Structure locale des variétés de Jacobi

Pierre Dazord

André Lichnerowicz

Charles-Michel Marle

Résumé

Après un rappel des notions essentielles concernant les variétés de Poisson et de Jacobi, on étudie les relations entre les variétés de Poisson homogènes et les variétés de Jacobi, ou conformes de Jacobi. On met ensuite en évidence plusieurs types de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi, sur lesquelles existent des structures induites, qui peuvent être, selon les cas, des structures de Jacobi ou des structures de Poisson homogènes. On donne des modèles locaux de variétés de Poisson homogènes et de variétés de Jacobi, qui généralisent le théorème de décomposition locale de Weinstein [21] pour les variétés de Poisson. On introduit enfin la notion de structure transverse d'une feuille, et on montre qu'elle a un caractère intrinsèque.

The local structure of Jacobi manifolds

Summary

We first recall some basic definitions and facts about Poisson manifolds and Jacobi manifolds. Then we investigate the very close relationships which link homogeneous Poisson manifolds with Jacobi manifolds, or conformal Jacobi manifolds. In the next two sections, we exhibit several types of distinguished submanifolds of a Jacobi manifold, on which there exist induced structures, which may be either Jacobi manifold structures, or homogeneous Poisson manifold structures. We give local models of homogeneous Poisson manifolds and Jacobi manifolds which generalize Weinstein's local splitting theorem for Poisson manifolds [21]. Finally, we introduce the notion of the transverse structure of a leaf, and we show that it is intrinsically defined.

Table des matières

Introduction 3
1. Notations et rappels concernant les variétés de Jacobi 4
2. Variétés de Poisson homogènes et variétés de Jacobi 10
3. Deux types de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi 24
4. Un troisième type de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi 33
5. Structure locale et cartes distinguées 37
6. Structure transverse d'une feuille 46
Bibliographie 51

Introduction

Les variétés de Jacobi, introduites par un des auteurs (A. L.) [10], généralisent à la fois les variétés de Poisson, les variétés symplectiques et les variétés de contact. Leur structure locale, remarquablement riche, mérite d'être étudiée. Cette étude conduit à replacer dans un cadre plus large les travaux relatifs aux variétés symplectiques, de contact ou de Poisson, et éclaire d'un jour nouveau les résultats qui les concernent.

Le paragraphe 1 indique quelques notations et donne quelques rappels concernant les variétés de Poisson, les variétés de Jacobi et les variétés conformes de Jacobi.

Dans le paragraphe 2, on introduit la notion de variété de Poisson homogène, et on explicite les liens très étroits qui l'unissent à la notion de variété de Jacobi, ou de variété conforme de Jacobi. Ces liens apparaissent clairement en particulier lors de l'étude des structures induites sur certaines sous-variétés de codimension 1 d'une variété de Poisson homogène ou d'une variété de Jacobi.

Le paragraphe 3 décrit deux types de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi, sur lesquelles existe une structure de Jacobi induite. Le premier type (3.6) est assez exceptionnel. Par contre, le second type (3.9), qui généralise la notion de sous-variété de Poisson d'une variété de Poisson introduite par Weinstein [21], est défini par des conditions ouvertes: si ces conditions sont vérifiées en un point d'une sous-variété, elles sont vérifiées aussi sur tout un voisinage de ce point. Il existe donc de nombreux exemples de sous-variétés de ce type. Notamment, une sous-variété transverse, en un point, à une feuille de dimension paire du feuilletage caractéristique, et de dimension égale à la codimension de cette feuille, est de ce type au voisinage du point considéré. On verra plus loin que le germe en ce point de la structure de Jacobi induite, ou plutôt sa classe d'équivalence conforme, a un caractère intrinsèque, et ne dépend que de la feuille considérée; c'est la structure transverse de cette feuille.

Dans le paragraphe 4, on considère un autre type de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi, sur lesquelles existe une structure de Poisson homogène induite. Ce type de sous-variétés est, comme le précédent, défini par des conditions ouvertes. Une sous-variété transverse, en un point, à une feuille de dimension impaire du feuilletage caractéristique, et de dimension égale à la codimension de cette feuille, est de ce type au voisinage du point considéré. On verra plus loin que le germe en ce point de la structure de Poisson homogène induite, ou plutôt sa classe d'équivalence pour une relation d'équivalence entre variétés de Poisson homogènes définie au paragraphe 2, a un caractère intrinsèque, et ne dépend que de la feuille considérée; c'est la structure transverse de cette feuille.

Le paragraphe 5 donne des modèles locaux, au voisinage d'un point, de variétés de Poisson et de variétés de Jacobi. Ces modèles peuvent apparaître comme généralisant le théorème de décomposition locale de Weinstein pour les variétés de Poisson.

Enfin le paragraphe 6 introduit la notion de structure transverse d'une feuille (évoquée plus haut), tant pour les variétés de Poisson homogènes que pour les variétés de Jacobi, et montre qu'elle a un caractère intrinsèque. Ces résultats précisent les modèles locaux du paragraphe 5, et montrent que le germe de structure de Jacobi en un point x_0 d'une variété de Jacobi est entièrement déterminé par la donnée du rang de la structure en x_0 et de la structure transverse de la feuille passant par ce point.

1. Notations et rappels concernant les variétés de Jacobi

1.1. Conventions générales et notations.

Dans tout cet article les variétés considérées sont différentiables de classe C^∞, paracompactes. Les applications, formes, champs de vecteurs ou de tenseurs considérés sont différentiables de classe C^∞.

Une variété M étant donnée, on désigne par TM et T^*M, respectivement, ses fibrés tangent et cotangent. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on note $\bigwedge^p TM$ et $\bigwedge^p T^*M$ les fibrés des p-tenseurs et des p-formes sur M, c'est-à-dire les puissances extérieures d'ordre p de TM et de T^*M, respectivement. Par convention, pour $p = 0$, $\bigwedge^0 TM$ et $\bigwedge^0 T^*M$ coïncident avec le fibré trivial $M \times \mathbf{R}$, et pour $p < 0$, $\bigwedge^p TM$ et $\bigwedge^p T^*M$ sont le fibré nul de base M. On note $C^\infty(M, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions différentiables réelles sur M. Les espaces des sections différentiables de TM, T^*M, $\bigwedge^p TM$ et $\bigwedge^p T^*M$ sont notés, respectivement, $\Gamma(TM)$, $\Gamma(T^*M)$, $\Gamma(\bigwedge^p TM)$ et $\Gamma(\bigwedge^p T^*M)$.

Soient $X \in \Gamma(\bigwedge^p TM)$ et $Y \in \Gamma(\bigwedge^q TM)$, avec p et $q \in \mathbf{N}$. On note $[X, Y]$ leur *crochet de Schouten* [17]. C'est un élément de $\Gamma(\bigwedge^{p+q-1} TM)$, dont le lecteur trouvera une définition axiomatique en [15]. Pour $p = 1$, $[X, Y]$ n'est autre que la dérivée de Lie de Y selon le champ de vecteurs X, également notée $\mathcal{L}(X)Y$. Pour $p = q = 1$, $[X, Y]$ est le crochet usuel des champs de vecteurs X et Y.

Soient M_1 et M_2 deux variétés. Lorsqu'on considèrera le produit $M_1 \times M_2$, toute forme différentielle ω_i sur le facteur M_i ($i = 1$ ou 2) sera tacitement identifiée à son image réciproque $\pi_i^*\omega_i$ par la projection canonique $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$. De même, tout champ de vecteurs X_i (resp., tout champ de tenseurs Λ_i) sur la variété M_i sera tacitement identifié au champ de vecteurs (resp., au champ de tenseurs) sur la variété produit $M_1 \times M_2$, projetable sur chacun des facteurs par les projections canoniques π_1 et π_2, dont la projection sur le facteur M_i est X_i (resp., Λ_i) et dont la projection sur l'autre facteur est nulle.

Soit $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable d'une variété M_1 dans une autre variété M_2 Pour tout point x de M_1, on note $T_x f : T_x M_1 \to T_{f(x)} M_2$ l'application linéaire tangente en x à f, et $f_x^* : T_{f(x)}^* M_2 \to T_x^* M_1$ sa transposée. Les prolongements de $T_x f$ (resp., de f_x^*) aux puissances tensorielles ou extérieures de $T_x M_1$ (resp., de $T_{f(x)}^* M_2$) seront également notés $T_x f_1$ (resp., f_x^*). Pour toute forme différentielle η sur M_2, on note $f^*\eta$ la forme différentielle sur M_1 image réciproque de η par f. Si f est une submersion surjective et si X est un champ de vecteurs sur M_1 projetable par f (resp., si ζ est une forme différentielle sur M_1 projetable par f), on note f_*X (resp., $\check{f}\zeta$) le champ de vecteurs (resp., la forme différentielle) sur M_2 image directe de X (resp., de ζ) par f. Ces notations seront utilisées en particulier dans le cas où f est un difféomorphisme, tous les champs de vecteurs et toutes les formes différentielles sur M_1 étant alors projetables.

1.2. Variétés de Poisson et de Jacobi.

Sur une variété différentiable M, on considère un 2-tenseur $\Lambda \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ et un champ de vecteurs $E \in \Gamma(TM)$. Pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M, on pose

$$\{f, g\} = i(\Lambda)(df \wedge dg) + f\, i(E)dg - g\, i(E)df\,. \tag{1}$$

Cette formule définit sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$ une loi de composition bilinéaire et antisymétrique. On montre [10] que cette loi vérifie l'identité de Jacobi

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0\,, \quad f,\ g,\ h \in C^\infty(M, \mathbf{R})\,, \tag{2}$$

si et seulement si Λ et E vérifient les deux identités:

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda\,; \qquad [E, \Lambda] = 0\,. \tag{3}$$

Lorsque c'est le cas, on dit que Λ et E définissent sur M une *structure de Jacobi*, et que (M, Λ, E) est une *variété de Jacobi.* La loi de composition définie par (1) est alors appelée *crochet de Jacobi.* L'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$, muni de cette loi de composition, est une *algèbre de Lie locale* au sens de Kirillov [6].

Réciproquement, on montre ([6], [3]) qu'une structure d'algèbre de Lie locale sur l'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$ des fonctions différentiables sur une variété M détermine sur cette variété une structure de Jacobi.

Le champ de vecteurs E est identiquement nul si et seulement si la loi de composition (1) est une dérivation en chacun de ses arguments (pour la structure d'algèbre associative définie sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$ par le produit ordinaire). Les identités (3) se réduisent alors à

$$[\Lambda, \Lambda] = 0\,. \tag{4}$$

Lorsque cette identité est satisfaite, on dit que Λ définit sur M une *structure de Poisson*, et que (M, Λ) est une *variété de Poisson* (voir [9] et [10] pour une étude détaillée de cette notion). La loi de composition (1), qui devient, puisque $E = 0$,

$$\{f, g\} = i(\Lambda)(df \wedge dg)\,,$$

est appelée *crochet de Poisson.*

1.3. Champs de vecteurs hamiltoniens.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi. Le 2-tenseur Λ définit un morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ donné par la formule, dans laquelle α et β désignent deux éléments d'une même fibre de T^*M,

$$\langle \Lambda^\sharp(\alpha), \beta \rangle = i(\Lambda)(\alpha \wedge \beta)\,.$$

À toute fonction différentiable f définie sur M, on associe le champ de vecteurs $\Phi(f)$, donné par l'expression

$$\Phi(f) = \Lambda^\sharp(df) + fE = [\Lambda, f] + fE\,,$$

et appelé *champ de vecteurs hamiltonien* associé à f. On remarque qu'en particulier

$$\Phi(1) = E\,.$$

On montre [10], [12], que l'application $f \mapsto \Phi(f)$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $C^\infty(M, \mathbf{R})$ (avec pour loi de composition le crochet de Jacobi) dans l'algèbre de Lie $\Gamma(TM)$ (avec pour loi de composition le crochet usuel). On a la formule

$$\{f, g\} = i\bigl(\Phi(f)\bigr)dg - \bigl(i(E)df\bigr)g\,. \tag{5}$$

1.4. Structures conformes de Jacobi.

Soit a une fonction différentiable définie sur M, ne s'annulant en aucun point. Pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M, on pose

$$\{f, g\}^a = \frac{1}{a}\{af, ag\}\,. \tag{6}$$

On sait [10] que cette nouvelle loi de composition est le crochet de Jacobi pour une autre structure de Jacobi sur M dite *a-conforme* à celle initialement donnée. On dit aussi que ces deux structures de Jacobi sont *conformément équivalentes*. Le tenseur Λ^a et le champ de vecteurs E^a correspondant à la nouvelle structure de Jacobi sont donnés par

$$\Lambda^a = a\Lambda\,; \qquad E^a = \Phi(a) = [\Lambda, a] + aE\,. \tag{7}$$

Pour toute fonction différentiable f sur M, le champ de vecteurs hamiltonien $\Phi^a(f)$ associé à f pour la nouvelle structure de Jacobi n'est autre que

$$\Phi^a(f) = \Phi(af)\,.$$

Sur une variété, la classe d'équivalence formée par toutes les structures de Jacobi conformément équivalentes à une structure de Jacobi donnée est appelée *structure conforme de Jacobi*.

