessairement incomplète, et les prévisions que nous pouvons faire sont donc aléatoires. Cet argument ne paraît pas très convainquant, et on doit considérer l'introduction de notions statistiques comme une hypothèse de travail, qu'il faut juger d'après la qualité des résultats qu'elle permet d'obtenir.

Il est utile de remarquer que la définition des grandeurs macroscopiques comme des moyennes dans l'espace, pondérées par une fonction $m(\vec{x})$, n'est qu'un cas particulier de la définition de ces grandeurs comme espérances mathématiques : soit en effet un milieu poreux déterminé, et considérons la famille de tous les milieux déduits de celui-ci par translation selon un vecteur \vec{x}' .

Attribuons à chacun de ces milieux translétés une densité de probabilité $m(\vec{x})$. Si $a(\vec{x})$ est une grandeur microscopique, définissons la fonction aléatoire dont les réalisations possibles sont les $a(\vec{x} + \vec{x}')$ avec la densité de probabilité $m(\vec{x})$. L'espérance mathématique de cette fonction aléatoire est manifestement :

$$a_m(\vec{x}) = a * m$$

et cette définition coïncide avec [2.4].

2.3. Cas d'un milieu et d'un phénomène macroscopiquement stationnaires dans l'espace.

Ceci nous amène à considérer le cas d'un milieu poreux indéfini, qui est le siège d'un phénomène tel que l'écoulement d'un fluide incompressible, décrit par une grandeur microscopique $a(\vec{x})$ (par exemple la vitesse du fluide). Dans de nombreuses applications, les informations disponibles laissent supposer que les propriétés macroscopiques du milieu et du phénomène qui s'y déroule sont identiques dans toute l'étendue du milieu : on dit alors que le milieu est macroscopiquement homogène et le phénomène macroscopiquement stationnaire dans l'espace. Ces deux notions n'ont pour le moment qu'une signification intuitive : on doit les considérer comme des hypothèses de travail concernant le milieu et le phénomène considérés, dont la signification précise apparaîtra dans la description mathématique qu'elles permettront de donner, et notamment dans la définition des grandeurs macroscopiques.

Il est alors naturel d'introduire la famille des translétés du milieu (avec le phénomène qui s'y déroule) par tous les vecteurs \vec{x}' , et d'attribuer à chacun d'eux la même densité de probabilité. Ainsi la seule réalisation $a(\vec{x})$ permet de définir une fonction aléatoire dont les réalisations possibles sont $a(\vec{x} + \vec{x}')$, avec une densité de probabilité égale pour toutes. La grandeur macroscopique correspondante a_m , définie comme l'espérance mathématique de cette fonction, est dès lors bien déterminée (le symbole E désigne l'espérance mathématique) :

$$a_m(\vec{x}) = E [a(\vec{x})] \quad [2.8]$$

La fonction aléatoire introduite est, visiblement, par construction ergodique et stationnaire : $a_m(x)$ est donc indépendante de x .

Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante [G. MATHERON, 2 (5)] : un milieu poreux sera dit macroscopiquement homogène, et le phénomène qui s'y déroule macroscopiquement stationnaire dans l'espace, s'il est possible de considérer la grandeur microscopique $a(\vec{x})$ qui décrit ce phénomène comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire.

Il est utile de remarquer que la définition [2.8] des grandeurs macroscopiques peut être considérée comme un cas limite de la définition de ces grandeurs comme moyennes spatiales, du type [2.4]. Considérons en effet une famille de fonctions de pondération de la forme [2.6], $m_r(x)$. Elles permettent de définir les grandeurs macroscopiques :

$$a_{m_r}(\vec{x}) = a(\vec{x}) * m_r$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$, a_{m_r} va tendre vers a_m , en raison de l'ergodicité de la fonction aléatoire. Cette convergence serait d'ailleurs observée pour des familles de fonction de pondération autres que celles de la forme [2.6] : il suffit que ces fonctions réalisent une prise de moyenne pondérée dans un volume qui augmente indéfiniment. Les fonctions de pondération [2.3] ou [2.7], par exemple, conviennent

aussi bien. Il faut cependant remarquer que ces fonctions de pondération doivent être choisies indépendamment de la structure du milieu poreux considéré : il est évident que si l'on choisissait des fonctions de pondération non nulles seulement dans les parties solides du milieu, les valeurs macroscopiques qu'elles attribueraient à toute grandeur relative à la phase fluide seraient toujours identiquement nulles.

2.4. Cas d'un milieu et d'un phénomène macroscopiquement localement stationnaire dans l'espace.

Les milieux qui peuvent en toute rigueur être considérés comme macroscopiquement stationnaires dans l'espace sont bien entendu une vue de l'esprit, ne serait-ce que parce qu'aucun milieu n'est indéfini. Nous serons donc amenés à nous contenter d'une stationnarité approximative, à l'intérieur d'un certain domaine. Quelques exemples vont préciser cette notion.

Considérons un milieu poreux hétérogène, dont l'échelle d'hétérogénéité est grande auprès des dimensions des pores. Cela signifie qu'on peut distinguer des zones de dimensions assez grandes auprès des dimensions des pores dans lesquelles le milieu peut être considéré comme macroscopiquement homogène en première approximation.

De même, considérons l'écoulement d'un fluide dans ce milieu. Il peut arriver que dans une zone d'étendue limitée, l'écoulement de ce fluide puisse être considéré comme macroscopiquement uniforme. Ceci nécessite plusieurs conditions, et notamment, dans la zone considérée :

- le milieu doit être macroscopiquement homogène en première approximation ;
- les variations de masse volumique du fluide doivent être assez faibles, sans quoi l'écoulement ne saurait être macroscopiquement uniforme ;
- la direction moyenne de l'écoulement doit être invariable en première approximation.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment l'hypothèse d'un phénomène macroscopiquement stationnaire dans l'espace permet de s'affranchir du caractère arbitraire du choix d'une fonction de pondération (ou, si l'on préfère raisonner en termes de fonction aléatoire, comment cette hypothèse permet de définir sans ambiguïté la fonction aléatoire dont le phénomène considéré est une réalisation). L'intérêt de la notion de stationnarité locale approximative est qu'elle permet également de s'affranchir de ce caractère arbitraire. L'exemple simple de la porosité va le montrer.

Au paragraphe 1.3 nous avons défini la porosité locale comme la porosité de l'élément de volume de milieu poreux contenu dans une sphère de rayon r centrée sur le point considéré. Nous avons vu comment variait la porosité locale lorsque varie le rayon r de cette sphère (fig. 1). Lorsqu'il existe une plage de valeurs de r ($r_A < r < r_B$) dans laquelle la définition de la porosité correspondante varie peu, on dira que le milieu est, pour la porosité, approximativement stationnaire, dans l'espace, à l'échelle macroscopique définie par le rayon r_A , et localement dans une zone d'extension définie par le rayon r_B . Ainsi la définition de la porosité macroscopique locale ne dépend plus aussi étroitement du choix de la fonction de pondération, puisque toute fonction de pondération approximativement égale à 1 pour $x \leq r_A$, décroissant de façon quelconque pour $r_A < x < r_B$ et approximativement nulle pour $x > r_B$ donnera sensiblement le même résultat.

2.5. Remarque concernant le rôle du temps.

Les phénomènes que nous aurons à considérer se déroulent de façon continue au cours du temps. C'est pourquoi il n'a pas été nécessaire dans la définition des grandeurs macroscopiques, de faire intervenir une prise de moyenne dans un intervalle de temps entourant l'instant considéré. Les grandeurs macroscopiques ont donc été définies comme moyennes spatiales ou comme espérances mathématiques des grandeurs microscopiques correspondantes, prises à un instant considéré, et le temps apparaît simplement comme un paramètre.

Il peut être avantageux, dans certains cas, de considérer les grandeurs microscopiques comme des fonctions (ou des distributions) des quatre variables x, y, z, t , et de définir les grandeurs macroscopiques comme des moyennes prises, non seulement dans l'espace, mais dans un intervalle de temps autour de l'instant considéré. Cela est même indispensable dans certains problèmes tels que l'écoulement turbulent, où les grandeurs microscopiques présentent au cours du temps de rapides fluctuations. Soit alors $m(x, t)$ une fonction de pondération vérifiant :

$$\int m(x, t) dx dt = 1 \quad [2.9]$$

La grandeur macroscopique a_m sera définie par :

$$a_m = \int a(x + x', t + t') m(x', t') dx' dt' \quad [2.10]$$

ou avec les notations des distributions :

$$a_m = a * \overset{\vee}{m} \quad [2.11]$$

a et m dépendant des 4 variables x et t . Nous avons posé :

$$\overset{\vee}{m}(x, t) = m(-x, -t) \quad [2.12]$$

Remarquons que la définition des grandeurs macroscopiques comme moyennes spatiales donnée au paragraphe 2.1 peut être considérée comme un cas limite de la présente définition : prenons pour $m(x, t)$ non plus une fonction, mais une distribution de la forme :

$$m(x, t) = m(x) \otimes \delta_t \quad [2.13]$$

\otimes désignant le produit tensoriel des distributions, δ_t la distribution de Dirac à une variable, t . On a alors évidemment :

$$a_m = a(\vec{x}, t) * \overset{\vee}{m}(\vec{x}, t) = a(\vec{x}, t) * \overset{\vee}{m}(\vec{x})$$

en accord avec la définition [2.4].

On peut évidemment faire des remarques analogues concernant la définition des grandeurs macroscopiques comme espérances mathématiques : une grandeur macroscopique $a(\vec{x}, t)$ peut être considérée comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire des quatre variables x et t , au lieu d'être considérée, pour t fixé, comme fonction de \vec{x} seul, comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire de \vec{x} .

3. LA DÉRIVATION DES GRANDEURS MACROSCOPIQUES

Les lois qui régissent les phénomènes à l'échelle microscopique dans les milieux poreux sont généralement décrites mathématiquement par des équations aux dérivées partielles (telles que les équations de Navier par exemple). Lorsque nous chercherons à établir des lois macroscopiques, nous serons amenés à utiliser des relations entre les dérivées des grandeurs macroscopiques et celles des grandeurs microscopiques correspondantes. Nous allons les établir ici.

Afin d'obtenir simultanément les règles de dérivation par rapport aux variables d'espace et au temps, nous utiliserons la définition [2.11] des grandeurs macroscopiques. Nous remplacerons ensuite $m(\vec{x}, t)$ par une expression de forme [2.13] afin de nous ramener à la définition plus courante [2.4].

Différentions la relation [2.11] :

$$\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} + \frac{\partial a_m}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{x}} * \vec{m} \right) \cdot d\vec{x} + \left(\frac{\partial a}{\partial t} * \vec{m} \right) dt$$

d'où les relations entre dérivées des grandeurs macroscopiques et microscopiques :

$$\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial a}{\partial \vec{x}} * \vec{m} \quad [3.1]$$

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} * m \quad [3.2]$$

Mais il importe de remarquer [C. MARLE (4)] que les dérivées des grandeurs microscopiques qui interviennent dans les formules [3.1] et [3.2] doivent être prises au sens des distributions, et non au sens ordinaire.