On peut donner une définition plus générale de la notion de structure conforme de Jacobi; on décrit ci-dessous deux manières de le faire, et on montre que, pour l'essentiel, elles sont équivalentes.

1. Soit (U_i), $i \in I$, ensemble d'indices, un recouvrement ouvert d'une variété M. On suppose chaque U_i muni d'une structure de Jacobi telle que pour tout couple $(i, j) \in I^2$, les structures de Jacobi induites sur $U_i \cap U_j$ par celles de U_i et de U_j soient conformément équivalentes. On dit alors que ces données définissent sur M une *structure conforme de Jacobi*. Soit (V_k), $k \in K$, autre ensemble d'indices, un autre recouvrement ouvert de M, chaque ouvert V_k étant muni d'une structure de Jacobi telle que pour tout couple $(k, l) \in K^2$, les structures de Jacobi induites sur $V_k \cap V_l$ par celles de V_k et de V_l soient

conformément équivalentes. Par convention, ces nouvelles données définissent sur M la même structure conforme de Jacobi que les précédentes si et seulement si pour tout couple $(i,k) \in I \times K$, les structures de Jacobi induites sur $U_i \cap V_k$ par celles de U_i et de V_k sont conformément équivalentes. La variété M ainsi munie d'une structure conforme de Jacobi, est appelée *variété conforme de Jacobi.* On remarquera qu'il peut n'exister sur M aucune structure de Jacobi globalement définie dont la classe d'équivalence conforme corresponde à une telle structure conforme de Jacobi.

2. Soit (E,π,M) un fibré en droites (c'est-à-dire un fibré vectoriel de rang 1) de base M. On munit l'espace des sections différentiables locales de ce fibré d'une loi de composition, notée $(\sigma,\tau) \mapsto [\sigma,\tau]$, vérifiant les propriétés énoncées ci-dessous; on a noté σ, τ et χ des sections différentiables locales de (E,π,M), définies respectivement sur les ouverts U, V et W de M:

(i) $[\sigma,\tau]$ est une section différentiable de (E,π,M) définie sur l'ouvert $U \cap V$ de M; si U_1 et V_1 sont deux ouverts de M vérifiant $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$, on a

$$[\sigma|_{U_1}, \tau|_{V_1}] = [\sigma,\tau]|_{U_1\cap V_1} \,;$$

(ii) le support de $[\sigma,\tau]$ est contenu dans l'intersection des supports de σ et de τ;

(iii) on a l'identité de Jacobi

$$\big[\sigma,[\tau,\chi]\big] + \big[\tau,[\chi,\sigma]\big] + \big[\chi,[\sigma,\tau]\big] = 0\,.$$

On dit alors que la loi de composition considérée définit sur l'espace des sections différentiables de (E,π,M) une *structure de faisceau d'algèbres de Lie locales*, au sens de Kirillov [6].

Ces données définissent sur M une structure conforme de Jacobi, au sens où on a défini cette notion ci-dessus. Pour le voir, il suffit en effet de considérer un recouvrement ouvert (U_i), $i \in I$, de M, tel que sur chaque ouvert U_i il existe une section différentiable $\sigma_i : U_i \to E$ de (E,π,M), ne s'annulant en aucun point. En remarquant que l'application $f \mapsto f\sigma_i$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions différentiables sur U_i sur l'espace des sections différentiables de (E,π,M) au dessus de U_i, on peut utiliser la loi de composition des sections locales de (E,π,M) pour définir une structure de Jacobi sur U_i. On vérifie aisément que pour tout couple $(i,j) \in I^2$, les structures de Jacobi induites sur $U_i \cap U_j$ par celles de U_i et de $U_j$sont conformément équivalentes; les structures de Jacobi obtenues sur les ouverts U_i définissent donc une structure conforme de Jacobi sur M. On vérifie enfin que cette structure conforme de Jacobi ne dépend pas du choix du recouvrement ouvert (U_i), $i \in I$, ni de celui des sections σ_i.

3. Revenons aux hypothèses et notations de 1. Pour tout $i \in I$, on note $(f,g) \mapsto \{f,g\}_i$ le crochet de Jacobi sur l'ouvert U_i de M, et pour tout couple $(i,j) \in I^2$, on not a_{ij} la fonction différentiable définie sur $U_i \cap U_j$, ne s'annulant en aucun point, telle que l'on ait, pour tout couple (f,g) de fonctions différentiables sur $U_i \cap U_j$,

$$\{f,g\}_i = \frac{1}{a_{ij}} \left\{a_{ij}f, a_{ij}g\right\}_j \,.$$

On a alors, pour tout triplet $(i,j,k) \in I^3$ et tout couple (f,g) de fonctions différentiables définies sur $U_i \cap U_j \cap U_k$,

$$\frac{1}{a_{ik}}\{a_{ik}f, a_{ik}g\}_k = \frac{1}{a_{ij}a_{jk}}\{a_{ij}a_{jk}f, a_{ij}a_{jk}g\}_k ,$$

ou encore, en posant $a_{ijk} = a_{ij}a_{jk}\bigl(a_{ik}\bigr)^{-1}$ et en remplaçant f et g, respectivement, par $\bigl(a_{ik}\bigr)^{-1}f$ et $\bigl(a_{ik}\bigr)^{-1}g$,

$$\{f,g\}_k = \frac{1}{a_{ijk}}\{a_{ijk}f, a_{ijk}g\}_k .$$

Par suite, le champ de vecteurs E_k et le 2-tenseur Λ_k qui définissent la structure de Jacobi de U_k vérifient sur $U_i \cap U_j \cap U_k$

$$\Lambda_k = a_{ijk}\Lambda_k\,; \qquad E_k = a_{ijk}E_k + [\Lambda_k, a_{ijk}]\,.$$

Soit Ω l'ensemble des points de M où le rang de la structure conforme de Jacobi de cette variété, c'est-à-dire la dimension de la feuille passant par ce point (la définition de la notion de feuille est rappelée en 1.5) est non nul. On suppose l'ouvert Ω dense dans M. Alors l'ensemble des points de $U_i \cap U_j \cap U_k$ où Λ_k et E_k ne sont pas simultanément nuls est dense dans $U_i \cap U_j \cap U_k$. La première égalité ci-dessus montre alors qu'en tout point de $U_i \cap U_j \cap U_k$ où le rang de la structure est pair et non nul, a_{ijk} est égal à 1. En tout point de $U_i \cap U_j \cap U_k$ où ce rang est impair, la valeur de E_k n'appartient pas à l'image de $\Lambda_k^\sharp$, et la seconde égalité ci-dessus montre que a_{ijk} est égal à 1. Par densité, on conclut que a_{ijk} est égal à 1 sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Les fonctions a_{ij} définies, pour tout couple $(i,j) \in I^2$, sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ de M, déterminent un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{R}^*$; ce sont donc les fonctions de transition, pour les changements de trivialisations locales, d'un fibré en droites (E,π,M) de base M. La construction inverse de celle décrite à la fin du paragraphe 2 ci-dessus permet de définir, sur l'espace des sections locales de ce fibré, une structure de faisceau d'algèbres de Lie locales. On vérifie que ce fibré en droites et cette structure ne dépendent, à un isomorphisme près, que de la structure conforme de Jacobi de M.

1.5. Feuilletage de Stefan d'une variété de Jacobi.

Les quelques notions rappelées ci-dessous s'introduisent naturellement lors de l'étude des variétés de Jacobi (voir [2] pour plus de détails).

Une *distribution* D sur une variété M est la donnée, pour tout point $x \in M$, d'un sous-espace vectoriel D_x de l'espace vectoriel tangent T_xM. La distribution D est dite *de classe* C^∞ au sens de Sussmann [19] si pour tout point a de M, il existe une famille finie (X_i), $1 \leq i \leq n(a)$, de champs de vecteurs de classe C^∞ définis sur un voisinage U_a de a, telle que pour tout $x \in U_a$, les $X_i(x)$ soient éléments de D_x, et que D_a soit engendré par les vecteurs $X_i(a)$, $1 \leq i \leq n(a)$ (l'entier $n(a)$ pouvant dépendre du point considéré a).

Une *variété intégrale* de la distribution D de classe C^∞, sur la variété M, est une sous-variété (éventuellement immergée) connexe N de M telle que, pour tout $x \in N$ on ait $T_xN = D_x$. La variété intégrale N est dite *maximale* si toute variété intégrale de D qui la contient lui est égale.

Sussmann [19] a établi le résultat suivant (théorème de Frobenius-Sussmann). Soit D une distribution de classe C^∞ sur la variété M. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(i) par tout point de M passe une variété intégrale de D;

(ii) par tout point de M passe une variété intégrale maximale de D;

(iii) il existe une sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M telle que

a) pour tout point $x \in M$, D_x est égal à l'ensemble $\mathcal{G}(x)$ des valeurs en x des champs de vecteurs éléments de $\mathcal{G}$,

b) pour tout $X \in \mathcal{G}$, de flot Φ, tout $Y \in \mathcal{G}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, $(\Phi_t)_* Y$ est un champ local de $\mathcal{G}$, *i.e.*, une section locale de $\mathcal{G}$.

Lorsque ces conditions équivalentes sont satisfaites, on dit que la distribution D est *complètement intégrable*. Par chaque point de M passe alors une variété intégrale maximale unique de D, et l'ensemble de ces variétés intégrales maximales constitue un *feuilletage de Stefan* [18] (appelé *feuilletage à singularités* dans [2]) de la variété M. Les variétés intégrales de D sont faiblement plongées dans M au sens de J. Pradines [16] et sont les feuilles du feuilletage. Pour tout point x_0 de M, l'ensemble des points de M $\mathcal{G}$-accessibles à partir de x_0, c'est-à-dire qui peuvent être joints à x_0 par un chemin continu formé d'un nombre fini d'arcs de trajectoires de champs de vecteurs éléments de $\mathcal{G}$, n'est autre que la feuille passant par x_0.

Revenons à l'étude d'une variété de Jacobi (M, Λ, E). On appelle *champ caractéristique*, ou *distribution caractéristique*, de cette variété la distribution C dont la fibre, en chaque point x de M, est le sous-espace vectoriel C_x de T_xM engendré par $\Lambda^\sharp(T^*_xM)$ et par $E(x)$. On montre aisément [6], [3], [2], que C satisfait les conditions du théorème de Frobenius-Sussmann, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ étant, dans le cas présent, l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens sur M. Les feuilles du feuilletage de Stefan défini par C sont appelées *feuilles* de la structure de Jacobi de M. Chacune de ces feuilles est munie d'une structure de Jacobi transitive (c'est-à-dire dont le champ caractéristique est égal au fibré tangent), telle que l'injection canonique de cette feuille dans M soit un morphisme de Jacobi (au sens rappelé ci-après). Les feuilles de dimension impaire sont des variétés Pfaffiennes (variétés munies d'une 1-forme de contact), et celles de dimension paire des variétés localement conformément symplectiques.

Le champ caractéristique d'une variété de Jacobi reste inchangé lorqu'on remplace sa structure de Jacobi par une autre appartenant à la même classe d'équivalence conforme. Les notions de *champ caractéristique* et de *feuille* gardent donc un sens pour les variétés conformes de Jacobi.

1.6. Morphismes de Jacobi et morphismes conformes de Jacobi.

Soient (M_1, Λ_1, E_1) et (M_2, Λ_2, E_2) deux variétés de Jacobi, et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application différentiable.

On dit que φ est un *morphisme de Jacobi* si pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M_2,

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} = \varphi^* \{f, g\}_{M_2} .$$

On montre que φ est un morphisme de Jacobi si et seulement si, pour toute fonction différentiable f sur M_2, le champ de vecteurs hamiltonien $\Phi(\varphi^* f)$ sur M_1 est projetable par φ sur M_2 et a pour projection le champ de vecteurs hamiltonien $\Phi(f)$; ou encore, si et seulement si Λ_1 et E_1 sont projetables par φ sur M_2 et ont pour projections, respectivement, Λ_2 et E_2.

On dit que φ est un *morphisme conforme de Jacobi* s'il existe une fonction différentiable a sur M_1, ne s'annulant en aucun point, telle que φ soit un morphisme de Jacobi lorsqu'on munit M_1 de la structure de Jacobi a-conforme à celle donnée, et M_2 de la structure de Jacobi donnée.

Plus généralement, lorsque M_1 et M_2 sont munies de structures conformes de Jacobi pas nécessairement associées à des structures de Jacobi globalement définies, on dit que φ est un *morphisme conforme de Jacobi* si pour tout point x_1 de M_1, il existe une structure de Jacobi définie sur un voisinage ouvert U_1 de x_1 dans M_1 compatible avec la structure conforme de Jacobi de M_1, et une structure de Jacobi définie sur un voisinage ouvert U_2 de $x_2 = \varphi(x_1)$ dans M_2 compatible avec la structure conforme de Jacobi de M_2, telles que la restriction de φ à U_1 soit un morphisme de Jacobi de U_1 dans U_2.

La projection par un morphisme de Jacobi (ou un morphisme conforme de Jacobi) surjectif φ du champ caractéristique de M_1 contient le champ caractéristique de M_2, cette inclusion pouvant être stricte.

2. Variétés de Poisson homogènes et variétés conformes de Jacobi

On introduit ci-dessous (définition 2.1) la notion de variété de Poisson homogène et on montre qu'elle est en relation étroite avec celle de variété de Jacobi: d'une part (propositions 2.3 et 2.7) une sous-variété de codimension 1 d'une variété de Poisson homogène transverse au champ d'homothéties possède une structure de Jacobi induite, et toute variété de Jacobi peut être obtenue de cette manière; d'autre part (proposition 2.9 et remarque 2.10) une sous-variété de codimension 1 d'une variété de Jacobi (M, Λ, E) transverse au champ de vecteurs E possède une structure de Poisson homogène induite, et toute variété de Poisson homogène peut être obtenue de cette manière. On peut aussi étudier certains quotients de variétés de Poisson homogènes ou de variétés de Jacobi (propositions 2.5 et 2.17); les structures ainsi obtenues sont d'une part des structures conformes de Jacobi, d'autre part des structures de Poisson localement homogènes (définition 2.15).

Certains résultats présentés dans ce paragraphe (2.3 à 2.7, 2.9 à 2.11) sont dûs pour l'essentiel à l'un des auteurs (A. L.) [10] et à A. M. Justino [4], [5]. Ils sont présentés ici d'une manière plus complète, adaptée aux applications qui en seront faites plus loin (paragraphes 4 et 5), et quelques développements nouveaux en sont tirés: complète intégrabilité d'une certaine sous-distribution de la distribution caractéristique d'une variété de Jacobi et rôle du feuilletage de Stefan qu'elle définit (2.14), complète intégrabilité de la distribution caractéristique étendue d'une variété de Poisson homogène (2.16).

2.1. Définition.

On appelle *variété de Poisson homogène* et on note (P, Λ_P, Z), une variété de Poisson (P, Λ_P) munie d'un champ de vecteurs Z, appelé *champ d'homothéties*, qui vérifie

$$[Z, \Lambda_P] = \mathcal{L}(Z)\Lambda_P = -\Lambda_P \,.$$

2.2. Lemme.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène.

1. *Pour toute fonction différentiable f définie sur P (ou sur un ouvert de P), le champ de vecteurs hamiltonien $\Lambda_P^\sharp(df)$ vérifie*

$$\big[Z, \Lambda_P^\sharp(df)\big] = -\big[\Lambda_P, f - \mathcal{L}(Z)f\big] = -\Lambda_P^\sharp\Big(d\big(f - \mathcal{L}(Z)f\big)\Big)\,.$$

En particulier, si f est homogène de degré 1 relativement à Z, c'est-à-dire si

$$\mathcal{L}(Z)f = f\,,$$

on a

$$\big[Z, \Lambda_P^\sharp(df)\big] = 0\,.$$

2. *Si f et g sont deux fonctions définies sur deux ouverts de P d'intersection non vide, homogènes de degré 1 relativement à Z, leur crochet de Poisson $\{f, g\}$ est homogène de degré 1 relativement à Z.*

Démonstration. D'après l'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Schouten [17], on peut écrire

$$\begin{aligned}\big[Z, \Lambda_P^\sharp(df)\big] &= \big[Z, [\Lambda_P, f]\big]\\ &= \big[[Z, \Lambda_P], f\big] + \big[\Lambda_P, [Z, f]\big]\\ &= -\Lambda_P^\sharp\Big(d\big(f - \mathcal{L}(Z)f\big)\Big)\,.\end{aligned}$$

La première partie du lemme en résulte. La seconde partie s'en déduit en calculant la dérivée de Lie $\mathcal{L}(Z)\{f, g\}$. □

La première partie de ce lemme sera utilisée dans la partie 4. La seconde permet d'établir la proposition suivante, qui met en évidence un lien entre les notions de variété de Poisson homogène et de variété de Jacobi.

2.3. Proposition.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, et N une sous-variété de codimension 1 de P transverse au champ d'homothéties Z. Il existe sur N une structure de Jacobi, caractérisée par l'une quelconque des propriétés suivantes.

(i) *Pour tout couple (F, G) de fonctions définies sur un ouvert W de P homogènes de degré 1 relativement à Z, le crochet de Jacobi des restrictions de F et de G à $N \cap W$ est la restriction à $N \cap W$ du crochet de Poisson $\{F, G\}_P$.*

(ii) *Soit $\pi : U \to N$ la projection sur N d'un voisinage tubulaire U de N dans P tel que pour tout $x \in N$, $\pi^{-1}(x)$ soit un arc connexe de courbe intégrale de Z. Soit a la fonction définie sur U, égale à 1 sur N, homogène de degré 1 relativement à Z. La projection π est un morphisme a-conforme de Jacobi.*

Cette structure de Jacobi sur N est dite induite par la structure de Poisson homogène de P.

Démonstration. À toute fonction $f \in C^\infty(N, \mathbf{R})$, on associe la fonction $F = a\pi^* f$, définie sur le voisinage tubulaire U de N dans P. L'application $f \mapsto F$ ainsi définie est un isomorphisme de $C^\infty(N, \mathbf{R})$ sur le sous-espace vectoriel de $C^\infty(U, \mathbf{R})$ formé par les fonctions homogènes de degré 1 relativement à Z. D'après le lemme 2.2, le crochet de Poisson définit sur ce dernier une structure d'algèbre de Lie. Grâce à l'isomorphisme inverse (qui n'est autre que $F \mapsto F\big|_N$), on obtient une structure d'algèbre de Lie sur $C^\infty(N, \mathbf{R})$ dont la loi de composition a pour expression

$$\{f, g\}_N = \left(\{a\pi^* f, a\pi^* g\}_P\right)\Big|_N , \qquad f \text{ et } g \in C^\infty(N, \mathbf{R}) .$$

On peut écrire aussi, puisque $\{a\pi^* f, a\pi^* g\}$ est homogène de degré 1 relativement à Z,

$$\pi^*\{f, g\}_N = \frac{1}{a}\{a\pi^* f, a\pi^* g\}_P , \qquad f \text{ et } g \in C^\infty(N, \mathbf{R}) .$$

On a donc à la fois prouvé l'existence de la structure de Jacobi sur N, et prouvé qu'elle était caractérisée par l'une ou l'autre des propriétés (i) et (ii). □

2.4. Proposition.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, N_1 et N_2 deux sous-variétés de codimension 1 de P transverses au champ d'homothéties Z. On suppose qu'il existe une courbe intégrale de Z rencontrant N_1 en un point x_1 et N_2 en un point x_2. On munit N_1 et N_2 des structures de Jacobi induites, au sens de 2.3, par la structure de Poisson homogène de P. Alors il existe un difféomorphisme conforme de Jacobi d'un voisinage de x_1 dans N_1 sur un voisinage de x_2 dans N_2, appliquant x_1 sur x_2.

Démonstration. En utilisant les propriétés du flot φ de Z, on voit qu'il existe un ouvert U de P qui s'identifie au produit $V_1 \times I$ d'un voisinage ouvert V_1 de x_1 dans N_1 et d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, qui satisfait les propriétés suivantes:

(i) le champ Z s'identifie au champ dont les projections sur V_1 et sur I sont, respectivement, le champ nul et le champ égal à 1;

(ii) il exist $t_0 \in I$ tel que $\varphi_{t_0}(x_1) = x_2$.

Le théorème des fonctions implicites montre qu'en restreignant éventuellement V_1, on peut supposer qu'il existe une fonction $h : V_1 \to \mathbf{R}$, vérifiant $h(x_1) = t_0$, telle que l'application $x \mapsto \psi(x) = \varphi_{h(x)}(x)$ soit un difféomorphisme de V_1 sur un voisinage ouvert V_2 de x_2 dans N_2, vérifiant $\psi(x_1) = x_2$.

Soit $\pi_1 : U \to V_1$ la première projection, et $a_1 : U \to \mathbf{R}$ la fonction égale à 1 sur V_1 et homogène de degré 1 relativement à Z. Elle a pour expression

$$a_1(x, t) = \exp(t) , \qquad (x, t) \in V_1 \times I .$$

D'après 2.3, $\pi_1 : U \to V_1$ est un morphisme a_1-conforme de Jacobi.

La projection de U sur V_2 parallèlement aux courbes intégrales de Z n'est autre que $\pi_2 = \psi \circ \pi_1$, et la fonction $a_2 : U \to \mathbf{R}$ égale à 1 sur V_2 et homogène de degré 1 relativement à Z a pour expression

$$a_2(x, t) = \exp\big(t - h(x)\big) , \qquad (x, t) \in V_1 \times I .$$

Toujours d'après 2.3, $\pi_2 : U \to V_2$ est un morphisme a_2-conforme de Jacobi. Un calcul simple montre alors que pour tout couple (f_2, g_2) de fonctions définies sur V_2, on a

$$\pi_1^*\big(\psi^*\{f_2, g_2\}_{N_2}\big) = \pi_1^*\Big(\exp(h)\big\{\exp(-h)\psi^* f_2, \exp(-h)\psi^* g_2\big\}_{N_1}\Big)\,.$$

Mais π_1 étant une submersion, ceci prouve que ψ est un difféomorphisme $\exp(-h)$-conforme de Jacobi. $\square$

2.5. Corollaire.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène dont le champ d'homothéties Z ne s'annule en aucun point. On suppose que l'ensemble Q des trajectoires de Z possède une structure de variété telle que la projection canonique $\pi : P \to Q$ soit une submersion. Il existe sur Q une structure conforme de Jacobi unique telle que π soit un morphisme conforme de Jacobi.

Démonstration. Tout point de Q possède un voisinage ouvert V qui s'identifie, grâce à une section locale $s : V \to P$ de π, à une sous-variété de codimension 1 de P transverse au champ Z. Il suffit alors d'utiliser les propositions 2.3 et 2.4. $\square$

2.6. Remarques.

1. Les hypothèses étant celles de 2.3, cette proposition donne un moyen pratique pour déterminer le champ de tenseurs Λ_N et le champ de vecteurs E_N définissant la structure de Jacobi induite sur N. On détermine d'abord la fonction a égale à 1 sur N et homogène de degré 1 relativement à Z. On calcule ensuite le tenseur Λ^a et le champ de vecteurs E^a définissant sur un voisinage ouvert U de N dans P la structure de Jacobi a-conforme à sa structure de Poisson. On sait alors que la projection de U sur N parallèlement aux courbes intégrales de Z est un morphisme de Jacobi de (U, Λ^a, E^a) sur (N, Λ_N, E_N); donc Λ_N et E_N sont les projections de Λ^a et de E^a.