Si la grandeur microscopique $a(\vec{x}, t)$ est une fonction continue des variables \vec{x} et t , ses dérivées au sens des distributions coïncident avec ses dérivées ordinaires, et les dérivées de la grandeur macroscopique a_m sont tout simplement les grandeurs macroscopiques correspondant aux dérivées ordinaires de $a(\vec{x}, t)$. Autrement dit, dans ce cas particulier, les opérations de passage du niveau microscopique au niveau macroscopique et de dérivation commutent.

Mais très souvent les grandeurs microscopiques qui caractérisent un phénomène en milieu poreux ne sont pas des fonctions continues de \vec{x} et de t : il suffit, pour s'en convaincre, de considérer une grandeur quelconque relative à la phase fluide, non nulle dans le fluide et identiquement nulle dans le solide. Une telle grandeur est généralement discontinue sur la surface Σ_{fs} qui sépare le fluide du solide. La plus simple de ces grandeurs est la fonction caractéristique de la phase fluide, égale à 1 dans le fluide et nulle dans le solide. Dans un tel cas il faut prendre soin, en appliquant les formules [3.1] et [3.2], de dériver la grandeur a au sens des distributions.

A titre d'exemple nous allons expliciter les formules [3.1] et [3.2] dans le cas où la grandeur $a(\vec{x}, t)$ est relative à la phase fluide, continuellement différentiable dans cette phase, discontinue sur la surface Σ_{fs} et identiquement nulle dans le solide. Les formules classiques de dérivation des distributions [L. SCHWARTZ (6)] s'écrivent :

$$\frac{\partial a}{\partial \vec{x}} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial \vec{x}} \right\} + [a] \cos \theta_n \delta_{f,s,t} \quad [3.3]$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} \right\} + [a] \cos \theta_t \delta_{f,s,t} \quad [3.4]$$

les quantités entre accolades désignent les dérivées de $a(\vec{x}, t)$ au sens usuel, définies partout sauf sur la surface Σ_{fs} ; $[a]$ est la discontinuité de a sur l'interface, traversée dans le sens du vecteur normal unitaire \vec{n}_t ; ce vecteur \vec{n}_t est, en fait, un vecteur à quatre dimensions puisque nous considérons ici Σ_{fs}

comme une hypersurface dans l'espace-temps (\vec{x}, t) , c'est-à-dire comme l'ensemble des positions successives de Σ_{fs} au cours du temps ; les composantes de \vec{n}_t sont :

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{n_x}{\sqrt{1 + (\vec{V} \cdot \vec{n})^2}} \\ \cos \theta_y &= \frac{n_y}{\sqrt{1 + (\vec{V} \cdot \vec{n})^2}} \\ \cos \theta_z &= \frac{n_z}{\sqrt{1 + (\vec{V} \cdot \vec{n})^2}} \\ \cos \theta_t &= \frac{-\vec{n} \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 + (\vec{V} \cdot \vec{n})^2}} \end{aligned} \quad [3.5]$$

\vec{V} (composantes V_x, V_y, V_z) étant la vitesse de l'interface ;
 \vec{n} (composantes n_x, n_y, n_z) le vecteur unitaire (à trois dimensions) normal à la surface Σ_{fs} considérée à un instant donné, comme surface de l'espace à trois dimensions. \vec{n} est toujours, par convention, orienté vers le fluide ; par conséquent :

$$[a] = a_{fluide} - a_{solide} = a_{fluide} \quad [3.6]$$

$\delta_{fs,t}$ est la distribution de Dirac, dans l'espace-temps (x, t) , sur l'hypersurface Σ_{fs} .

Faisons le produit de convolution des expressions [3.3] et [3.4] par une distribution $\overset{v}{m}$ (à quatre dimensions) de la forme [2.13] :

$$\overset{v}{m} = \overset{v}{m}(x) \otimes \delta_t$$

On a manifestement :

$$\delta_{fs,t} * (\overset{v}{m}(x) \otimes \delta_t) = \sqrt{1 + (\vec{V} \cdot \vec{n})^2} \delta_{fs} * m(x) \quad [3.7]$$

δ_{fs} étant maintenant la distribution de Dirac de l'espace à trois dimensions sur la surface Σ_{fs} .

Nous obtenons donc :

$$\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) + [a] \vec{n} \delta_{fs} * \overset{v}{m}(x) \quad [3.8]$$

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) - [a] \vec{n} \cdot \vec{V} \delta_{fs} * m(x) \quad [3.9]$$

Telles sont les expressions des dérivées d'une grandeur macroscopique correspondant à une grandeur microscopique relative à la phase fluide.

Dans le cas d'un milieu poreux immobile et indéformable, la formule [3.9] se simplifie car la vitesse \vec{V} est nulle : les opérations de passage du niveau microscopique au niveau macroscopique et de dérivation par rapport au temps commutent :

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} * \overset{v}{m} \quad [3.10]$$

A l'usage des lecteurs non familiarisés avec la dérivation des distributions, nous donnons dans l'annexe 1 une démonstration élémentaire des formules [3.8] et [3.9].

On établit sans difficulté des formules analogues, pour les grandeurs relatives à la phase solide, ou même pour les grandeurs qui ne sont définies que sur l'interface fluide-solide (telles que la densité superficielle de matière adsorbée par exemple).

Tous les résultats qui précèdent peuvent être retrouvés également si la grandeur macroscopique est définie comme espérance mathématique. On a en effet :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[E(a(\vec{x}, t)) \right] = E \left[\frac{\partial a}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, t) \right] \quad [3.11]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[E(a(\vec{x}, t)) \right] = E \left[\frac{\partial a}{\partial t}(\vec{x}, t) \right] \quad [3.12]$$

le symbole E représentant l'espérance mathématique, et les dérivées qui figurent dans ces formules devant être prises au sens des distributions.

4. GRANDEURS ADDITIVES ET NON ADDITIVES

Nous avons vu, dans ce qui précède, comment définir une grandeur macroscopique a_m à partir d'une grandeur microscopique a . Nous ne nous sommes pas préoccupés jusqu'à présent de la signification physique de la grandeur a .

Parmi les grandeurs physiques rencontrées en pratique, certaines sont dites « additives » ou « extensives » : on dit qu'une grandeur a est additive si l'intégrale de a dans un volume quelconque V a une signification physique. Ainsi si a est la masse volumique, son intégrale dans le volume V est la masse de fluide contenue dans ce volume ; la masse volumique est donc une grandeur additive. Par contre, si a est la température, son intégrale dans un certain volume n'a aucune signification physique précise : la température n'est pas une grandeur additive.

Il est évident que la notion de grandeur additive est liée à la forme des équations qui régissent l'évolution du milieu : ainsi l'équation de continuité par exemple :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

peut se mettre sous forme d'une équation intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx + \int_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

V étant un volume fixe, Σ la surface limitant ce volume.

C'est parce que l'équation de continuité peut se mettre sous cette forme, où intervient l'intégrale de ρ dans le volume V , que la masse volumique doit être considérée comme une grandeur additive.

Lors du passage du niveau microscopique au niveau macroscopique, il est avantageux d'introduire des grandeurs macroscopiques ayant une signification physique, accessibles à l'expérience. Si ces grandeurs sont définies comme des moyennes pondérées dans l'espace [formule 2.4] :

$$a_m = a * m$$

il est désirable d'appliquer cette définition seulement aux grandeurs microscopiques a qui sont additives.

En effet, l'intégrale de a_m dans tout l'espace, ou même simplement dans un volume V grand auprès du support de \vec{m} , sera égale à l'intégrale de a dans le même volume :

$$\int_V a_m(\vec{x}) dx = \int_V a(\vec{x}) dx$$

compte tenu de [2.1]. Cette intégrale aura donc un sens physique parfaitement clair, elle sera accessible à l'expérience.

Si par contre la grandeur a n'est pas additive, on peut bien entendu toujours définir une grandeur macroscopique a_m grâce à l'expression [2.4] mais a_m n'a en général aucun intérêt, car elle ne correspond à rien de physique. L'exemple simple suivant va illustrer ce fait : prenons pour grandeur microscopique la vitesse u du fluide. Ce n'est pas une grandeur additive, mais $\rho \vec{u}$ en est une : la densité d'impulsion. On peut donc définir valablement la grandeur macroscopique :

$$(\rho \vec{u}) * \vec{m}$$

qui sera la densité d'impulsion macroscopique. Il est alors naturel de définir la vitesse macroscopique par :

$$\vec{u}_m = \frac{(\rho \vec{u}) * \vec{m}}{\rho_m} = \frac{(\rho \vec{u}) * \vec{m}}{\rho * \vec{m}} \quad [4.1]$$

car ainsi définie, \vec{u}_m a une signification physique parfaitement claire. Il aurait été beaucoup moins avantageux de définir \vec{u}_m par :

$$u_m = \vec{u} * \vec{m}$$

5. RELATIONS ENTRE GRANDEURS MACROSCOPIQUES

En thermodynamique classique, toutes les grandeurs thermodynamiques d'un fluide simple peuvent être déduites lorsqu'on connaît une seule relation qui lie trois grandeurs additives indépendantes : c'est la relation fondamentale. Ainsi, lorsqu'on connaît l'énergie interne E , en fonction de l'entropie S et du volume V :

$$E = E(S, V)$$

la pression, la température se déduisent par les formules :

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_s \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_v$$

Toutes les autres grandeurs thermodynamiques pourraient s'exprimer de même, au moyen de E , S , V et des dérivées partielles de E .

Le cas d'un corps thermodynamique plus complexe (par exemple un fluide de composition variable) peut de même être traité grâce à une relation fondamentale comportant un plus grand nombre de variables.

La relation fondamentale est homogène de degré 1, puisque les grandeurs qu'elle lie sont additives. En l'écrivant pour une masse de fluide unité :

$$e = e \left(s, \frac{1}{\rho} \right) \quad [5.1]$$

e est l'énergie interne spécifique, s l'entropie spécifique et ρ la masse volumique. On a cette fois :

$$p = - \left(\frac{\partial e}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right)_s \quad T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad [5.2]$$

Nous venons de voir comment, par prise de moyenne pondérée, une grandeur macroscopique peut être associée à chaque grandeur microscopique additive. Nous définissons ainsi :

$$\rho_m = \rho * m^v \quad [5.3]$$

$$e_m = \frac{(\rho e) * m^v}{\rho_m} \quad [5.4]$$

$$s_m = \frac{(\rho s) * m^v}{\rho_m} \quad [5.5]$$

(ces deux dernières définitions sont introduites pour la même raison que [4.1]).

Une première remarque s'impose : s'il s'agit de grandeurs relatives à la phase fluide, par conséquent nulles dans le solide, la formule [5.3] définit une masse volumique macroscopique qui ne coïncide pas avec la grandeur microscopique correspondante, même si l'état du fluide est rigoureusement uniforme dans tout le volume poreux. Cela nous conduit à définir la grandeur :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f * m^v \quad [5.6]$$

appelée porosité (ε_f est la fonction égale à 1 dans le fluide et 0 dans le solide). Nous définissons alors :

$$\rho'_m = \frac{\rho_m}{\varepsilon_m} \quad [5.7]$$

qui cette fois a le mérite de coïncider avec ρ si l'état du fluide est uniforme.

Beaucoup plus importante est la remarque suivante : rien ne permet de dire s'il existe entre e_m , s_m et ρ'_m une relation de la forme [5.1]. En effet, e_m peut très bien avoir deux valeurs différentes pour deux distributions du fluide dans les pores, non uniformes, mais pour lesquelles s_m et ρ'_m ont exactement la même valeur. En toute rigueur il n'existe donc plus de relation fondamentale entre grandeurs macroscopiques et par conséquent il n'est plus possible de définir rigoureusement, à cette échelle, les autres grandeurs thermodynamiques telles que pression macroscopique et température macroscopique.

Une circonstance analogue se rencontre dans la thermodynamique des phénomènes irréversibles. Considérons par exemple un gaz dilué. L'état de ce gaz peut être décrit par la donnée, en tout point, de la fonction de distribution des vitesses. A l'équilibre thermodynamique, cette fonction a une forme bien déterminée : c'est la fonction de distribution des vitesses de Maxwell f_M :

$$f_M = \rho \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp. \left\{ -\frac{m}{2kT} [(u_x - U_x)^2 + (u_y - U_y)^2 + (u_z - U_z)^2] \right\} \quad [5.8]$$

u_x, u_y, u_z sont les trois composantes de la vitesse des particules, k est la constante de Boltzmann, m la masse des particules.

La fonction f_M ne dépend que de cinq paramètres : la masse volumique, la température T et les trois composantes de la vitesse moyenne du gaz U_x, U_y, U_z .

Toutes les fonctions thermodynamiques du gaz pouvant être calculées à partir de la fonction de distribution des vitesses, il est évident qu'elles s'exprimeront au moyen de ces cinq quantités. Dans un repère par rapport auquel le fluide est macroscopiquement au repos, on peut faire abstraction de la vitesse moyenne \vec{U} et toutes les fonctions thermodynamiques s'expriment au moyen de deux d'entre elles, par exemple ρ et T . L'existence d'une relation fondamentale en découle.

Mais si le gaz n'est plus en équilibre thermodynamique la fonction de distribution des vitesses f n'est plus nécessairement de la forme [5.8] et les relations entre grandeurs thermodynamiques qui sont vraies à l'équilibre, n'existent en général plus. Par exemple, on a à l'équilibre la relation fondamentale :

$$s = \frac{3}{2} \frac{k}{m} \text{Log } e - \frac{k}{m} \text{Log } \rho + C^te \quad [5.9]$$

entre la masse volumique ρ , l'énergie interne spécifique e et l'entropie spécifique s . Ces grandeurs sont définies à partir de la fonction de distribution des vitesses par :

$$\begin{aligned} \rho &= m \int f \, du \\ \rho e &= \frac{m^2}{2} \int (u - U)^2 f \, du \\ \rho s &= -k \int f \text{Log } f \, du \end{aligned} \quad [5.10]$$

Hors de l'équilibre thermodynamique, on peut toujours définir ρ , e , et s par les formules [5.10], mais elles ne sont plus en général liées entre elles par la relation fondamentale [5.9].

De façon analogue, lorsqu'un fluide est au repos, en équilibre thermodynamique, à l'intérieur du milieu poreux, son état macroscopique est entièrement déterminé par la donnée des deux variables thermodynamiques fondamentales. Celles-ci conviennent pour le décrire aussi bien à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle microscopique, et toutes les autres variables thermodynamiques peuvent être évaluées à partir d'elles. Mais si le fluide n'est plus au repos, son état microscopique est décrit par la donnée des variables thermodynamiques en tout point intérieur aux pores. Les grandeurs macroscopiques seront des fonctionnelles de l'état microscopique (de même que dans les relations [5.10] ρ , e et s sont des fonctionnelles de la fonction de distribution des vitesses), qui n'ont plus nécessairement entre elles les mêmes relations que lorsque le fluide est au repos.

En thermodynamique des phénomènes irréversibles, on fait généralement l'hypothèse que le fluide peut toujours être décrit par la donnée, en chaque point, des cinq paramètres qui interviennent dans [5.8]. Cela revient à supposer que la fonction de distribution des vitesses est, en chaque point, peu différente d'une distribution de Maxwell, mais avec des paramètres dépendant du point considéré. Cela permet alors de décrire l'évolution du fluide par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir les grandeurs thermodynamiques habituelles, qui ont toujours entre elles les mêmes relations qu'à l'équilibre. Cette hypothèse est justifiée, pour les états de faible déséquilibre, par la résolution approchée de l'équation de Boltzmann vérifiée par la fonction f , lorsqu'on se contente des premières approximations.

De même, nous serons amenés dans la théorie des milieux poreux à admettre l'existence de relations entre grandeurs macroscopiques, identiques à celles vérifiées par ces grandeurs lorsque le fluide est au repos dans les pores du milieu. Cette hypothèse permettra de définir toutes les grandeurs thermodynamiques macroscopiques à partir d'une relation fondamentale de forme [5.1], d'utiliser des équations d'état, etc. Elle est justifiée si les conditions qui règnent à l'intérieur d'un élément de milieu poreux ne sont pas trop éloignées de conditions uniformes.

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE PUR DANS UN MILIEU POREUX INDÉFORMABLE

6. OBJET DE CETTE ÉTUDE

Les concepts généraux exposés dans la première partie peuvent servir à l'étude théorique de tous les phénomènes en milieu poreux. Nous allons, à titre d'exemple, les utiliser pour étudier l'écoulement d'un fluide pur à travers un milieu poreux indéformable. Nous excluons les phénomènes tels que diffusion, adsorption, réaction chimique (qui pourront faire l'objet de travaux ultérieurs). Le fluide sera supposé newtonien (certains des résultats établis sont d'ailleurs indépendants de cette hypothèse) et sa vitesse sera supposée nulle au contact des parois solides : les phénomènes de glissement aux parois et d'écoulement moléculaire libre, n'entrent donc pas dans le cadre de la présente étude.

Après l'établissement d'équations générales, nous particulariserons l'étude au cas de l'écoulement macroscopiquement uniforme, pratiquement isotherme, d'un fluide incompressible. Nous retrouverons ainsi théoriquement la loi de Darcy. Puis, grâce à une méthode de perturbations, nous obtiendrons le terme correctif qui apparaît dans cette loi lorsque l'écoulement n'est pas très lent.

Nous allons considérer ici l'écoulement d'un fluide contenant un seul constituant, dans un milieu poreux indéformable. Les phénomènes de diffusion, d'adsorption, de réaction chimique sont donc exclus. Le fluide sera supposé newtonien (certains résultats seront valables également pour les fluides non newtoniens), son comportement sera décrit par les équations de Navier-Stokes : les phénomènes de glissement aux parois et d'écoulement moléculaire libre sont donc exclus.

Le repère utilisé est orthonormé. Les indices i, j, \dots placés en position inférieure désignent les composantes ordinaires des vecteurs et tenseurs considérées. δ_{ij} désignent les composantes du tenseur de Kronecker (1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$). La convention d'Einstein (sommation par rapport à tout indice répété) sera systématiquement employée. ∂_i désigne la dérivée par rapport à x_i , ∂_t la dérivée par rapport au temps, $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulière :

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + u_i \partial_i \quad \text{si} \quad u_i \text{ est la vitesse}$$

7. LES ÉQUATIONS A L'ÉCHELLE MICROSCOPIQUE

Ce paragraphe est un rappel de notions bien connues (voir par exemple S. R. DE GROOT (1) concernant les équations régissant les phénomènes, séparément dans chacune des deux phases : fluide et solide.

7.1. Équations régissant le comportement de la phase fluide.

L'état de la phase fluide est localement déterminé par : le tenseur des contraintes, symétrique (6 composantes indépendantes) ; le vecteur vitesse (3 composantes) ; le vecteur flux de chaleur (3 composantes) ; enfin, deux variables thermodynamiques indépendantes (par exemple ρ_f , masse volumique et T , température). Soit, au total, 14 inconnues. Un nombre égal d'équations est nécessaire pour décrire l'évolution de cette phase. Ces équations sont : l'équation de continuité (1 équation), l'équation de bilan d'impulsion (3 équations), l'équation de bilan d'énergie (1 équation), enfin des relations, dites phénoménologiques, permettant d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction du champ de vitesses (6 équations) et le flux de chaleur en fonction du gradient de température (3 équations).

7.1.1. Équation de continuité.

Cette équation s'écrit, sous les deux formes équivalentes :

$$\partial_i \rho_f + \partial_i (\rho_f u_i) = 0 \quad [7.1]$$

$$\frac{d}{dt} \rho_f + \rho_f \partial_i u_i = 0 \quad [7.2]$$

ρ_f est la masse volumique du fluide, u_i sa vitesse (nulle dans le solide et sur l'interface fluide-solide).

7.1.2. Équations du bilan d'impulsion.

Ces équations, qui traduisent simplement les lois de la dynamique, peuvent se mettre sous diverses formes. Nous indiquerons simplement celle que nous aurons à utiliser :

$$\partial_i (\rho_f u_i) + \partial_j (\rho_f u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = \rho_f X_i \quad [7.3]$$

X_i est le vecteur représentant la force qui s'exerce à distance sur l'unité de masse (qui le plus souvent sera l'accélération de la pesanteur) ; $\tau_{ij} - p \delta_{ij}$ est le tenseur des contraintes dans le fluide : on le décompose en τ_{ij} , tenseur des contraintes de viscosité, et $-p \delta_{ij}$, pression isotrope.

Le tenseur $\rho_f u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}$ est appelé tenseur d'impulsion du milieu.

7.1.3. Équation du bilan d'énergie.

Cette équation n'est pas toujours indispensable : elle n'est nécessaire que si l'état du fluide dépend effectivement de deux variables thermodynamiques ; elle devient superflue, par exemple, si le fluide est pratiquement isotherme ; mais même dans un tel cas, il est intéressant de la former, pour son

contenu physique. Comme les équations du bilan d'impulsion, elle peut se mettre sous des formes diverses. Nous en indiquerons seulement deux, que nous aurons à utiliser :

$$\partial_t (\rho_f e_f) + \partial_i (\rho_f e_f u_i + Q_{fi}) = (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) \partial_i u_j \quad [7.4]$$

(e_f représente l'énergie interne spécifique, Q_{fi} le flux de chaleur dans le fluide).

Cette équation représente visiblement le bilan d'énergie interne d'un élément fluide. Si l'on utilise la relation :

$$de_f = -p d \left(\frac{I}{\rho_f} \right) + T ds_f \quad [7.5]$$

(s_f entropie spécifique T_f température), on peut la mettre sous une autre forme équivalente :

$$\partial_t (\rho_f s_f) + \partial_i \left(\frac{Q_{fi}}{T_f} + \rho_f s_f u_i \right) = \sigma_f \quad [7.6]$$

$$\sigma_f = Q_i \partial_i \left(\frac{I}{T_f} \right) + \frac{\tau_{ij}}{T_f} \partial_i u_j \quad [7.7]$$

C'est l'équation du bilan d'entropie. σ_f est la densité de source locale d'entropie dans le fluide. Le second principe de la thermodynamique impose :

$$\sigma_f \geq 0 \quad [7.8]$$

7.1.4. Relations phénoménologiques.

Ces relations expriment τ_{ij} et Q_{fi} au moyen des autres variables et de leurs dérivées. Contrairement aux précédentes, elles ne découlent pas des principes généraux de la mécanique ou de la thermodynamique. Leur origine est expérimentale, mais on peut cependant les justifier à partir de théories moléculaires des fluides (mécanique statistique).