On voit ainsi que les feuilles de la structure de Jacobi de N sont (au moins localement) les projections sur N, parallèlement aux courbes intégrales de Z, des feuilles de la structure de Poisson de P. En remarquant que celles-ci sont toutes de dimension paire, on peut énoncer les résultats suivants.

(i) Une feuille de N est de dimension paire si et seulement si le champ de vecteurs Z n'est pas tangent à la feuille correspondante de P; lorsque c'est le cas, la restriction à cette feuille de P de la projection parallèlement aux courbes intégrales de Z est un difféomorphisme local de cette feuille de P sur la feuille correspondante de N.

(ii) Une feuille de N est de dimension impaire si et seulement si le champ de vecteurs Z est tangent à la feuille correspondante de P; dans ce cas, la dimension de cette dernière est supérieure d'une unité à celle de la feuille considérée de N.

2. Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, x_0 un point de P où Z est non nul, et N une sous-variété de P, de codimension 1, passant par x_0 et transverse en ce point à Z. En restreignant éventuellement N, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans P qui s'identifie au produit $I \times N$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant 0 et de la sous-variété N, cette sous-variété s'identifiant à $\{0\} \times N$, le champ de vecteurs Z

restreint à U s'identifiant au champ dont la projection sur I est le champ constant égal à 1 et dont la projection sur N est nulle. On note (N, Λ_N, E_N) la structure de Jacobi de N donnée par la proposition 2.3, t la coordonnée canonique sur I et h la fonction définie sur U par

$$h(t,x) = \exp(t)\,, \qquad t \in I\,, \quad x \in N\,.$$

On vérifie aisément que Λ_P a pour expression, sur le voisinage U de x_0,

$$\Lambda_P = \frac{1}{h}(\Lambda_N + Z \wedge E_N)\,.$$

La proposition suivante montre que réciproquement, la formule ci-dessus permet de construire une variété de Poisson homogène à partir d'une variété de Jacobi.

2.7. Proposition.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi. On pose

$$P = \mathbf{R} \times M\,.$$

On note t la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$, et Z le champ de vecteurs sur P dont la projection sur $\mathbf{R}$ est 1 et dont la projection sur M est nulle. Soit $h : P \to \mathbf{R}$ la fonction homogène de degré 1 relativement à Z définie par

$$h(t,x) = \exp(t)\,, \qquad (t,x) \in P = \mathbf{R} \times M\,.$$

On définit sur P un tenseur Λ_P en posant

$$\Lambda_P = \frac{1}{h}(\Lambda + Z \wedge E)\,.$$

1. *(P, Λ_P, Z) est une variété de Poisson homogène.*

2. *La projection canonique $\pi : P \to M$ est un morphisme h-conforme de Jacobi.*

3. *La structure de Jacobi induite sur M, identifiée à la sous-variété $\{0\} \times M$ de P, par la structure de Poisson homogène de P, au sens de 2.3, est la structure initialement donnée.*

La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté.

Le lemme qui suit sera utilisé dans la partie 5.

2.8. Lemme.

Soient (P_1, Λ_1, Z_1) et (P_2, Λ_2, Z_2) deux variétés de Poisson homogènes.

1. *Le produit $P_1 \times P_2$, muni du tenseur de Poisson $\Lambda_1 + \Lambda_2$ et du champ d'homothéties $Z_1 + Z_2$, est une variété de Poisson homogène.*

2. *Soit N_2 une sous-variété de codimension 1 de P_2 transverse au champ Z_2. On note Λ_{N_2} et E_{N_2} le champ de tenseurs et le champ de vecteurs qui définissent sur N_2 la structure de Jacobi induite par la structure de Poisson homogène de P_2, au sens de 2.3. Alors $P_1 \times N_2$ est une sous-variété de codimension 1 de $P_1 \times P_2$ transverse au champ $Z_1 + Z_2$; le champ de vecteurs et le champ de tenseurs qui définissent sa structure de Jacobi induite par la structure de Poisson homogène de $P_1 \times P_2$ sont donnés par les formules*

$$E_{P_1 \times N_2} = E_{N_2}\,; \qquad \Lambda_{P_1 \times N_2} = \Lambda_1 + \Lambda_{N_2} - Z_1 \wedge E_{N_2}\,.$$

Démonstration. Prouvons la partie 2, car la partie 1 est évidente. La sous-variété $P_1 \times N_2$ est de codimension 1 dans $P_1 \times P_2$ car N_2 est de codimension 1 dans P_2; elle est transverse à $Z_1 + Z_2$ car N_2 est transverse à Z_2 On va déterminer E_{N_2} et Λ_{N_2}, puis $E_{P_1 \times N_2}$ et $\Lambda_{P_1 \times N_2}$, en utilisant la méthode esquissée en 2.6.

Soit a une fonction définie sur un voisinage tubulaire U_2 de N_2 dans P_2, égale à 1 sur N_2 et homogène de degré 1 relativement à Z_2:

$$\mathcal{L}(Z_2)a = a\,.$$

On note $\pi_2 : U_2 \to N_2$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de Z_2. On pose $\chi_2 = T_{N_2}\pi_2$; c'est un morphisme de projection du fibré vectoriel $T_{N_2}P_2$ sur son sous-fibré TN_2. Soit ${}^t\chi_2 : T^*N_2 \to T^*_{N_2}P_2$ le morphisme transposé. Pour tout vecteur Y_2 tangent à P_2 en un point de N_2, on a

$$\chi_2(Y_2) = Y_2 - \bigl(i(Y_2)da\bigr)Z_2\,,$$

et pour toute 1-forme η_2 en un point x_2 de N_2, ${}^t\chi_2(\eta_2)$ est la 1-forme qui prolonge η_2 à $T_{x_2}P_2$ et qui est nulle sur le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $Z_2(x_2)$. On a

$$E_{N_2} = \chi_2 \circ \bigl(a\Lambda_2^\sharp(da)\bigr)\big|_{N_2} = \Lambda_2^\sharp(da)\big|_{N_2}\,,$$

car $(da)\big|_{N_2}$ étant une section de l'annulateur de TN_2, son image par $\Lambda_2^\sharp$ est tangente à N_2, et car a est égale à 1 sur N_2. De même,

$$\Lambda_{N_2}^\sharp = \chi_2 \circ \Lambda_2^\sharp\big|_{N_2} \circ {}^t\chi_2\,.$$

On considère maintenant la fonction a (initialement définie sur un voisinage U_2 de N_2 dans P_2) comme définie sur le voisinage $P_1 \times U_2$ de $P_1 \times N_2$ dans $P_1 \times P_2$, en lui imposant d'être constante sur chaque section de la forme $P_1 \times \{x_2\}$, avec $x_2 \in U_2$. La fonction a ainsi prolongée est égale à 1 sur $P_1 \times N_2$ et vérifie

$$\mathcal{L}(Z_1)a = 0\,, \qquad \mathcal{L}(Z_1 + Z_2)a = \mathcal{L}(Z_2)a = a\,.$$

Elle est donc homogène de degré 1 relativement à $Z_1 + Z_2$.

Soit $\pi : P_1 \times U_2 \to P_1 \times N_2$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de $Z_1 + Z_2$. On pose $\chi = T_{P_1 \times N_2}\pi$. Ce morphisme de projection de $T_{P_1 \times N_2}(P_1 \times P_2)$ sur son sous-fibré $T(P_1 \times N_2)$ a pour expression

$$\chi(Y) = Y_1 - \bigl(i(Y_2)da\bigr)Z_1 + Y_2 - \bigl(i(Y_2)da\bigr)Z_2\,,$$

où $Y = Y_1 + Y_2$ est un vecteur tangent à $P_1 \times P_2$ en un point de $P_1 \times N_2$, Y_1 et Y_2 étant ses composantes sur P_1 et P_2. De même, le morphisme transposé ${}^t\chi : T^*(P_1 \times N_2) \to T^*_{P_1 \times N_2}(P_1 \times P_2)$ a pour expression

$$ {}^t\chi(\eta) = \eta_1 + {}^t\chi_2(\eta_2) - \big(i(Z_1)\eta_1\big) da \,, $$

où $\eta = \eta_1 + \eta_2$ est une 1-forme sur $P_1 \times N_2$, η_1 et η_2 ses composantes, respectivement sur P_1 et sur N_2.

Comme ci-dessus lors du calcul de E_{N_2}, on trouve

$$ E_{P_1 \times N_2} = (\Lambda_1^\sharp + \Lambda_2^\sharp)(da)\big|_{P_1 \times N_2} = E_{N_2} \,. $$

On a aussi, puisque a est égale à 1 sur $P_1 \times N_2$,

$$ \Lambda^\sharp_{P_1 \times N_2} = \chi \circ (\Lambda_1^\sharp + \Lambda_2^\sharp)\big|_{P_1 \times N_2} \circ {}^t\chi \,. $$

En utilisant les expressions de χ et de ${}^t\chi$ indiquées ci-dessus, on obtient l'expression de $\Lambda_{P_1 \times N_2}$ indiquée dans l'énoncé. $\square$

2.9. Proposition.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi, et P une sous-variété de codimension 1 de M transverse au champ de vecteurs E. Soit $\varpi : U \to P$ la projection sur P d'un voisinage tubulaire U de P dans M tel que pour tout $x \in P$, $\varpi^{-1}(x)$ soit un arc connexe de courbe intégrale de E. Soit η la 1-forme le long de P dont le produit intérieur par tout vecteur tangent à P est nul et qui vérifie $i(E)\eta = 1$. Il existe sur P une structure de Poisson unique telle que ϖ soit un morphisme de Jacobi; cette structure, qui est homogène de champ d'homothéties $\Lambda^\sharp(\eta)$, est dite induite par la structure de Jacobi de M.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions définies sur P. D'après la définition même de ϖ, les fonctions $\varpi^* f$ et $\varpi^* g$ sont constantes sur chaque trajectoire de E. Puisque $E = \Phi(1)$, on a

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}(E)\{\varpi^* f, \varpi^* g\} &= i(E) d\{\varpi^* f, \varpi^* g\} \\ &= \big\{1, \{\varpi^* f, \varpi^* g\}\big\} \\ &= \big\{i(E)d(\varpi^* f), \varpi^* g\big\} + \big\{\varpi^* f, i(E)d(\varpi^* g)\big\} \\ &= 0 \,. \end{aligned} $$

Il existe donc une fonction unique $\{f, g\}_P$ définie sur P telle que

$$ \{\varpi^* f, \varpi^* g\} = \varpi^* \{f, g\}_P \,. $$

La loi de composition ainsi définie sur $C^\infty(P, \mathbf{R})$ détermine une structure de Jacobi sur P, qui est l'unique structure pour laquelle ϖ est un morphisme de Jacobi. Le tenseur Λ_P et le champ de vecteurs E_P associés à cette structure s'obtiennent en projetant Λ et E par ϖ. On voit ainsi que E_P est nul, donc que la structure de Jacobi de P est en fait une structure de Poisson.