Sous leur forme la plus simple, elles expriment que τ_{ij} et Q_{fi} sont des fonctions linéaires des gradients des autres variables. Le second principe, sous la forme [7.8], impose alors de sévères restrictions à la forme de ces relations (seuls peuvent intervenir les gradients de I/T et de u_j , avec des coefficients vérifiant certaines inégalités). Des considérations de symétrie spatiale imposent d'autres restrictions (principe de Curie) de sorte que les relations phénoménologiques s'écrivent finalement :

$$Q_{fi} = -K_f \delta_i T_f \quad [7.9]$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_k u_k \delta_{ij} + \mu (\delta_i u_j + \delta_j u_i) \quad [7.10]$$

Les coefficients K_f (conductibilité thermique du fluide) λ et μ (viscosités) peuvent être fonction de p_f et de T_f , mais non de leurs gradients. Ils doivent vérifier les inégalités :

$$K_f \geq 0 \quad ; \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0 \quad ; \quad \mu \geq 0 \quad [7.11]$$

Remarquons que si l'on porte l'expression [7.10] de τ_{ij} dans les équations du bilan d'impulsion [7.3], on obtient les équations du mouvement du fluide, qui se réduisent dans le cas où λ et μ sont des constantes, aux équations de Navier-Stokes.

7.2. Équations régissant le comportement de la phase solide.

Le solide étant supposé immobile et indéformable, les seules variables indépendantes seront la température T_s et le flux de chaleur Q_{si} . Les équations correspondantes sont l'équation du bilan d'énergie, et la relation phénoménologique.

7.2.1. Équation de bilan d'énergie.

Elle s'écrit simplement :

$$\delta_t (\rho_s e_s) + \delta_i Q_{si} = 0 \quad [7.12]$$

(la masse volumique du solide, ρ_s , est une constante, e_s est l'énergie interne spécifique).

Compte tenu de :

$$de_s = T_s ds_s \quad [7.13]$$

(s_s entropie spécifique, T_s température), on peut écrire cette équation sous la forme [7.14] représentant le bilan d'entropie :

$$\partial_t (\rho_s s_s) + \partial_i \left(\frac{Q_{si}}{T_s} \right) = \sigma_s \quad [7.14]$$

$$\sigma_s = Q_{si} \partial_i \left(\frac{1}{T_s} \right) \quad [7.15]$$

σ_s est la densité de source locale d'entropie dans le solide, qui d'après le second principe doit être ≥ 0 .

7.2.2. Relation phénoménologique.

Cette relation, qui traduit simplement la loi de conduction de la chaleur, s'écrit :

$$Q_{si} = -K_s \partial_i T_s \quad [7.16]$$

K_s étant la conductivité thermique du solide (que nous supposons scalaire pour simplifier). Le second principe impose :

$$K_s \geq 0 \quad [7.17]$$

8. PASSAGE DE L'ÉCHELLE MICROSCOPIQUE A L'ÉCHELLE MACROSCOPIQUE

Appliquons les règles données au paragraphe 2.

Soit $m(\vec{x})$ une fonction de pondération vérifiant [2.1] $\overset{\vee}{m}(\vec{x})$ désignera $m(-\vec{x})$ conformément à [2.5].

8.1. Équation de continuité macroscopique.

Faisons le produit de convolution par $\overset{\vee}{m}$ des deux membres de [7.1] (en considérant toutes les quantités relatives au fluide comme nulles à l'intérieur du solide). On a :

$$(\partial_t \rho_f) * \overset{\vee}{m} = \partial_t (\rho_f * \overset{\vee}{m})$$

car le milieu poreux est indéformable. De même :

$$[\partial_i (\rho_f u_i)] * \overset{v}{m} = \partial_i [(\rho_f u_i) * \overset{v}{m}]$$

car u_i , et par conséquent $\rho_f u_i$, sont nuls dans le solide et sur l'interface fluide-solide, donc sont continus dans tout l'espace.

L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\partial_t (\rho_f * \overset{v}{m}) + \partial_i [(\rho_f u_i) * \overset{v}{m}] = 0$$

Nous allons définir la masse volumique macroscopique et la vitesse macroscopique, afin de donner à cette équation la même forme que celle de l'équation de continuité d'un fluide continu : il suffit de poser :

$$\rho_{fm} = \rho_f * \overset{v}{m} \quad [8.1]$$

$$u_{mi} = \frac{(\rho_f u_i) * \overset{v}{m}}{\rho_{fm}} \quad [8.2]$$

L'équation de continuité macroscopique s'écrit alors :

$$\delta_t \rho_{fm} + \delta_i (\rho_{fm} u_{mi}) = 0 \quad [8.3]$$

Introduisons la porosité ε_m définie par [5.6] et posons :

$$\rho'_{fm} = \frac{\rho_{fm}}{\varepsilon_m} \quad [8.4]$$

qui est la masse volumique macroscopique du fluide, au sens usuel (ρ'_{fm} coïncide avec ρ_f si l'état du fluide est uniforme).

La vitesse macroscopique du fluide u_{mi} , coïncide avec la vitesse moyenne des particules fluides, telle qu'on peut la mesurer au moyen d'un traceur. On définit parfois une « vitesse de filtration » q_{mi} :

$$q_{mi} = \varepsilon_m u_{mi} \quad [8.5]$$

L'équation de continuité macroscopique [22] peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_m \delta_t \rho'_{fm} + \delta_i (\rho'_{fm} q_{mi}) = 0 \quad [8.6]$$

8.2. Équations de bilan d'impulsion macroscopiques.

Appliquons le même processus à l'équation [7.4]. Le milieu poreux étant indéformable, et compte tenu de [8.2] :

$$[\partial_i (\rho_f u_i)] * \overset{v}{m} = \partial_t (\rho_{fm} u_{mi})$$

u_i étant nul dans le solide, $\rho_f u_i u_j$ est continu dans tout l'espace, donc :

$$[\partial_j (\rho_f u_i u_j)] * \overset{v}{m} = \partial_j [(\rho_f u_i u_j) * \overset{v}{m}]$$

La force à distance X_i sera supposée assez lentement variable dans l'espace. C'est le cas de la pesanteur. On peut dans ce cas écrire :

$$[\rho_f X_i] * \overset{v}{m} = \rho_{fm} X_i$$

Pour les termes restants, nous utiliserons la formule [3.8] :

$$[\partial_j (p \delta_{ij} - \tau_{ij})] * \overset{v}{m} = \partial_j [(p \delta_{ij} - \tau_{ij}) * \overset{v}{m}] - [n_j (p \delta_{ij} - \tau_{ij}) \delta_{fs}] * \overset{v}{m}$$

(n_j sont les composantes du vecteur unitaire normal à l'interface, orienté vers le fluide).

Posons :

$$Y_i = [n_j (p \delta_{ij} - \tau_{ij}) \delta_{fs}] * \overset{v}{m} \quad [8.7]$$

Y_i est visiblement la force macroscopique de freinage que le solide exerce sur le fluide, par unité de volume de milieu poreux. Posons également :

$$p_m = p * \overset{v}{m} \quad [8.8]$$

$$\tau_{mij} = \tau_{ij} * \overset{v}{m} \quad [8.9]$$

D'autre part, on peut écrire, en vertu des définitions [8.1] et [8.2] :

$$(\rho_f u_i u_j) * \overset{v}{m} = [\rho_f (u_i - u_{mi}) (u_j - u_{mj})] * \overset{v}{m} + \rho_{fm} u_{mi} u_{mj} \quad [8.10]$$

Posons donc :

$$M_{ij} = - [\rho_f (u_i - u_{mi}) (u_j - u_{mj})] * \overset{v}{m} \quad [8.11]$$

Les équations de bilan d'impulsion macroscopiques s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{fm} u_{mi}) + \partial_j (\rho_{fm} u_{mi} u_{mj} + p_m \delta_{ij} - M_{ij} - \tau_{mij}) \\ = \rho_{fm} X_i + Y_i \end{aligned} \quad [8.12]$$

Elles ont même forme que les équations microscopiques correspondantes. Notons cependant que Y_i s'ajoute aux forces à distance et que M_{ij} s'ajoute au tenseur moyen des contraintes de viscosité.

Il est intéressant de noter l'analogie entre le tenseur M_{ij} , qui s'ajoute à la valeur moyenne du tenseur des contraintes de viscosités, et le tenseur de Reynolds introduit dans la théorie de la turbulence [KAMPÉ de FÉRIET (3)] : ce tenseur représente, comme dans la théorie de la turbulence, l'échange d'impulsion entre lignes de courant macroscopiques due aux fluctuations des vitesses microscopiques.

8.3. Équations de bilan d'énergie macroscopiques.

Appliquons encore le même processus aux équations [7.4] et [7.12]. Comme précédemment, nous avons, compte tenu des formules [3.8] et [3.9] :

$$[\partial_t (\rho_f e_f)] * \overset{v}{m} = \partial_t [(\rho_f e_f) * \overset{v}{m}]$$

$$[\partial_t (\rho_s e_s)] * \overset{v}{m} = \partial_t [(\rho_s e_s) * \overset{v}{m}]$$

$$[\partial_i (\rho_f e_f u_i)] * \overset{v}{m} = \partial_i [(\rho_f e_f u_i) * \overset{v}{m}]$$

$$[\partial_i Q_{fi}] * \dot{m} = \partial_i [Q_{fi} * \dot{m}] - [Q_{fi} n_i \delta_{fs}] * \dot{m}$$

$$[\partial_i Q_{si}] * \dot{m} = \partial_i [Q_{si} * \dot{m}] + [Q_{si} n_i \delta_{fs}] * \dot{m}$$

Posons donc :

$$e_{fm} = \frac{(\rho_f e_f) * \dot{m}}{\rho_{fm}} = \frac{(\rho_s e_s) * \dot{m}}{\rho_f * \dot{m}} \quad [8.13]$$

$$e_{sm} = \frac{(\rho_s e_s) * \dot{m}}{\rho_{sm}} = \frac{(\rho_s e_s) * \dot{m}}{\rho_s * \dot{m}} \quad [8.14]$$

$$E_i = (\rho_f e_f u_i) * \dot{m} \quad [8.15]$$

$$Q_{fmi} = Q_{fi} * \dot{m} \quad [8.16]$$

$$Q_{smi} = Q_{si} * \dot{m} \quad [8.17]$$

$$q_{fs} = -[Q_{si} n_i \delta_{fs}] * \dot{m} = -[Q_{fi} n_i \delta_{fs}] * \dot{m} \quad [8.18]$$

$$\zeta_{fm} = [(-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) \partial_i u_j] * \dot{m} \quad [8.19]$$

La seconde égalité [8.18] traduit le fait que la composante normale du flux de chaleur microscopique est continue à la traversée de l'interface fluide-solide, car il n'y a sur cette surface aucun phénomène (tel que réaction chimique ou adsorption) qui absorbe ou libère de la chaleur. Les équations de bilan d'énergie macroscopique s'écrivent simplement :

$$\delta_t (\rho_{fm} e_{fm}) + \delta_i (E_{fi} + Q_{fmi}) + q_{fs} = \zeta_{fm} \quad [8.20]$$

$$\delta_t (\rho_{sn} e_{sn}) + \delta_i Q_{smi} - q_{fs} = 0 \quad [8.21]$$

La signification physique des termes qui interviennent dans ces équations est claire : e_{fm} et e_{sm} sont les énergies internes spécifiques macroscopiques du fluide et du solide ; E_{fi} est le flux d'énergie de convection macroscopique dans le fluide, Q_{fmi} et Q_{smi} les flux de chaleur macroscopiques dans le fluide et dans le solide, q_{fs} la quantité de chaleur qui passe du fluide au solide par unité de temps et unité de volume de milieu poreux ; ζ_{fm} est l'énergie mécanique dépensée par les contraintes, dans le fluide, par unité de volume, qui apparaît sous forme d'énergie interne.