Par intégration le long des courbes intégrales de E, et en restreignant si nécessaire le voisinage tubulaire U de P dans M, on peut construire sur ce voisinage une fonction h nulle sur P vérifiant

$$i(E)dh = 1\,.$$

La restriction de dh à P n'est autre que la 1-forme le long de P notée η dans l'énoncé. Le champ de vecteurs hamiltonien $\Phi(h)$ vérifie

$$\bigl[E,\Phi(h)\bigr] = \bigl[\Phi(1),\Phi(h)\bigr] = \Phi\bigl(\{1,h\}\bigr) = \Phi\bigl(i(E)dh\bigr) = \Phi(1) = E\,.$$

Il est donc projetable par ϖ sur P. Puisque $(dh)\big|_P = \eta$ est une section de l'annulateur de TP dans T^*_PM, et que h est nulle sur P, la section $Z = \Lambda^\sharp(\eta)$ de T_PM est en fait un champ de vecteurs sur P qui coïncide à la fois avec la projection de $\Phi(h)$ sur P et avec la restriction de $\Phi(h)$ à P. D'après la formule (5), l'opérateur différentiel du premier ordre $\Phi(h) - i(E)dh = \Phi(h) - 1$ est une dérivation de l'algèbre de Jacobi de U. Par projection, on en déduit que l'opérateur différentiel du premier ordre $Z - 1$ est une dérivation de l'algèbre de Poisson de P. On a donc, pour tout couple (f,g) de fonctions différentiables sur P,

$$i(Z)d\bigl(\{f,g\}_P\bigr) = \bigl\{i(Z)df, g\bigr\}_P + \bigl\{f, i(Z)dg\bigr\}_P - \{f,g\}_P\,,$$

donc

$$\mathcal{L}(Z)\Lambda_P = -\Lambda_P\,.$$

Ceci prouve que (P,Λ_P,Z) est une variété de Poisson homogène. □

2.10. Remarque.

Dans les hypothèses de la proposition 2.9, le voisinage tubulaire U de P dans M s'identifie localement, au voisinage de chaque point, au produit $P\times I$ de P et d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant l'origine. Le champ E s'identifie au champ de vecteurs dont les projections sur P et sur I sont, respectivement, le champ nul et le champ égal à 1. Avec les conventions de 1.1, on peut écrire

$$\Lambda = \Lambda_P + E\wedge Z\,, \tag{8}$$

et le champ de vecteurs hamiltonien $\Phi(h)$ a pour expression

$$\Phi(h) = Z + hE\,.$$

Réciproquement, soit (P,Λ_P) une variété de Poisson et Z un champ de vecteurs sur P. On pose $M = P\times\mathbf{R}$ et on note E le champ de vecteurs sur M dont les projections sur P et sur $\mathbf{R}$ sont, respectivement, le champ nul et le champ égal à 1. On définit sur M un champ de tenseurs Λ, grâce à la formule (8). On vérifie [4] que (M,Λ,E) est une variété de Jacobi si et seulement si Z est un champ d'homothéties de la variété de Poisson (P,Λ_P).

2.11. Proposition.

Soit (M,Λ,E) une variété de Jacobi, P_1 et P_2 deux sous-variétés de codimension 1 *de M transverses au champ de vecteurs E. On suppose qu'il existe une courbe intégrale de E qui rencontre P_1 en un point x_1 et P_2 en un point x_2. On munit P_1 et P_2 des structures de*

Poisson homogènes $(P_1, \Lambda_{P_1}, Z_1)$ *et* $(P_2, \Lambda_{P_2}, Z_2)$ *induites par la structure de Jacobi de* M*, au sens de 2.9. Il existe un difféomorphisme de Poisson* ψ *d'un voisinage* V_1 *de* x_1 *dans* P_1 *sur un voisinage* V_2 *de* x_2 *dans* P_2*, qui applique* x_1 *sur* x_2*, et une fonction* f *définie sur* V_2 *tels que*

$$Z_2 = \psi_*(Z_1) + \Lambda_{P_2}^\sharp(df)\,.$$

Démonstration. Elle est semblable à celle de la proposition 2.4. La fonction f et le difféomorphisme ψ sont tels qu'en notant φ le flot du champ de vecteurs E, on ait, pour tout $x \in V_2$,

$$\psi^{-1}(x) = \varphi_{f(x)}(x)\,. \qquad \square$$

La proposition ci-dessus suggère les définitions suivantes des notions d'isomorphismes et d'automorphismes infinitésimaux de variétés de Poisson homogènes, ainsi que celle de la notion de variété de Poisson localement homogène (2.15).

2.12. Définitions.

1. Soient (P_1, Λ_1, Z_1) et (P_2, Λ_2, Z_2) deux variétés de Poisson homogènes. Une application différentiable $\psi : P_1 \to P_2$ est appelée *morphisme de variétés de Poisson homogènes* si elle vérifie les deux propriétés:

(i) ψ est un morphisme de Poisson, *i.e.*, Λ_1 est projetable par ψ et

$$\psi_*(\Lambda_1) = \Lambda_2\,;$$

(ii) le champ de vecteurs Z_1 est projetable par ψ et $\psi_*(Z_1) - Z_2$ est hamiltonien, *i.e.*, il existe une fonction différentiable h sur P_2 telle que

$$\psi_*(Z_1) - Z_2 = \Lambda_2^\sharp(dh) = [\Lambda_2, h]\,.$$

Un morphisme de variétés de Poisson homogènes $\psi : P_1 \to P_2$ est dit *strict* s'il vérifie

$$\psi_*(Z_1) - Z_2 = 0\,.$$

Un morphisme de variétés de Poisson homogènes qui est aussi une submersion (resp., un difféomorphisme) est appelé *submersion* (resp., *difféomorphisme*, ou *isomorphisme*) *de variétés de Poisson homogènes*.

2. Soit (P, Λ, Z) une variété de Poisson homogène. Un champ de vecteurs X sur P est un *automorphisme infinitésimal de variétés de Poisson homogènes* s'il vérifie les deux propriétés:

(i) X est un automorphisme infinitésimal de Poisson, *i.e.*,

$$\mathcal{L}(X)\Lambda = [X, \Lambda] = 0\,;$$

(ii) le crochet $[X, Z]$ est un champ de vecteurs hamiltonien, *i.e.*, il existe une fonction différentiable h_X sur P telle que

$$[X, Z] = \Lambda^\sharp(dh_X) = [\Lambda, h_X]\,.$$

Un automorphisme infinitésimal de variétés de Poisson homogènes X est dit *strict* s'il vérifie

$$[X, Z] = 0 .$$

2.13. Remarques.

1. La notion d'isomorphisme de variétés de Poisson homogènes introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble des variétés de Poisson homogènes. Si (P_i, Λ_i, Z_i), $i = 1, 2$ ou 3, sont trois variétés de Poisson homogènes, $f : P_1 \to P_2$ et $g : P_2 \to P_3$ deux isomorphismes de variétés de Poisson homogènes, $g \circ f : P_1 \to P_3$ est un isomorphisme de Poison homogène, strict si f et g le sont. Les hypothèses se traduisent en effet par

$$f_*\Lambda_1 = \Lambda_2 , \qquad f_*Z_1 = Z_2 + [\Lambda_2, h_2] ,$$
$$g_*\Lambda_2 = \Lambda_3 , \qquad g_*Z_2 = Z_3 + [\Lambda_3, h_3] ,$$

où h_2 et h_3 sont des fonctions différentiables, définies respectivement sur P_2 et sur P_3. Puisque $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, on peut écrire, avec les notations précisées en 1.1,

$$(g \circ f)_*\Lambda_1 = \Lambda_3 ,$$
$$(g \circ f)_*Z_1 = g_*Z_2 + g_*[\Lambda_2, h_2] = Z_3 + [\Lambda_3, h_3] + [g_*\Lambda_2, h_2 \circ g^{-1}] = Z_3 + [\Lambda_3, h_3 + h_2 \circ g^{-1}] .$$

2. Un champ de vecteurs sur une variété de Poisson homogène est un automorphisme infinitésimal (resp., un automorphisme infinitésimal strict) si et seulement si son flot est un groupe local à un paramètre d'isomorphismes (resp., d'isomorphismes stricts) de variétés de Poisson homogènes.

3. En utilisant le lemme 2.2, il est facile de voir que pour toute fonction différentiable f sur la variété de Poisson homogène (P, Λ, Z), le champ de vecteurs hamiltonien $\Lambda^\sharp(df)$ est un automorphisme infinitésimal de variétés de Poisson homogènes tangent au feuilletage caractéristique.

4. On peut exprimer les résultats de la proposition 2.11 en disant, avec les notations de cette proposition, qu'il existe un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes d'un voisinage de x_1 dans P_1 sur un voisinage de x_2 dans P_2, appliquant x_1 sur x_2. La proposition suivante généralise ce résultat.

2.14. Proposition.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi. On note $\mathcal{H}_E$ l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens sur cette variété de la forme

$$X = \Phi(u) = [\Lambda, u] + uE ,$$

la fonction différentiable u vérifiant

$$\mathcal{L}(E)u = 0 .$$

On note C_E la distribution sur M engendrée par $\mathcal{H}_E$.

1. *La distribution C_E est de classe C^∞ et complètement intégrable, et chaque feuille du feuilletage de Stefan qu'elle définit est contenue dans une feuille du feuilletage caractéristique de (M, Λ, E).*

2. *Chaque trajectoire du champ de vecteurs E est contenue dans une feuille du feuilletage de Stefan défini par C_E.*

3. *Soient P_1 et P_2 deux sous-variétés de codimension 1 de M, transverses au champ de vecteurs E, rencontrant, respectivement en x_1 et en x_2, une même feuille du feuilletage de Stefan défini par C_E. Il existe un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes (pour les structures induites, sur P_1 et P_2, au sens de 2.9, par la structure de Jacobi de M) d'un voisinage de x_1 dans P_1 sur un voisinage de x_2 dans P_2, appliquant x_1 sur x_2.*

Démonstration.

1. La distribution C_E est de classe C^∞, puisqu'elle est engendrée par la famille $\mathcal{H}_E$ de champs de vecteurs de classe C^∞. Soient u et v deux fonctions différentiables sur M vérifiant
$$\mathcal{L}(E)u = \mathcal{L}(E)v = 0\,.$$
On note $X = \Phi(u)$, $Y = \Phi(v)$ les champs de vecteurs hamiltoniens qui leur sont associés. Le flot Ψ de X est un groupe local à un paramètre d'isomorphismes locaux de la structure de Jacobi de M; cela signifie que, pour tout élément (t, x) du domaine de ce flot,
$$T\Psi_t\bigl(\Lambda(x)\bigr) = \Lambda\bigl(\Psi_t(x)\bigr)\,; \qquad T\Psi_t\bigl(E(x)\bigr) = E\bigl(\Psi_t(x)\bigr)\,.$$
Par suite, $(\Psi_t)_*Y$ n'est autre que le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction $(\Psi_t)_*v = v \circ \Psi_{-t}$, qui vérifie
$$\mathcal{L}(E)\bigl((\Psi_t)_*v\bigr) = (\Psi_t)_*\Bigl(\mathcal{L}\bigl((\Psi_{-t})_*E\bigr)v\Bigr) = (\Psi_t)_*\bigl(\mathcal{L}(E)v\bigr) = 0\,.$$
Ainsi, la distribution C_E satisfait les hypothèses du théorème de Sussmann (rappelé en 1.5), donc est complètement intégrable.

D'autre part, C_E est évidemment contenu dans la distribution caractéristique C, donc chacune des feuilles du feuilletage de Stefan qu'elle définit est contenue dans une feuille du feuilletage caractéristique de (M, Λ, E).

2. La fonction constante 1 vérifie évidemment $\mathcal{L}(E)1 = 0$, donc le champ de vecteurs hamiltonien qui lui est associé, c'est-à-dire E, appartient à $\mathcal{H}_E$.

3. Puisque x_1 et x_2 appartiennent à une même feuille de C_E, le point x_2 est $\mathcal{H}_E$-accessible à partir de x_1. Ainsi, en composant les flots d'une famille finie de champs de vecteurs éléments de $\mathcal{H}_E$, on peut former un isomorphisme de variétés de Jacobi d'un voisinage de x_1 dans M sur un voisinage de x_2 dans M appliquant x_1 sur x_2. Il suffit alors d'utiliser 2.11. □

2.15. Définition.

Soit (P, Λ_P) une variété de Poisson.

1. Une structure de Poisson *localement homogène* est définie sur (P, Λ_P) par la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i), $i \in I$, de la variété P, et la donnée, pour chaque $i \in I$, d'un champ de vecteurs Z_i défini sur U_i, vérifiant les conditions suivantes:

(i) pour tout $i \in I$, Z_i est un champ d'homothéties pour la structure de Poisson induite sur U_i,
$$\mathcal{L}(Z_i)(\Lambda_P\big|_{U_i}) = -\Lambda_P\big|_{U_i}\,;$$

(ii) pour tout couple $(i,j) \in I^2$ tel que $U_i \cap U_j$ soit non vide, l'application identique est un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes pour les structures induites sur $U_i \cap U_j$ par $\bigl(U_i, \Lambda_P\big|_{U_i}, Z_i\bigr)$ et $\bigl(U_j, \Lambda_P\big|_{U_j}, Z_j\bigr)$.

2. Soient (U'_j), $j \in J$, un autre recouvrement ouvert de la variété P, et pour tout $j \in J$, Z'_j un champ de vecteurs défini sur U'_j, ces données vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessus. On dira que ces nouvelles données définissent sur (P, Λ_P) la même structure de variété de Poisson localement homogène que les données (U_i, Z_i), $i \in I$, si pour tout $(i,j) \in I \times J$ tel que $U_i \cap U'_j$ soit non vide, l'application identique est un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes pour les structures induites sur $U_i \cap U'_j$ par $\bigl(U_i, \Lambda_P\big|_{U_i}, Z_i\bigr)$ et $\bigl(U'_j, \Lambda_P\big|_{U'_j}, Z'_j\bigr)$.

2.16. Proposition.

Soit (P, Λ_P) une variété de Poisson munie d'une structure localement homogène (au sens de la définition 2.15) définie par un recouvrement ouvert (U_i) de P et une famille (Z_i) de champs d'homothéties, $i \in I$. La distribution $\widehat{C}$ engendrée par la distribution caractéristique C (image de $\Lambda_P^\sharp$) et par la famille de champs de vecteurs (Z_i), $i \in I$, ne dépend que de la structure de variété de Poisson localement homogène de P, et non des données (U_i, Z_i) qui définissent cette structure. On l'appelle distribution caractéristique étendue de la variété de Poisson localement homogène P. Elle est complètement intégrable et définit un feuilletage de Stefan de P, appelé feuilletage caractéristique étendu.

Démonstration. Le fait que $\widehat{C}$ ne dépende que de la structure de variété de Poisson localement homogène de P résulte directement de la seconde partie de la définition 2.15.

Pour prouver que la distribution $\widehat{C}$ est complètement intégrable, il suffit de montrer que sa restriction à chacun des ouverts U_i l'est. Sur U_i, $\widehat{C}$ est engendrée par l'espace vectoriel somme de l'espace vectoriel de dimension 1 $\mathbf{R}Z_i$ et de l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens sur U_i. D'après le lemme 2.2, cet espace est en fait une sous-algèbre de Lie $\mathcal{G}_i$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur U_i, dont l'idéal dérivé est contenu dans l'idéal des champs de vecteurs hamiltoniens sur U_i. Montrons que cette algèbre de Lie vérifie la condition (iii) b) du théorème de Frobenius-Sussmann (1.5). Soient donc
$$X_j = \rho_j Z_i + [\Lambda, f_j]\,,$$
$j = 1$ ou 2, deux éléments de $\mathcal{G}_i$; ρ_1 et ρ_2 sont deux constantes réelles, f_1 et f_2 deux fonctions diférentiables sur U_i. On note Φ le flot de X_1. On a
$$[X_1, \Lambda] = -\rho_1 \Lambda\,,$$
donc pour tout $t \in \mathbf{R}$
$$(\Phi_t)_* \Lambda = \exp(\rho_1 t)\Lambda\,.$$

On en déduit

$$(\Phi_t)_* X_2 = \rho_2 (\Phi_t)_* Z_i + [\Lambda, \exp(\rho_1 t)(\Phi_t)_* f_2] \,.$$

Mais d'après le lemme 2.2

$$[X_1, Z_i] = [\Lambda, f_1 - \mathcal{L}(Z_i) f_1] \,.$$

Par intégration, on en déduit que $(\Phi_t)_* Z_i$ est de la forme

$$(\Phi_t)_* Z_i = Z_i + [\Lambda, w_t], ,$$

où w_t est une fonction différentiable. Finalement,

$$(\Phi_t)_* X_2 = \rho_2 Z_i + [\Lambda, \exp(\rho_1 t)(\Phi_t)_* f_2 + \rho_2 w_t] \,.$$

ce qui achève la démonstration, car le second membre de cette expression est un champ local de $\mathcal{G}_i$. $\square$

Dans la proposition suivante, on obtient une variété de Poisson localement homogène en quotientant une variété de Jacobi.

2.17. Proposition.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi dont le champ de vecteurs E ne s'annule en aucun point. On suppose que l'ensemble Q des trajectoires de E possède une structure de variété telle que la projection canonique $\varpi : M \to Q$ soit une submersion. Il existe sur Q une structure de Poisson localement homogène unique telle que ϖ soit un morphisme de Jacobi, admettant pour champs d'homothéties les projections sur Q des champs de vecteurs hamiltoniens de la forme $\Phi(h)$ associés à des fonctions h, définies sur des ouverts de M, vérifiant $i(E)dh = 1$.

Démonstration. Elle est semblable à celle du corollaire 2.5, les propositions à employer étant maintenant 2.9 et 2.11, au lieu de 2.3 et 2.4. $\square$

2.18. Remarques.

1. En adaptant les définitions 2.12 au cas des variétés de Poisson localement homogènes, il est facile de définir les notions d'isomorphismes (ou d'isomorphismes locaux) de variétés de Poisson localement homogènes, et d'automorphismes infinitésimaux de variétés de Poisson localement homogènes. Si (P_1, Λ_1) et (P_2, Λ_2) sont deux variétés de Poisson munies de structures localement homogènes, et $\psi : P_1 \to P_2$ un isomorphisme de variétés de Poisson localement homogènes, l'image $\psi_* C_1$ (resp., $\psi_* \widehat{C}_1$) de la distribution caractéristique (resp., de la distribution caractéristique étendue) de P_1 est la distribution caractéristique (resp., la distribution caractéristique étendue) de P_2.

2. Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, et $\widehat{S}$ une feuille de son feuilletage caractéristique étendu. On distinguera deux cas, selon la parité de la dimension de $\widehat{S}$.

Si $\widehat{S}$ est de dimension paire, c'est une feuille symplectique de P, c'est-à-dire une feuille du feuilletage caractéristique. Soit $\sigma_{\widehat{S}}$ sa 2-forme symplectique. Le champ de vecteurs Z est tangent à $\widehat{S}$, et sa restriction $Z|_{\widehat{S}}$ vérifie $[Z|_{\widehat{S}}, \Lambda|_{\widehat{S}}] = -\Lambda|_{\widehat{S}}$, ce qui équivaut à

$$\mathcal{L}(Z|_{\widehat{S}})\sigma_{\widehat{S}} = d i(Z|_{\widehat{S}})\sigma_{\widehat{S}} = \sigma_{\widehat{S}} \,.$$

On voit ainsi que $(\widehat{S}, \sigma_{\widehat{S}})$ est une variété symplectique exacte, et $Z\big|_{\widehat{S}}$ un champ d'homothéties de cette variété. La feuille $\widehat{S}$ n'est donc compacte que si elle est réduite à un point.

Si $\widehat{S}$ est de dimension impaire $2k+1$, elle est elle-même feuilletée en feuilles symplectiques de P, toutes de dimension $2k$. Le champ de vecteurs $Z\big|_{\widehat{S}}$ est tangent à $\widehat{S}$, transverse aux feuilles symplectiques, et son flot applique ces feuilles les unes sur les autres, par des transformations symplectiques conformes. Soit $\widehat{\sigma}$ la 2-forme sur $\widehat{S}$ qui induit sur chaque feuille symplectique la 2-forme symplectique de cette feuille, et qui vérifie

$$i(Z\big|_{\widehat{S}})\widehat{\sigma} = 0\,,$$

et $\widehat{\omega}$ la 1-forme sur $\widehat{S}$ qui induit sur chaque feuille symplectique la 1-forme nulle et qui vérifie

$$i(Z\big|_{\widehat{S}})\widehat{\omega} = 1\,.$$

Les formes $\widehat{\omega}$ et $\widehat{\sigma}$ vérifient

$$d\widehat{\omega} = 0\,, \qquad d\widehat{\sigma} = \widehat{\omega} \wedge \widehat{\sigma}\,,$$

et définissent sur $\widehat{S}$ une structure de *variété canonique*, au sens défini par l'un des auteurs (A. L. [11]).

Le cas particulier où $k = 0$ est très simple: $\widehat{S}$ est alors une trajectoire de Z, Λ_P est nul le long de cette trajectoire et les feuilles symplectiques contenues dans $\widehat{S}$, de dimension nulle, sont les points de $\widehat{S}$.

Des considérations analogues s'appliquent, au moins pour ce qui concerne les propriétés locales, aux feuilles du feuilletage caractéristique étendu d'une variété de Poisson localement homogène.

3. Dans les hypothèses de 2.9, l'image par la projection canonique ϖ de la distribution caractéristique C_M de la variété de Jacobi (M, Λ, E) est la distribution caractéristique étendue $\widehat{C}_P$ (au sens de la proposition 2.16) de la variété de Poisson localement homogène (P, Λ_P). Les feuilles du feuilletage de Stefan défini par $\widehat{C}_P$ sur P sont donc les projections des feuilles de la structure de Jacobi de M. Le champ de vecteurs E, qui engendre le noyau de $T\varpi$, étant tangent aux feuilles de la structure de Jacobi de M, on voit que la dimension de chaque feuille du feuilletage défini par $\widehat{C}_P$ sur P est inférieure d'une unité à la dimension de la feuille correspondante de la structure de Jacobi de M.

D'après la proposition 2.16, les relations entre les feuilles de la structure de Jacobi de M, leurs projections sur P et les feuilles symplectiques de (P, Λ_P), sont les suivantes.

(i) La projection sur P d'une feuille de dimension impaire de la structure de Jacobi de M est à la fois une feuille du feuilletage généralisé défini par $\widehat{C}_P$ et une feuille symplectique de (P, Λ_P). Pour chaque $i \in I$, le champ d'homothéties Z_i, défini sur l'ouvert U_i, est alors tangent à cette feuille, et c'est un automorphisme infinitésimal conforme pour la structure symplectique de cette feuille. S'il est défini sur la feuille entière, la forme symplectique de cette feuille est exacte.

(ii) La projection sur P d'une feuille de dimension paire de la structure de Jacobi de M est une feuille de dimension impaire du feuilletage défini par $\widehat{C}_P$. Elle est elle-même munie d'un feuilletage de codimension 1, dont les feuilles sont des feuilles symplectiques de la variété de Poisson (P, Λ_P). Dans chaque ouvert U_i, ces feuilles symplectiques se déduisent les unes des autres par le flot du champ d'homothéties Z_i, qui leur est transverse.

Les mêmes considérations s'appliquent, dans les hypothèses de la proposition 2.17, aux relations entre les feuilles de la structure de Jacobi de M et les feuilles de la structure de Poisson localement homogène quotient de Q.

3. Deux types de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi

3.1. Structure induite sur une sous-variété.

Dans toute cette partie, (M, Λ, E) est une variété de Jacobi, et N une sous-variété de M. On recherche des conditions suffisantes pour que la structure de Jacobi de M induise sur N, en un sens précisé ci-dessous, une structure de Jacobi. On présente successivement deux constructions de cette structure induite, et on montre qu'elles sont équivalentes.

3.2. Projections de Λ et de E sur N.

Dans tous les cas étudiés ici, la structure de Jacobi de N sera déduite de celle de M par la construction suivante. Soit $i_N : N \to M$ l'injection canonique, et $T_N M = i_N^*(TM)$ la restriction à N du fibré tangent à M. On choisira un morphisme de projection $\chi : T_N M \to TN$, c'est-à-dire un morphisme du fibré vectoriel $T_N M$ sur son sous-fibré TN dont la restriction à TN est l'identité. Le choix de χ équivaut au choix d'un supplémentaire de TN dans $T_N M$ (ce supplémentaire étant le noyau de χ). On définira alors sur N un champ de vecteurs E_N et un 2-tenseur antisymétrique Λ_N en posant

$$E_N = \chi \circ E \circ i_N \,; \qquad \Lambda_N = \chi \circ \Lambda \circ i_N \,. \tag{9}$$

Bien entendu, E_N et Λ_N dépendent non seulement de la structure de Jacobi de M et de la sous-variété N, mais aussi du choix de χ. En général ils ne vérifient pas les identités (3) nécessaires et suffisantes pour que (N, Λ_N, E_N) soit une variété de Jacobi.