8.4. Équations du bilan d'entropie macroscopiques.

Partons maintenant des équations [7.6] et [7.14]. Posons :

$$s_{fm} = \frac{(\rho_f s_f) * \dot{m}}{\rho_{fm}} \quad [8.22]$$

$$s_{sm} = \frac{(\rho_s s_s) * \dot{m}}{\rho_{sm}} \quad [8.23]$$

$$Z_{fi} = (\rho_f s_f u_i) * \dot{m} \quad [8.24]$$

$$S_{fi} = \left(\frac{Q_{fi}}{T_f} \right) * \overset{v}{m} \quad [8.25]$$

$$S_{si} = \left(\frac{Q_{si}}{T_s} \right) * \overset{v}{m} \quad [8.26]$$

$$\eta_{fi} = - \left[n_i \frac{Q_{fi}}{T_f} \delta_{fs} \right] * \overset{v}{m} = - \left[n_i \frac{Q_{si}}{T_s} \right] * \overset{v}{m} \quad [8.27]$$

$$\sigma_{fm} = \sigma_f * \overset{v}{m} \quad [8.28]$$

$$\sigma_{sm} = \sigma_s * \overset{v}{m} \quad [8.29]$$

Les équations du bilan d'entropie macroscopiques s'écrivent alors :

$$\partial_t (\rho_{fm} s_{fm}) + \partial_i (S_{fi} + Z_{fi}) + \eta_{fs} = \sigma_{fm} \quad [8.30]$$

$$\partial_t (\rho_{sm} s_{sm}) + \partial_i S_{si} - \eta_{fs} = \sigma_{sm} \quad [8.31]$$

s_{fm} et s_{sm} sont les entropies spécifiques macroscopiques du fluide et du solide, S_{fi} et S_{si} les flux d'entropie liés au flux de chaleur dans le fluide et dans le solide, Z_{fi} le flux d'entropie de convection dans le fluide, η_{fs} la quantité d'entropie qui passe du fluide au solide par unité de volume de milieu poreux et unité de temps.

8.5. Équations phénoménologiques macroscopiques.

Nous les obtenons en faisant le produit de convolution par $\overset{v}{m}$ des deux membres des équations [7.9], [7.10] et [7.16]. Nous nous bornerons au cas où λ , μ , K_f et K_s sont uniformes dans tout l'espace, ou tout au moins sont à variations assez lentes (cette hypothèse peut dans certains cas être en défaut pour les coefficients de viscosité λ et μ , à cause de leur dépendance de la température). Nous obtenons :

$$Q_{fmi} = -K_f (\partial_i T_f * \overset{v}{m}) = -K_f \left[\partial_i (T_f * \overset{v}{m}) - (n_i T_f \delta_{fs}) * \overset{v}{m} \right] \quad [8.32]$$

$$Q_{smi} = -K_s (\partial_i T_s * \overset{v}{m}) = -K_s \left[\partial_i (T_s * \overset{v}{m}) + (n_i T_s \delta_{fs}) * \overset{v}{m} \right] \quad [8.33]$$

Remarquons que dans ces deux équations intervient le même terme :

$$(n_i T_f \delta_{fs}) * \overset{v}{m} = (n_i T_s \delta_{fs}) * \overset{v}{m}$$

puisque la température est continue à la traversée de Σ_{fs} .

L'expression du tenseur des contraintes de viscosité macroscopique est simplement :

$$\tau_{mij} = \lambda \partial_k (u_k * \overset{v}{m}) \delta_{ij} + \mu \left[\partial_i (u_j * \overset{v}{m}) + \partial_j (u_i * \overset{v}{m}) \right] \quad [8.34]$$

car les vitesses sont des fonctions continues dans tout l'espace.

9. ÉCOULEMENT PERMANENT MACROSCOPIQUEMENT UNIFORME D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

9.1. Hypothèses.

Afin de montrer, sur un exemple relativement simple, comment s'emploient les équations formées au paragraphe précédent, nous allons considérer le problème de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible.

L'écoulement sera considéré comme pratiquement isotherme. ρ_f et μ sont des constantes. Les paramètres dynamiques (pression et vitesse) peuvent alors être déterminés indépendamment des paramètres thermiques (flux de chaleur) qui ne seront pas considérés dans cette partie.

Nous supposons le milieu poreux macroscopiquement homogène et l'écoulement macroscopiquement uniforme. Les forces à distance X_i sont supposées constantes. La vitesse du fluide peut donc être considérée comme une réalisation particulière d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire, le passage à l'échelle macroscopique pouvant être effectué par passage à l'espérance mathématique. Pour éviter de changer les notations, nous continuerons à désigner le passage à l'échelle macroscopique par un produit de convolution avec une fonction de pondération \bar{m} , étant entendu que le résultat converge, pour \bar{m} bien choisi, vers l'espérance mathématique.

9.2. Équations microscopiques.

Les équations microscopiques se réduisent à l'équation de continuité, l'équation de bilan d'impulsion et l'équation phénoménologique donnant le tenseur de contraintes de viscosité. Elles prennent la forme très simple suivante :

$$\partial_i u_i = 0 \quad [9.1]$$

$$\rho_f u_j \partial_j u_i + \partial_i \bar{p} - \partial_j \tau_{ij} = \rho_f X_i \quad [9.2]$$

$$\tau_{ij} = \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad [9.3]$$

A ces équations il faut joindre les conditions aux limites sur l'interface fluide-solide :

$$u_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{fs} \quad [9.4]$$

et les conditions qui expriment que l'écoulement est macroscopiquement stationnaire. Celles-ci seront formulées lors du passage à l'échelle macroscopique.

En posant :

$$\bar{p} = \bar{p} - \rho_f X_i x_i \quad [9.5]$$

nous pouvons simplifier un peu l'expression de l'équation [9.2] :

$$\rho_f u_j \partial_j u_i + \partial_i \bar{p} - \partial_j \tau_{ij} = 0 \quad [9.6]$$

Dans la suite, nous utiliserons \bar{p} , au lieu de p , considéré comme fonction définie dans la phase fluide (et nulle dans le solide). Il sera évidemment facile de passer des résultats exprimés au moyen de \bar{p} , à des résultats exprimés au moyen de p .

9.3. Conséquences de l'uniformité macroscopique de l'écoulement.

L'uniformité macroscopique de l'écoulement s'exprime par la constance de la vitesse macroscopique u_{mi} :

$$u_{mi} = \frac{I}{\varepsilon} (u_i * \overset{v}{m}) \quad [9.7]$$

$$\partial_k u_{mi} = 0 \quad [9.8]$$

D'après la définition [8.33], la constance de u_{mi} entraîne :

$$\tau_{mij} = 0 \quad [9.9]$$

De plus, $-\rho_f (u_i - u_{mi}) (u_j - u_{mj})$ est aussi une fonction aléatoire stationnaire, dont M_{ij} , d'après [8.11], est l'espérance mathématique. Donc :

$$\partial_k M_{ij} = 0 \quad [9.10]$$

La pression effective \bar{p} n'est pas elle-même une fonction aléatoire stationnaire, mais d'après [9.6] ses dérivées le sont, car les autres termes de cette équation, qui s'expriment au moyen de u_i et de ses dérivées, sont des fonctions aléatoires stationnaires. Ce point est étudié en détail, dans le paragraphe suivant, ainsi que d'autres aspects des relations entre gradient de la pression macroscopique et valeur macroscopique du gradient de pression.

9.4. Gradient de la pression macroscopique et valeur macroscopique du gradient de pression.

La pression n'étant pas nulle à la limite fluide-solide, alors qu'elle est par convention considérée comme nulle dans le solide, est une fonction discontinue. Nous avons vu au paragraphe 3 que cela entraîne :

$$\{\partial_i p\} * \overset{v}{m} \neq \partial_i [p * \overset{v}{m}]$$

et plus précisément :

$$\partial_i [p * \overset{v}{m}] = \{\partial_i p\} * \overset{v}{m} + (p n_i \delta_{fs}) * \overset{v}{m} \quad [9.11]$$

La non-identité du gradient de la pression macroscopique et de la valeur macroscopique du gradient de pression a des conséquences, assez paradoxales, sur lesquelles nous pensons qu'il est bon de s'arrêter.

Nous avons précédemment défini la pression effective (afin d'inclure dans son gradient l'effet de la pesanteur) par (formule [9.5]) :

$$\bar{p} = p - \rho_f X_i x_i$$

Ceci nous conduit à nous demander si, comme pour la pression, nous avons :

$$\{\partial_i (\rho_f X_i x_i)\} * \overset{v}{m} \neq \partial_i [(\rho_f X_i x_i) * \overset{v}{m}]$$

Il n'en est rien : bien que la fonction $\rho_f X_i x_i$, identiquement nulle dans le solide, soit discontinue, nous allons montrer que l'on a toujours :

$$\{\partial_i (\rho_f X_i x_i)\} * \overset{v}{m} = \partial_i [(\rho_f X_i x_i) * \overset{v}{m}] = \varepsilon \rho_f X_i \quad [9.12]$$

En effet, $X_i x_i$, ainsi d'ailleurs que sa dérivée X_i , est une fonction non aléatoire, tandis que ρ_f est une fonction aléatoire (égale à ρ_f dans le fluide et nulle dans le solide). L'espérance mathématique du produit : $\rho_f X_i x_i$, est donc simplement :

$$(\rho_f X_i x_i) * \overset{v}{m} = X_i x_i (\rho_f * \overset{v}{m}) = \varepsilon \rho_f X_i x_i$$

et de même :

$$(\rho_f X_i) * \overset{v}{m} = X_i (\rho_f * \overset{v}{m}) = \varepsilon \rho_f X_i$$

L'égalité [9.12] en découle. En appliquant la formule générale [3.9] nous voyons que [9.12] a pour conséquence :

$$(\rho_f X_i x_i \vec{n} \delta_{fs}) * \overset{v}{m} = 0 \tag{9.13}$$

Or le premier membre de [9.13] représenterait dans un fluide au repos en équilibre hydrostatique l'opposé de la force de pression exercée par le fluide sur le solide, car dans un fluide en équilibre hydrostatique :

$$\bar{p} = p - \rho_f X_i x_i = C^{te}$$

donc :

$$\rho_f X_i x_i = p + C^{te}$$

Nous voyons donc que cette force est nulle. Il importe de ne pas la confondre avec la poussée d'Archimède, dont elle diffère parce que *la surface Σ_{fs} limitant le solide n'est pas fermée. Il serait faux d'écrire :*

$$(\rho_f X_i x_i n_j \delta_{fs}) * m = - \rho_f (1 - \varepsilon) X_j$$

comme le ferait croire l'expression classique de la poussée d'Archimède.

Dans un fluide en équilibre hydrostatique, nous avons donc :

$$\{\partial_i p\} * \overset{v}{m} = \partial_i [p * \overset{v}{m}] \tag{9.14}$$

mais ceci n'est vrai que si le fluide est en équilibre hydrostatique. C'est inexact en général si le fluide est en écoulement à travers le milieu poreux. Cette non-identité du gradient de la pression macroscopique et de la valeur macroscopique du gradient de pression est si paradoxale que nous avons pensé utile d'en donner une explication élémentaire, basée sur un schéma simplifié de milieu poreux, en annexe 2.

Posons :

$$\bar{p} = \varepsilon_f \pi_i x_i + \varpi \tag{9.15}$$

avec :

$$\pi_i = \frac{1}{\varepsilon} \{\partial_i \bar{p}\} * \overset{v}{m} = \frac{1}{\varepsilon} \{\partial_i p\} * \overset{v}{m} - \rho_f X_i \tag{9.16}$$

ce qui entraîne :

$$\{\partial_i \varpi\} * \overset{v}{m} = 0 \tag{9.17}$$

π_i est la valeur macroscopique du gradient de pression effective (le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$ est introduit ici pour la même raison que dans la définition [5.7]).

Il importe de remarquer que malgré [9.17], ϖ n'est pas une fonction aléatoire stationnaire :

$$\begin{aligned}\bar{p} * \dot{m} &= \varepsilon \pi_i x_i + \varpi * \dot{m} \\ \partial_i (\bar{p} * \dot{m}) &= \varepsilon (\pi_i + \varpi_i)\end{aligned}\quad [9.18]$$

où nous avons posé :

$$\varpi_i = \frac{1}{\varepsilon} \partial_i (\varpi * \dot{m}) \quad [9.19]$$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_i (\bar{p} * \dot{m}) - \{ \partial_i \bar{p} \} * \dot{m} &= \partial_i (p * \dot{m}) - \{ \partial_i p \} * \dot{m} = \varepsilon \pi_i \\ &= (\bar{p} n_i \delta_{fs}) * \dot{m} = (p n_i \delta_{fs}) * \dot{m} = (\varpi n_i \delta_{fs}) * \dot{m} \end{aligned} \right. \quad [9.20]$$

Les dérivées de p étant des fonctions aléatoires stationnaires, π_i et ϖ_i sont des vecteurs constants.

9.5. Équations macroscopiques.

Les équations macroscopiques se réduisent à :

$$u_{mi} = C^e \quad [9.21]$$

et à l'équation de bilan d'impulsion macroscopique, qui s'écrit sous les deux formes équivalentes :

$$\varepsilon (\varpi_i + \pi_i) = Y_i \quad [9.22]$$

$$\varepsilon \pi_i = Z_i \quad [9.23]$$

avec :

$$Y_i = [n_j (p \delta_{ij} - \tau_{ij}) \delta_{fs}] * \dot{m} \quad [9.24]$$

$$Z_i = - (n_j \tau_{ij} \delta_{fs}) * \dot{m} \quad [9.25]$$

Z_i représente la part des forces exercées par le solide sur le fluide due aux seules contraintes de viscosités (après déduction de la pression).

9.6. La densité de source d'entropie macroscopique.

La formule [8.28] donne la densité de source d'entropie macroscopique dans la phase fluide, la grandeur microscopique correspondante étant donnée par [7.7]. L'écoulement étant supposé pratiquement isotherme, cette formule se réduit à :

$$\begin{aligned}\sigma_{fm} &= \frac{1}{T_f} (\tau_{ij} \partial_i u_j) * \dot{m} \\ &= \frac{1}{T_f} [\partial_i (\tau_{ij} u_j) - u_j \partial_i \tau_{ij}] * \dot{m}\end{aligned}$$

Mais $\tau_{ij}u_j$ est une fonction continue (puisque u_j est nul à la paroi et dans le solide). Par conséquent :

$$\{\partial_i (\tau_{ij}u_j)\} * \overset{v}{m} = \partial_i [(\tau_{ij}u_j) * \overset{v}{m}] = 0$$

car cette expression est la dérivée de l'espérance mathématique d'une fonction aléatoire stationnaire. σ_{fm} se réduit donc à :

$$\begin{aligned} \sigma_{fm} &= -\frac{I}{T_f} (u_j \partial_i \tau_{ij}) * \overset{v}{m} \\ &= -\frac{I}{T_f} [u_j \rho_f u_i \partial_i u_j + \partial_j \bar{p}] * \overset{v}{m} \end{aligned}$$

en utilisant [9.6].

Mais on peut écrire :

$$u_j \rho_f u_i \partial_i u_j = \rho_f \partial_i (u_i u_j u_j) - \rho_f u_j \partial_i (u_i u_j)$$

d'où compte tenu de [9.1] :

$$u_j \rho_f u_i \partial_i u_j = I/2 \rho_f \partial_i (u_i u_j u_j)$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} (u_j \rho_f u_i \partial_i u_j) * \overset{v}{m} &= I/2 \rho_f [\partial_i (u_i u_j u_j)] * \overset{v}{m} \\ &= I/2 \rho_f \partial_i [(u_i u_j u_j) * \overset{v}{m}] = 0 \end{aligned}$$

Il reste donc simplement :

$$\sigma_{fm} = -\frac{I}{T_f} [u_j \partial_j \bar{p}] * \overset{v}{m}$$

ou, compte tenu de [9.1] :

$$\begin{aligned} \sigma_{fm} &= -\frac{I}{T_f} [\partial_j (u_j \bar{p})] * \overset{v}{m} \\ &= -\frac{I}{T_f} \partial_j [(u_j \bar{p}) * \overset{v}{m}] \end{aligned}$$

Mais d'après [9.18] :

$$\bar{p} = \varepsilon_f (\pi_i + \varpi_i) x_i$$

est une fonction aléatoire stationnaire. Si on multiplie cette expression par u_j , on obtient encore une fonction aléatoire stationnaire, de sorte que :

$$\partial_j [(u_j \bar{p}) * \overset{v}{m}] = \varepsilon (\pi_i + \varpi_i) u_{mi}$$

Nous avons donc en définitive :

$$\sigma_{fm} = -\frac{\varepsilon}{T_f} (\pi_i + \varpi_i) u_{mi} \quad [9.26]$$

Cette formule montre que la densité macroscopique de source d'entropie s'exprime de façon très simple au moyen du produit du gradient de la charge hydraulique macroscopique, par la vitesse

macroscopique. Il est à remarquer qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la loi rhéologique du fluide en écoulement (la relation [7.10] n'a pas été employée) et qu'elle est vraie même si l'écoulement n'est pas régi par la loi de Darcy. Cette formule a été indiquée pour la première fois sous une forme légèrement différente (en termes d'énergie consommée, et non d'entropie créée) par G. MATHERON, [3, (5)].

10. CAS OU L'ÉCOULEMENT EST LENT

10.1. Conséquences de la linéarité des équations.

Conservons les hypothèses du paragraphe 9, et supposons de plus l'écoulement lent. Nous voulons dire par là que les composantes du vecteur vitesse du fluide u_i , sont considérées comme des infiniment petits du premier ordre. Ceci va nous permettre de négliger le terme représentant les forces d'inertie dans l'équation du bilan d'impulsion [9.6]. Cette équation s'écrit donc :

$$\partial_i \bar{p} = \partial_i \tau_{ii} \quad [10.1]$$

ou, compte tenu de [9.1] et [9.3] :

$$\partial_i \bar{p} = \mu \Delta u_i \quad [10.2]$$

A cette équation nous joignons l'équation [9.1] :

$$\partial_i u_i = 0 \quad [9.1]$$

Le système constitué par les équations [10.2] et [9.1] est linéaire. Comme les conditions à la limite sur l'interface fluide-solide (vitesse nulle) sont aussi linéaires, nous pouvons affirmer que si $(u_i^{(1)}, \bar{p}^{(1)})$ d'une part, $(u_i^{(2)}, \bar{p}^{(2)})$ d'autre part, sont deux solutions différentes du problème d'écoulement considéré, toute combinaison de la forme :

$$(\lambda^{(1)} u_i^{(1)} + \lambda^{(2)} u_i^{(2)}, \lambda^{(1)} \bar{p}^{(1)} + \lambda^{(2)} \bar{p}^{(2)})$$

est une nouvelle solution du problème.

Nous ferons l'hypothèse suivante : quel que soit le vecteur P_i , le système [10.2]-[9.1] possède une solution correspondant à un écoulement macroscopiquement uniforme, pour laquelle (compte tenu de [9.18]) :

$$\partial_i (\bar{p} * m) = \varepsilon (\tau_i + \varpi_i) = \varepsilon P_i \quad [10.3]$$

Cette solution est unique, à une constante arbitraire près s'ajoutant à \bar{p} : en effet, si deux solutions différentes correspondaient à la même valeur de [10.3], par différence il serait possible de former un écoulement autre que le repos dans lequel d'après [9.26], la source d'entropie serait identiquement nulle, ce qui est impossible.

La linéarité des équations a une autre conséquence intéressante : μu_i et $\partial_i \bar{p}$ sont des champs de vecteurs définis en tout point de la phase fluide, et qui, en chacun de ces points, dépendent linéairement de P_i . Par conséquent, il existe des champs de tenseurs a_{ik} et b_{ik} tels que :

$$\partial_i \bar{p} = a_{ik} P_k \quad [10.4]$$

$$\mu u_i = b_{ik} P_k \quad [10.5]$$

Il est possible de formuler les équations du problème [10.2] et [9.1] au moyen de ces tenseurs, pris comme nouvelles fonctions inconnues :

$$a_{ik} = \Delta b_{ik} \quad [10.6]$$

$$\partial_i b_{ik} = 0 \quad [10.7]$$

On voit que la viscosité μ n'intervient plus dans ces équations, dont la solution dépend donc uniquement de la géométrie du milieu poreux. Ces équations peuvent s'exprimer autrement car $\partial_i \bar{p}$ étant un gradient, [10.4] peut s'intégrer. Il existe donc un champ de vecteurs c_k tel que :

$$\bar{p} = c_k P_k + C^{te} \quad [10.8]$$

avec, d'après la définition même de P_k :

$$c_k * \overset{v}{m} = \varepsilon x_k + C^{te} \quad [10.9]$$

Nous poserons donc :

$$c_k = \varepsilon_f x_k + d_k$$

Finalement, le problème peut être posé avec d_k et b_{ik} pour fonctions inconnues :

$$\delta_{ik} + \partial_i d_k = \Delta b_{ik} \quad [10.10]$$

$$\partial_i b_{ik} = 0 \quad [10.7]$$

avec les conditions :

$$d_k * \overset{v}{m} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{fs} \quad [10.11]$$

$$b_{ik} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{fs} \quad [10.12]$$

10.2. La loi de Darcy.

D'après [10.5], la vitesse en tout point du fluide dépend linéairement de P_k , le gradient de la pression effective moyenne. En prenant la moyenne des deux membres de [10.5] nous obtenons la loi de Darcy :

$$\varepsilon u_{mi} = u_i * \overset{v}{m} = - \frac{k_{ik}}{\mu} P_k \quad [10.13]$$

où nous avons posé :

$$k_{ik} = - b_{ik} * \overset{v}{m} \quad [10.14]$$

k_{ik} est le tenseur de perméabilité. D'après les équations [10.10], [10.7], [10.11], [10.12] qui permettent le calcul de b_{ik} en tout point du fluide, k_{ik} ne dépend que de la géométrie du milieu poreux. Ses composantes sont homogènes au carré d'une longueur, et nous voyons donc que deux milieux homothétiques dans le rapport λ , ont des tenseurs de perméabilité proportionnels dans le rapport λ^2 .