On montrera plus loin (c'est précisément le but principal de cette partie) que lorsque la sous-variété N vérifie certaines conditions, le morphisme de projection χ peut être choisi de manière telle que (N, Λ_N, E_N) soit une variété de Jacobi. On verra de plus que Λ_N et E_N sont entièrement déterminés par la structure de Jacobi de M et par la sous-variété N (selon les cas, soit parce que Λ_N et E_N ne dépendent pas du choix de χ, soit parce que, compte tenu des conditions vérifiées par N, χ est déterminé de manière unique par la structure de Jacobi de M et la donnée de N).

3.3. Crochet de Jacobi de fonctions définies sur N.

On va donner une autre construction, équivalente à celle exposée ci-dessus, de la structure de Jacobi de N, en termes du crochet de Jacobi.

Supposons d'abord le morphisme de projection χ donné. En considérant un voisinage tubulaire de N dans M construit au moyen du supplémentaire $\ker \chi$ de TN dans $T_N M$, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de N dans M et une submersion π de U sur N vérifiant

$$\pi\big|_N = \pi \circ i_N = \mathrm{id}_N\,; \qquad T_N\pi = \chi\,. \tag{10}$$

Pour tout couple (f,g) de fonctions différentiables définies sur N (ou sur deux ouverts de N d'intersection non vide), on pose

$$\{f,g\}_N = i_N^*\{\pi^*f, \pi^*g\}\,. \tag{11}$$

La loi de composition ainsi définie est évidemment antisymétrique, et s'exprime au moyen de Λ_N et de E_N par la formule

$$\{f,g\}_N = i(\Lambda_N)(df\wedge dg) + f i(E_N)dg - g i(E_N)df\,. \tag{12}$$

Réciproquement, la donnée d'une submersion π d'un voisinage ouvert U de N dans M sur N, vérifiant $\pi\big|_N = \mathrm{id}_N$, détermine un morphisme de projection $\chi = T_N\pi : T_NM \to TN$. On peut alors définir E_N, Λ_N et $\{f,g\}_N$ grâce aux formules (9), (11) ou (12) ci-dessus.

Bien entendu, (N, Λ_N, E_N) est une variété de Jacobi (c'est-à-dire Λ_N et E_N vérifient les identités (3)) si et seulement si la loi de composition définie par (12) satisfait l'identité de Jacobi. Lorsque c'est le cas, cette loi de composition n'est autre que le crochet de Jacobi sur (N, Λ_N, E_N).

3.4. Structures induites par deux structures conformément équivalentes.

La submersion π d'un voisinage ouvert U de N dans M sur N, vérifiant $\pi\big|_N = \mathrm{id}_N$, est supposée choisie. On note $\chi = T_N\pi$ le morphisme de projection correspondant à π.

Soit a une fonction différentiable définie sur U ne s'annulant en aucun point. En appliquant la formule (11) on peut définir deux lois de composition sur l'espace des fonctions différentiables sur N, induites, l'une par la structure de Jacobi initialement donnée sur M, l'autre par la nouvelle structure de Jacobi a-conforme à la précédente. Ces deux lois sont données par les formules, dans lesquelles f et g sont deux fonctions différentiables sur N,

$$\{f,g\}_N = i_N^*\{\pi^*f, \pi^*g\}\,;$$
$$\{f,g\}_N^a = i_N^*\{\pi^*f, \pi^*g\}^a = i_N^*\left(\frac{1}{a}\{a\pi^*f, a\pi^*g\}\right)\,.$$

On pose

$$a_N = a\big|_N = i_N^* a\,.$$

Il est naturel de rechercher des conditions dans lesquelles les deux lois de composition ci-dessus définies se déduisent l'une de l'autre par une formule de même forme que (6), la fonction a étant remplacée par a_N. Le lemme ci-dessous indique de telles conditions.

3.5. Lemme.

Soit ν^*N le fibré conormal à N. On suppose son image $\Lambda^\sharp(\nu^*N)$ par le morphisme $\Lambda^\sharp$ contenue dans le noyau du morphisme de projection χ. Alors on a, pour tout couple (f,g) de fonctions différentiables sur N,

$$\{f,g\}_N^a = \frac{1}{a_N}\{a_Nf, a_Ng\}_N\,.$$

Par suite, si l'une des lois de composition $(f,g) \mapsto \{f,g\}_N$ ou $(f,g) \mapsto \{f,g\}_N^a$ satisfait l'identité de Jacobi, l'autre la satisfait aussi.

En particulier, si $a_N = 1$, ces deux lois de composition coïncident.

Démonstration. On pose, pour alléger l'écriture,

$$B(f,g) = \{f,g\}_N^a - \frac{1}{a_N}\{a_N f, a_N g\}_N .$$

On a:

$$\begin{aligned}
B(f,g) &= i_N^*\left(\frac{1}{a}\{a\pi^* f, a\pi^* g\}\right) - \frac{1}{a_N} i_N^*\Big(\big\{\pi^*(a_N f), \pi^*(a_N g)\big\}\Big)\\
&= \frac{1}{a_N} i_N^*\Big(\{a\pi^* f, a\pi^* g\} - \big\{\pi^*(a_N f), \pi^*(a_N g)\big\}\Big)\\
&= \frac{1}{a_N} i_N^*\Big(\big\{(a-\pi^* a_N)\pi^* f, (a-\pi^* a_N)\pi^* g\big\}\\
&\qquad + \big\{(a-\pi^* a_N)\pi^* f, \pi^*(a_N g)\big\} + \big\{\pi^*(a_N f), (a-\pi^* a_N)\pi^* g\big\}\Big) .
\end{aligned}$$

La fonction $a - \pi^* a_N$ étant nulle sur N, on obtient

$$\begin{aligned}
i_N^*\Big(\big\{(a-\pi^* a_N)\pi^* f, (a-\pi^* a_N)\pi^* g\big\}\Big) &= 0 ;\\
i_N^*\Big(\big\{(a-\pi^* a_N)\pi^* f, \pi^*(a_N g)\big\}\Big) &= f i_N^*\Big(i(\Lambda)\big(d(a-\pi^* a_N) \wedge d(\pi^* a_N g)\big)\Big)\\
&\qquad - a_N f g\, i_N^*\big(i(E) d(a-\pi^* a_N)\big) ;\\
i_N^*\Big(\big\{\pi^*(a_N f), (a-\pi^* a_N)\pi^* g\big\}\Big) &= g i_N^*\Big(i(\Lambda)\big(d(\pi^* a_N f) \wedge d(a-\pi^* a_N)\big)\Big)\\
&\qquad + a_N f g\, i_N^*\big(i(E) d(a-\pi^* a_N)\big) .
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
a_N B(f,g) &= f i_N^*\Big(i(\Lambda)\big(d(a-\pi^* a_N) \wedge d(\pi^* a_N g)\big)\Big)\\
&\qquad + g i_N^*\Big(i(\Lambda)\big(d(\pi^* a_N f) \wedge d(a-\pi^* a_N)\big)\Big)\\
&= f i_N^*\Big(i\big(\Lambda^\sharp(d(a-\pi^* a_N))\big)\big(\pi^* d(a_N g)\big)\Big)\\
&\qquad - g i_N^*\Big(i\big(\Lambda^\sharp(d(a-\pi^* a_N))\big)\big(\pi^* d(a_N f)\big)\Big) .
\end{aligned}$$

Mais puisque $a - \pi^* a_N$ est nulle sur N, sa différentielle restreinte à N est une section du fibré conormal $\nu^* N$. La valeur, en chaque point de N, du champ de vecteurs $\Lambda^\sharp\big(d(a-\pi^* a_N)\big)$ appartient à $\Lambda^\sharp(\nu^* N)$, donc au noyau de $\chi = T_N \pi$. Par suite, $a_N B(f,g)$ est nul. □

On va maintenant indiquer deux cas où il existe, sur la sous-variété N de la variété de Jacobi (M, Λ, E), une structure de Jacobi induite.

En utilisant la définition du champ caractéristique d'une variété de Jacobi, rappelée en 1.5, et la notion de morphisme de Jacobi, rappelée en 1.6, on établit aisément la proposition suivante, qui donne un premier type de structure induite.

3.6. Proposition.

Pour qu'il existe sur la sous-variété N de (M, Λ, E) une structure de Jacobi telle que l'injection canonique i_N soit un morphisme de Jacobi, il faut et il suffit que la restriction C_N du champ caractéristique C à la sous-variété N soit contenue dans TN. Lorsque c'est le cas, cette structure de Jacobi sur N est unique.

3.7. Commentaire.

Dans les hypothèses de la proposition précédente, le champ de vecteurs E_N et le 2-tenseur Λ_N qui définissent la structure de Jacobi de N peuvent être définis par les formules (9); le morphisme de projection $\chi : T_N M \to TN$ peut dans ce cas être choisi de manière arbitraire, E_N et Λ_N sont indépendants de ce choix et vérifient évidemment les identités (3). Le champ caractéristique de (N, Λ_N, E_N) n'est autre que C_N. L'intersection de N avec chaque feuille de la structure de Jacobi de M est un ouvert de cette feuille, et chaque composante connexe de cette intersection est une feuille de la structure de Jacobi de N.

Les conditions imposées à N par la proposition 3.6 sont évidemment très restrictives. Le théorème 3.9 ci-après indique un autre cas où il existe sur N une structure de Jacobi induite. Le lemme ci-dessous indique plusieurs formes équivalentes des conditions que devra vérifier N pour que le théorème 3.9 lui soit applicable.

3.8. Lemme.

Soit x un point de N. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(A) $$T_x N + \Lambda^\sharp(\nu_x^* N) = T_x M\,;$$

(B) $$T_x N \oplus \Lambda^\sharp(\nu_x^* N) = T_x M\,;$$

(C) $$T_x N \cap \Lambda^\sharp(\nu_x^* N) = \{0\} \quad \textit{et} \quad \nu_x^* N \cap \ker \Lambda_x^\sharp = \{0\}\,;$$

(D) $$T_x N \cap \Lambda^\sharp(\nu_x^* N) = \{0\} \quad \textit{et} \quad T_x N + \Lambda^\sharp(T_x^* M) = T_x M\,.$$

Démonstration. Puisque $\nu_x^* N$ est l'annulateur de $T_x N$ dans $T_x^* M$, sa dimension est égale à la codimension de $T_x N$ dans $T_x M$. La condition (A) est donc vérifiée si et seulement si $\Lambda^\sharp(\nu_x^* N)$ est un sous-espace vectoriel de $T_x M$ de même dimension que $\nu_x^* N$ dont l'intersection avec $T_x N$ est $\{0\}$. Ceci prouve l'équivalence de (A), (B) et (C). Enfin la seconde condition (C) est équivalente à la seconde condition (D), car on passe de l'une à l'autre par dualité. □

3.9. Théorème.

On suppose la sous-variété N de la variété de Jacobi (M, Λ, E) telle qu'en tout point x de N, les conditions équivalentes (A) *à* (D) *du lemme 3.8 soient vérifiées. Soit $\chi : T_N M \to TN$ le morphisme de projection ayant pour noyau $\Lambda^\sharp(\nu^* N)$, qui d'après* (B) *est un supplémentaire de TN dans $T_N M$. Alors le 2-tenseur Λ_N et le champ de vecteurs E_N, définis par les formules* (9)*, vérifient les identités* (3)*, donc déterminent sur N une structure de Jacobi induite par celle de M.*

Démonstration. Soit π une submersion d'un voisinage ouvert U de N dans M sur N vérifiant les conditions (10). On doit montrer que la loi de composition définie sur l'espace des fonctions différentiables sur N par les formules (11) et (12) satisfait l'identité de Jacobi. Soient f, g et h trois fonctions différentiables sur N. On a

$$\begin{aligned}\big\{\{f,g\}_N,h\big\}_N &= i_N^*\{\pi^* i_N^*\{\pi^*f,\pi^*g\},\pi^*h\}\\ &= i_N^*\Big(\{k,\pi^*h\}+\big\{\{\pi^*f,\pi^*g\},\pi^*h\big\}\Big)\,,\end{aligned}$$

où on a posé, pour alléger l'écriture,

$$k=(i_N\circ\pi)^*\{\pi^*f,\pi^*g\}-\{\pi^*f,\pi^*g\}\,.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}i_N^*\big(\{k,\pi^*h\}\big) &= i_N^*\Big(i\big(\Lambda^\sharp(dk)\big)d(\pi^*h)\Big)+i_N^*\big(k\,i(E)d(\pi^*h)\big)-i_N^*\big(\pi^*h\,i(E)dk\big)\\ &= -h\,i_N^*\big(i(E)dk\big)\,.\end{aligned}$$

En effet, la fonction k étant nulle sur N, la restriction à N de $\Lambda^\sharp(dk)$ est une section de $\Lambda^\sharp(\nu^*N)$, donc du noyau de $\chi=T_N\pi$, de sorte que le terme $i_N^*\Big(i\big(\Lambda^\sharp(dk)\big)d(\pi^*h)\Big)$ est nul. De même, $i_N^*\big(k\,i(E)d(\pi^*h)\big)$ est nul.