10.3. Symétrie du tenseur de perméabilité.

La démonstration directe de la symétrie du tenseur de perméabilité est due à MATHERON [3, (5)]. Une justification moins rigoureuse et moins directe, basée sur le théorème d'Onsager, avait été précédemment proposée [C. MARLE (4)].

L'expression :

$$\partial_k b_{il} \cdot \partial_k b_{is}$$

est manifestement symétrique en l et s . Nous pouvons l'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_k b_{il} \cdot \partial_k b_{is} &= \partial_k [\partial_k b_{il} \cdot b_{is}] - (\partial_k \partial_k b_{il}) b_{is} \\ &= \partial_k [\partial_k b_{il} \cdot b_{is}] - (\delta_{il} + \partial_i d_l) b_{is} \end{aligned}$$

compte tenu de [10.10].

Appliquons le produit de convolution par $\overset{\vee}{m}$ aux deux membres de cette expression. Nous avons :

$$\{ \partial_k [\partial_k b_{il} \cdot b_{is}] \} * \overset{\vee}{m} = \partial_k \{ [\partial_k b_{il} \cdot b_{is}] * \overset{\vee}{m} \} = 0$$

d'après [10.12] qui permet de permuter dérivation et prise de moyenne, et d'après le fait que le second membre est nul comme dérivée de la valeur moyenne d'une fonction aléatoire stationnaire.

D'autre part :

$$[(\delta_{il} + \partial_i d_l) b_{is}] * \overset{\vee}{m} = [b_{is} \partial_i (d_l b_{is})] * \overset{\vee}{m}$$

compte tenu de [10.7]. Mais comme ci-dessus, et pour les mêmes raisons :

$$[\partial_i (d_l b_{is})] * \overset{\vee}{m} = \partial_i [(d_l b_{is}) * \overset{\vee}{m}] = 0$$

Compte tenu de [10.14] nous avons donc finalement :

$$(\partial_k b_{il} \cdot \partial_k b_{is}) * \overset{\vee}{m} = k_{ls}$$

Le premier membre étant symétrique en l et s , nous avons bien :

$$k_{ls} = k_{sl} \quad [10.15]$$

Remarquons d'autre part que l'expression [9.26] de la source d'entropie macroscopique s'écrit :

$$\sigma_{fm} = \frac{k_{il} P_k P_i}{T_f} \quad [10.16]$$

D'après le second principe de la thermodynamique, la matrice k_{ik} doit donc être définie positive.

11. CAS OÙ L'ÉCOULEMENT N'EST PAS NÉCESSAIREMENT LENT

11.1. Hypothèses.

Nous conservons les hypothèses du paragraphe 9. L'écoulement n'est plus supposé assez lent pour qu'on puisse négliger complètement le terme représentant les forces d'inertie dans le bilan d'impulsion [9.6]. Mais cependant, il est supposé suffisamment lent pour qu'il n'y ait pas apparition de turbulence, car alors l'hypothèse d'un écoulement stationnaire serait mise en défaut (un écoulement turbulent n'étant stationnaire qu'en moyenne). L'écoulement est également supposé assez lent pour rendre légitime un traitement approché des équations par développement en série de puissances limité aux deux premiers termes, que nous allons préciser.

11.2. Méthode de résolution.

Le problème est déterminé par l'équation [9.1] :

$$\partial_i u_i = 0 \quad [9.1]$$

et l'équation (résultant de la combinaison de [9.3] et [9.6]) :

$$\rho_f u_j \partial_j u_i + \partial_i \bar{p} = \mu \Delta u_i \quad [11.1]$$

Supposons la solution développable en série de puissance d'un paramètre λ :

$$u_i = u_i^{(1)} \lambda + u_i^{(2)} \lambda^2 + \dots + u_i^{(h)} \lambda^h + \dots \quad [11.2]$$

$$\bar{p} = \bar{p}^{(1)} \lambda + \bar{p}^{(2)} \lambda^2 + \dots + \bar{p}^{(h)} \lambda^h + \dots \quad [11.3]$$

Portons ces expressions dans les équations [9.1] et [11.1] et identifions les termes de même puissance en λ . Nous obtenons le système :

$$\partial_i u_i^{(1)} = 0 \quad [11.4]$$

$$\partial_i \bar{p}^{(1)} = \mu \Delta u_i^{(1)} \quad [11.5]$$

$$\partial_i u_i^{(2)} = 0 \quad [11.6]$$

$$\partial_i \bar{p}^{(2)} = \mu \Delta u_i^{(2)} - \rho_f u_j^{(1)} \partial_j u_i^{(1)} \quad [11.7]$$

.....

$$\partial_i u_i^{(n)} = 0 \quad [11.8]$$

$$\partial_i \bar{p}^{(n)} = \mu \Delta u_i^{(n)} - \rho_f \sum_{q=1}^{n-1} u_j^{(q)} \partial_j u_i^{(n-q)} \quad [11.9]$$

La résolution de ces systèmes peut se faire par récurrence : le système [11.4], [11.5] est identique à celui, étudié au paragraphe 10, qui décrit l'écoulement lent ; le système [11.6], [11.7] contient une partie homogène identique au système précédent, et un terme non homogène connu lorsque le système précédent a été résolu ; et ainsi de suite.

Nous supposons l'écoulement suffisamment lent pour qu'il soit légitime de limiter les développements [11.2] et [11.3] aux deux premiers termes. Nous pouvons alors considérer seulement les systèmes [11.4], [11.5] et [11.6], [11.7].

Nous avons supposé, au paragraphe 10, que le système [11.4]-[11.5] possédait une solution correspondant à un écoulement macroscopiquement uniforme, quelle que soit la valeur choisie pour le gradient de la pression macroscopique P_i . Nous avons montré que cette solution est unique, à une constante près s'ajoutant à la pression. Nous supposons ici que, de plus, la matrice de perméabilité k_{ik} possède un inverse, k_{kj} , et que par conséquent la relation [10.13] peut être inversée. Cette relation, qui s'écrivait :

$$Q_i^{(1)} = \varepsilon \lambda u_{mi}^{(1)} = \lambda u_i^{(1)} * \overset{\vee}{m} = - \frac{k_{ik}}{\mu} P_k^{(1)} \quad [11.10]$$

avec :

$$\varepsilon P_k^{(1)} = \lambda \partial_k (\bar{p}^{(1)} * \overset{\vee}{m}) \quad [11.11]$$

peut donc s'écrire :

$$P_k^{(1)} = -\mu h_{kj} Q_k^{(1)} \quad [II.12]$$

Dans ces conditions, le système [II.4]-[II.5] possède une solution unique correspondant à un écoulement macroscopiquement uniforme, pour chaque valeur de $Q_{mi}^{(1)}$. Choisissons la solution correspondant à :

$$Q_i^{(1)} = Q_i = \varepsilon u_{mi} \quad [II.13]$$

autrement dit, imposons :

$$Q_{mi}^{(2)} = u_{mi}^{(2)} = 0 \quad [II.14]$$

La première approximation s'écrit alors :

$$\lambda u_j^{(1)} = -b_{ik} h_{kj} Q_j \quad [II.15]$$

$$\lambda \bar{p}^{(1)} = -\mu (\varepsilon_f x_k + \bar{d}_k) h_{kj} P_j \quad [II.16]$$

b_{ik} et \bar{d}_k étant solution du système [10.10]-[10.7] avec les conditions [10.11]-[10.12].

Cherchons maintenant la seconde approximation : c'est la solution du système [II.6]-[II.7] qui satisfait [II.14]. En remplaçant $u_j^{(1)}$ par son expression [II.15] dans [II.7] nous obtenons :

$$\lambda^2 (\partial_i \bar{p}^{(2)} - \mu \Delta u_i^{(2)}) = \rho_f b_{jk} h_{kl} Q_i \partial_j b_{jr} h_{rm} Q_m$$

La solution du système [II.6]-[II.7] peut donc s'écrire sous la forme :

$$\mu \lambda^2 u_i^{(2)} = \rho_f \alpha_{ikl} Q_k Q_l \quad [II.17]$$

$$\lambda^2 \bar{p}^{(2)} = \rho_f \beta_{kll} Q_k Q_l \quad [II.18]$$

α_{ikl} et β_{kll} étant deux champs de tenseurs qu'on peut prendre pour nouvelles inconnues. α_{ikl} a chacune de ses composantes homogène à une longueur, tandis que les composantes de β_{kll} sont sans dimension. Ces champs de tenseur doivent satisfaire les conditions qui expriment que l'écoulement est macroscopiquement uniforme et vérifie [II.14].

Nous devons avoir notamment :

$$\alpha_{ikl} * \vec{m} = 0$$

$$\beta_{kll} = -\gamma_{klm} \nu_m + \zeta_{kl}$$

γ_{klm} étant un tenseur constant, dont les composantes sont homogènes à l'inverse d'une longueur. γ_{klm} et ζ_{kl} vérifient :

$$\partial_m (\beta_{kll} * \vec{m}) = \varepsilon \gamma_{klm}$$

$$\partial_m (\zeta_{kl} * \vec{m}) = 0$$

Ceci conduit à :

$$P_i^{(2)} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \partial_i (p^{(2)} * \vec{m}) = -\rho_f \gamma_{kll} Q_k Q_l \quad [II.19]$$

d'où la loi de pertes de charge :

$$P_i = P_i^{(1)} + P_i^{(2)} = -h_{ij} Q_j + \rho_f \gamma_{kll} Q_k Q_l \quad [II.20]$$

Dans cette relation, rappelons que h_{ij} est homogène à L^{-2} et γ_{kli} à L^{-1} . Si L est une dimension caractéristique des pores, on met parfois cette loi sous la forme :

$$P_i = - \frac{\mu |\dot{Q}|}{L^2} \cdot \left[(h_{kj} L^2 \frac{Q_j}{|\dot{Q}|} + R (\gamma_{kli} L) \frac{Q_k}{|\dot{Q}|} \cdot \frac{Q_l}{|\dot{Q}|} \right] \quad [II.21]$$

R étant le nombre de Reynolds :

$$R = \frac{\rho_f |\dot{Q}| L}{\mu} \quad [II.22]$$

Dans l'expression [II.21], $h_{kj} L^2$ et $\gamma_{kli} L$ sont deux tenseurs sans dimension, caractéristiques de la forme des pores du milieu, mais indépendants de leur dimension. Le premier est simplement l'inverse de la perméabilité (au facteur L^2 près) trouvée au paragraphe 10. L'autre est une nouvelle caractéristique du milieu traduisant l'importance des déviations à la loi de Darcy lorsque l'écoulement du fluide n'est plus très lent.

ANNEXE I

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES FORMULES DE DÉRIVATION DES GRANDEURS MACROSCOPIQUES

Soit $a(\vec{x}, t)$ une grandeur microscopique relative à la phase fluide, continuellement différentiable dans cette phase et identiquement nulle dans la phase solide.

Soit $m(\vec{x})$ une fonction de pondération, continuellement différentiable, à support borné, vérifiant :

$$\int m(\vec{x}) dx = 1$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace.

Par définition, la grandeur macroscopique a_m est :

$$a_m(\vec{x}, t) = \int a(\vec{x} + \vec{x}', t) m(\vec{x}') dx' \quad [A.1]$$

L'intégrale est, en principe, étendue à tout l'espace, mais en fait $m(\vec{x}')$ étant nulle en dehors d'un domaine borné, on peut effectuer l'intégration dans un volume V , limité par une surface Σ , en dehors duquel $m(\vec{x}')$ est nul. On peut même, compte tenu du fait que $a(\vec{x} + \vec{x}', t)$ est nul dans le solide, effectuer l'intégration dans la partie V_1 de V qui est contenue dans le fluide, et qui est limitée par la surface Σ et par l'interface fluide-solide Σ_{fs} .

1. DÉRIVATION PAR RAPPORT AUX VARIABLES D'ESPACE

Pour calculer $\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}}$, on n'a pas le droit de dériver brutalement le second membre de [A. 1] sous le signe \int car $a(\vec{x} + \vec{x}', t)$ n'est pas une fonction continue du paramètre \vec{x} . Il faut au préalable poser :

$$\vec{x} + \vec{x}' = \vec{x}'' \quad [A.2]$$

et écrire [A.1] sous la forme :

$$a_m(\vec{x}, t) = \int_{V_1} a(\vec{x}'', t) m(\vec{x}'' - \vec{x}) dx'' \quad [A.3]$$

On peut maintenant dériver le second membre de [A.3] sous le signe \int .

$$\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} = \int_{x'' \in V_1} a(\vec{x}'', t) \frac{\partial m(\vec{x}'' - \vec{x})}{\partial \vec{x}} dx''$$

Mais :

$$\frac{\partial m(\vec{x}'' - \vec{x})}{\partial \vec{x}} = - \frac{\partial m(\vec{x}'' - \vec{x})}{\partial \vec{x}''}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} &= - \int_{x'' \in V_1} a(\vec{x}'', t) \frac{\partial m(\vec{x}'' - \vec{x})}{\partial \vec{x}''} dx'' \\ &= - \int_{x'' \in V_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{x}''} [a(\vec{x}'', t) m(\vec{x}'' - \vec{x})] - \left\{ \frac{\partial a(\vec{x}'', t)}{\partial \vec{x}''} \right\} m(\vec{x}'' - \vec{x}) \right\} dx'' \end{aligned}$$

où nous avons désigné par :

$$\left\{ \frac{\partial a(\vec{x}'', t)}{\partial \vec{x}''} \right\}$$

le gradient, au sens ordinaire, de la fonction $a(\vec{x}'', t)$ (qui est bien défini dans V_1 ; Σ_{sf} étant un ensemble de mesure nulle, le fait que ce gradient ne soit pas défini sur Σ_{sf} est sans conséquence sur le calcul de l'intégrale).

Le premier terme de l'intégrale peut être transformé par application de la formule d'Ostrogradsky :

$$\int_{V_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}''} [a(\vec{x}'', t) m(\vec{x}'' - \vec{x})] dx'' = - \int_{\Sigma + \Sigma_{fs}} a(\vec{x}'', t) m(\vec{x}'' - \vec{x}) \vec{n} d\sigma$$

l'intégrale du second membre étant prise sur la surface $\Sigma + \Sigma_{fs}$ qui limite le volume V_1 , mais pouvant en fait être restreinte à Σ_{fs} car $m(\vec{x}'' - \vec{x})$ est nul sur Σ , si V_1 est assez grand. Le signe — au second membre provient du fait que \vec{n} est le vecteur unitaire normal à $\Sigma + \Sigma_{fs}$ orienté vers le fluide, donc vers l'intérieur de V_1 .

Revenons maintenant à la variable \vec{x}' . Nous obtenons :

$$\frac{\partial a_m}{\partial \vec{x}} = \int_{\vec{x} + \vec{x}' \in \Sigma_{fs}} \vec{n} \cdot a(\vec{x} + \vec{x}', t) m(\vec{x}') d\sigma + \int_{\vec{x} + \vec{x}' \in V_1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial \vec{x}'}(\vec{x} + \vec{x}', t) \right\} m(\vec{x}') d\vec{x}' \quad [A.4]$$

formule identique, aux notations près, à [3.8].

2. DÉRIVATION PAR RAPPORT AU TEMPS

Nous partons de l'expression [A.1]. Si le milieu poreux n'est pas immobile et indéformable, la surface Σ_{fs} va se déplacer au cours du temps, de sorte que le volume d'intégration V_1 est variable au cours du temps. Dans le calcul de la dérivée $\frac{\partial a_m(\vec{x}, t)}{\partial t}$, nous devons donc tenir compte, d'une part de la dépendance du temps de la fonction sous le signe \int , d'autre part de la variation au cours du temps du volume d'intégration. Le premier terme est, tout simplement :

$$\int_{\vec{x} + \vec{x}' \in V_1} \left\{ \frac{\partial a(\vec{x} + \vec{x}', t)}{\partial t} \right\} m(\vec{x}') dx'$$

la quantité entre accolades étant la dérivée par rapport au temps au sens ordinaire.

Le second terme s'évalue immédiatement, si l'on remarque que le volume balayé par un élément de surface $d\sigma$ appartenant à Σ_{fs} pendant un temps dt est (\vec{n} est toujours orienté vers le fluide) :

$$-\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

et que ce volume est compté positivement si on doit l'ajouter au volume d'intégration V_1 , négativement dans le cas contraire. Le terme à évaluer est donc :

$$-\int_{\vec{x} + \vec{x}' \in \Sigma_{fs}} \vec{V} \cdot \vec{n} a(\vec{x} + \vec{x}', t) m(\vec{x}') dx'$$

D'où la formule :

$$\frac{\partial a_m(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int_{\vec{x} + \vec{x}' \in V_1} \left\{ \frac{\partial a(\vec{x} + \vec{x}', t)}{\partial t} \right\} m(\vec{x}') dx' - \int_{\vec{x} + \vec{x}' \in \Sigma_{fs}} a(\vec{x} + \vec{x}', t) \vec{V} \cdot \vec{n} m(\vec{x}') dx' \quad [A.5]$$

qui coïncide, aux notations près, avec [3.9].

ANNEXE 2

NON IDENTITÉ DU GRADIENT DE LA PRESSION MACROSCOPIQUE
ET DE LA VALEUR MACROSCOPIQUE DU GRADIENT DE PRESSION

Considérons un schéma simplifié de milieu poreux représenté sur la figure A.1. Il s'agit d'un schéma périodique unidimensionnel, parallèle à l'axe Ox. Le milieu est constitué par une succession de tubes capillaires de volume v , reliant en série des chambres de volume V .

Par définition, la pression macroscopique au point A sera l'intégrale de la pression dans le système, entre les deux tranches A_1 et A_2 , délimitant une période centrée en A. Nous définissons de même la pression macroscopique en B.

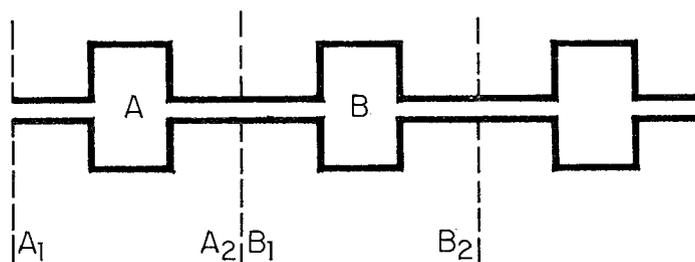


FIG. A1.

Pour des raisons de symétrie évidentes, la pression macroscopique en A coïncide, à un facteur (égal à $V + v$) près, avec la pression vraie (microscopique) au point A.

$$P_M(A) = (V + v) p(A)$$

$$P_M(B) = (V + v) p(B)$$

de sorte que le gradient de la pression macroscopique est :

$$\frac{\partial}{\partial x} (p * m) = (V + v) \frac{p(B) - p(A)}{AB}$$

Voyons maintenant la valeur macroscopique du gradient de pression. Ce sera encore, par définition, l'intégrale du gradient de pression dans une période. Or le gradient de pression est beaucoup plus grand dans les capillaires que dans les chambres : la figure A.2, représentant la pression en fonction de l'abscisse, illustre en point. Mais comme le volume des capillaires v est petit auprès du volume des chambres V , la valeur macroscopique du gradient de pression est plus influencée par la valeur du gradient de pression dans les chambres que par la valeur du gradient de pression dans les capillaires :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) * m = V \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{chambres} + v \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{capillaires}$$

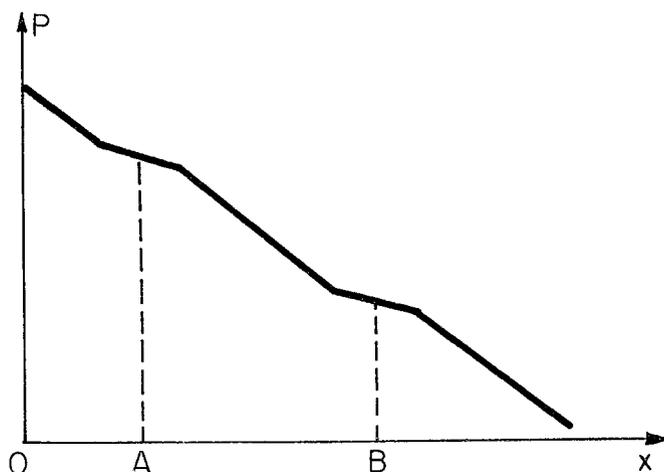


FIG. A2.

Nous aurons donc sûrement (si le fluide est en écoulement) :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (p * m) \right| > \left| \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) * m \right|$$

Ce modèle montre bien que la non identité du gradient de la pression macroscopique et de la valeur macroscopique du gradient de pression, est due au fond, au fait que les zones étroites où le gradient de pression est plus élevé qu'ailleurs, jouent dans la pondération un rôle moindre, car leur volume est moindre.

Si le fluide est en équilibre hydrostatique, alors le gradient de pression, fixé par la pesanteur, est le même dans les capillaires et les chambres, et dans ce cas seulement il y a identité du gradient de la pression macroscopique et de la valeur macroscopique du gradient de pression.

Manuscrit reçu en août 1967.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) GROOT (S. R. DE) et MAZUR (P.). — Non equilibrium thermodynamics. *North Holland Publishing Company*, Amsterdam, 1962.
- (2) HUBBERT (K. M.). — Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids. *Journ. of Petroleum Technology*, October 1956, p. 222.
- (3) KAMPÉ de FÉRIET (J.). — Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence. Chapitre XIV du livre : Théorie des fonctions aléatoires, par A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET. *Masson*, Paris 1953.
- (4) MARLE (C.). — Application des méthodes de la thermodynamique des processus irréversibles à l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux. *Bulletin Rilem*, nouvelle série n° 29, déc. 1965, p. 107.
- (5) MATHERON (G.). — 1) les variables régionalisées et leur estimation. *Masson*, Paris 1965. 2) Structure et composition des perméabilités. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-4, p. 564. 3) Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy. *Rev. Inst. Franç. du Pétrole*, 1966, **XXI**-11, p. 1697.
- (6) SCHWARTZ (L.). — Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. *Hermann*, Paris, 1961.
- (7) SCHWYDLER (M. I.). — Les courants d'écoulement dans les milieux hétérogènes. *Izv. Akad. Nauk S. S. S. R., Mekh. i mas.*, 1962, n° 3, p. 185-190 (Traduction *I. F. P.* Réf. 10798, juin 1964).