Considérons d'abord le cas où la restriction $E\big|_N$ de E à N est une section de TN. Puisque la fonction k est nulle sur N, $i_N^*\big(i(E)dk\big)$ est nul, et on a

$$i_N^*\big(\{k,\pi^*h\}\big)=0\,.$$

Par suite

$$\big\{\{f,g\}_N,h\big\}_N=i_N^*\Big(\big\{\{\pi^*f,\pi^*g\},\pi^*h\big\}\Big)\,.$$

On a de même les deux égalités déduites de celle-ci par permutation circulaire de f, g et h. En ajoutant, on obtient une égalité dont le membre de droite est nul, car le crochet de Jacobi sur M (appliqué aux fonctions π^*f, π^*g et π^*h) vérifie l'identité de Jacobi. Ce résultat montre que la loi de composition $(f,g)\mapsto\{f,g\}_N$ définie par (11) satisfait l'identité de Jacobi.

Considérons maintenant le cas général, où $E\big|_N$ n'est pas nécessairement une section de TN. Remplaçons la structure de Jacobi de M par une autre, a-conforme à celle initialement donnée, la fonction a (définie sur un voisinage ouvert de N dans M) ne s'annulant pas et étant égale à 1 sur N. D'après le lemme 3.5, ces deux structures de Jacobi induisent, sur l'ensemble des fonctions différentiables sur N, la même loi de composition $(f,g)\mapsto\{f,g\}_N$. Pour montrer que cette loi satisfait l'identité de Jacobi il suffit, d'après le résultat établi ci-dessus, de montrer qu'on peut choisir la fonction a de telle sorte que la restriction à N du champ de vecteurs E^a (associé à la nouvelle structure de Jacobi de M) soit une section de TN. Le lemme 3.8 montre que la restriction de $\Lambda^\sharp$ au fibré conormal ν^*N est un isomorphisme de ν^*N sur son image, qui n'est autre que le noyau du morphisme de projection χ. Il existe donc une section différentiable unique η de ν^*N telle que

$$\Lambda^\sharp\eta=(\mathrm{id}_{T_NM}-\chi)\circ E\circ i_N\,. \tag{13}$$

Un théorème de prolongement dû à Weinstein [20] (obtenu par intégration sur les fibres d'un voisinage tubulaire de N dans M) montre précisément qu'il existe une fonction différentiable a, définie sur un voisinage ouvert de N dans M, égale à 1 sur N, qui vérifie

$$i_N^* da = -\eta\,.$$

En restreignant si nécessaire le voisinage ouvert U de N sur lequel est définie la submersion π, on peut faire en sorte qu'il soit contenu dans le domaine de définition de a, et que cette fonction ne s'annule pas sur U. Le champ de vecteurs E^a associé à la nouvelle structure de Jacobi de U vérifie, d'après (7) et (13),

$$E^a \circ i_N = E \circ i_N - (\mathrm{id}_{T_N M} - \chi) \circ E \circ i_N = \chi \circ E \circ i_N\,,$$

ce qui montre que $E^a\big|_N$ est une section de TN. $\square$

3.10. Commentaires et remarques.

1. Les conditions équivalentes (A) à (D) du lemme 3.8 sont *ouvertes*: si elles sont satisfaites en un point x de la sous-variété N, elles le sont également en tout point d'un voisinage ouvert V de x dans N; par suite, le théorème 3.9 s'applique à V, donc il existe sur V une structure de Jacobi induite.

Par contre, la condition $C_x \subset T_x N$, que N devrait satisfaire pour que la proposition 3.6 lui soit applicable, n'est pas ouverte.

2. D'après les formules (9), pour tout point x de N, l'application linéaire $\Lambda_N^\sharp(x) : T_x^* N \to T_x N$ est donnée par la formule

$$\Lambda_N^\sharp(x) = \chi_x \circ \Lambda^\sharp(x) \circ {}^t\chi_x\,,$$

où ${}^t\chi_x : T_x^* N \to T_x^* M$ est l'injection transposée de la projection $\chi_x : T_x M \to T_x N$.

On montre aisément que l'hypothèse du théorème 3.9,

$$\Lambda^\sharp(\nu^* N) = \ker \chi\,,$$

implique

$$\mathrm{Image}(\Lambda^\sharp \circ {}^t\chi) \subset TN\,.$$

On peut donc écrire

$$Ti_N \circ \Lambda_N^\sharp = \Lambda^\sharp \circ {}^t\chi\,.$$

En particulier, pour tout $x \in N$,

$$\mathrm{Image}\,\Lambda_N^\sharp(x) = \mathrm{Image}(\Lambda^\sharp(x) \circ {}^t\chi_x) = T_x N \cap \mathrm{Image}\,\Lambda^\sharp(x)\,. \tag{14}$$

D'autre part, avec les notations de la démonstration du théorème 3.9, on a

$$E_N(x) = E^a(x) = E(x) - \Lambda^\sharp\big(\eta(x)\big)\,,$$

où η est une section différentiable de $\nu^* N$. Ceci prouve que $E_N(x)$ appartient à l'image de $\Lambda_N^\sharp(x)$ si et seulement si $E(x)$ appartient à l'image de $\Lambda^\sharp(x)$. Les dimensions des espaces caractéristiques $C(x)$ et $C_N(x)$, respectivement des structures de Jacobi de M et de N au point x, sont donc de même parité, et on a

$$C_N(x) = \operatorname{Image} \Lambda_N^\sharp(x) + E_N(x) = T_x N \cap C(x)\,.$$

Les feuilles de la structure de Jacobi induite sur N sont donc (tout comme dans le cas de la proposition 3.6) les composantes connexes des traces sur N des feuilles de la structure de Jacobi de M. La dimension de chaque feuille de N est de même parité que la dimension de la feuille correspondante de M.

3. Toujours dans les hypothèses du théorème 3.9, la relation (B) de 3.8 montre que pour tout $x \in N$, $\Lambda^\sharp(x)$ est un isomorphisme de $\nu_x^* N$ sur un supplémentaire de $T_x N$ dans $T_x M$. Par suite, la codimension de N est paire. On voit ainsi que la dimension d'une sous-variété N à laquelle le théorème 3.9 s'applique est nécessairement de même parité que la dimension de M.

4. Considérons le cas où le champ de vecteurs E est nul, c'est-à-dire où (M, Λ) est une variété de Poisson. Soit N une sous-variété de M vérifiant, en chacun de ses points, les propriétés du lemme 3.8. La structure induite sur N, au sens du théorème 3.9, par la structure de Poisson de M, est alors une structure de Poisson; on retrouve ainsi un résultat dû à A. Weinstein [21]. Voir [13] pour des applications à la réduction des variétés de Poisson.

Supposons de plus la variété de Poisson (M, Λ) munie d'une structure homogène définie par un champ d'homothéties Z. On voit alors que le champ de vecteurs Z_N, défini sur la sous-variété N par

$$Z_N = \chi \circ Z \circ i_N\,,$$

est un champ d'homothéties pour (N, Λ_N). En effet, en procédant comme dans la démonstration de 3.9, on voit qu'il existe une fonction différentiable h, définie sur un voisinage ouvert de N dans M, constante sur N, qui vérifie

$$\Lambda^\sharp(i_N^* dh) = (\mathrm{id}_{T_N M} - \chi) \circ Z \circ i_N\,,$$

donc Z_N n'est autre que la restriction à N de $Z - \Lambda^\sharp(dh)$, qui est un champ d'homothéties pour (M, Λ) défini sur un voisinage de N

On voit de même que si (M, Λ) est munie d'une structure localement homogène, celle-ci induit sur (N, Λ_N) une structure localement homogène, dont le feuilletage caractéristique (resp., le feuilletage caractéristique étendu) est la trace sur N du feuilletage caractéristique (resp., du feuilletage caractéristique étendu) de M.

3.11. Exemples.

Considérons le cas où (M, Λ, E) est une variété de Jacobi transitive (c'est-à-dire dont le champ caractéristique C est égal à TM), et soit N une sous-variété de M. Si cette sous-variété vérifie les hypothèses du théorème 3.9, les remarques 3.10.2 et 3.10.3 montrent que la structure de Jacobi induite sur N est transitive, et que la dimension de N est de même parité que celle de M. Examinons successivement les deux cas.

1. On suppose M de dimension impaire $2p+1$. On sait alors [6], [10], que M est une variété Pfaffienne, c'est-à-dire une variété munie d'une 1-forme de contact α (partout de classe $2p+1$). Le champ de vecteurs E et le 2-tenseur Λ sont déterminés par α (et réciproquement) au moyen des formules:

$$i(E)\alpha = 1\,; \qquad i(E)\,d\alpha = 0\,;$$
$$i(\Lambda^\sharp\xi)\alpha = 0 \quad \text{et} \quad i(\Lambda^\sharp\xi)d\alpha = -\big(\xi - \alpha\, i(E)\xi\big) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in T^*M\,.$$

On vérifie alors que la sous-variété N de M satisfait les hypothèses du théorème 3.9 si et seulement si la 2-forme $\alpha_N = i_N^*\alpha$ induite par α sur N est de contact (*i.e.*, $\alpha_N \wedge (d\alpha_N)^q$ partout non nulle, la dimension de N, nécessairement impaire, étant $2q+1$). Lorsque c'est le cas, la structure de Jacobi induite sur N n'est autre que celle associée à la structure Pfaffienne définie par α_N; le champ de vecteurs E_N et le 2-tenseur Λ_N sont liés à α_N par les mêmes formules que celles, indiquées ci-dessus, qui lient E et Λ à α.

2. On suppose M de dimension paire $2p$. On sait alors [6], [10], que M est une variété localement conformément symplectique, c'est-à-dire une variété munie d'une 2-forme σ partout de rang $2p$, et d'une 1-forme ω, qui vérifient

$$d\sigma + \omega \wedge \sigma = 0\,. \tag{15}$$

Le champ de vecteurs E et le 2-tenseur Λ sont déterminés au moyen de σ et de ω (et réciproquement) par les formules

$$i(E)\sigma = -\omega\,, \qquad i(\Lambda^\sharp\beta)\sigma = -\beta \quad \text{pour tout} \quad \beta \in T^*M\,.$$

On vérifie alors que la sous-variété N de M satisfait les hypothèses du théorème 3.9 si et seulement si la 1-forme $\omega_N = i_N^*\omega$ et la 2-forme $\sigma_N = i_N^*\sigma$, induites sur N, respectivement, par ω et par σ, définissent sur N une structure localement conformément symplectique. Lorsque c'est le cas, la structure de Jacobi induite sur N n'est autre que celle associée à la structure localement conformément symplectique définie par ω_N et σ_N; le champ de vecteurs E_N et le 2-tenseur Λ_N sont liés à ω_N et σ_N par les mêmes formules que celles, indiquées ci-dessus, qui lient E et Λ à ω et σ.

La proposition suivante, où l'on revient au cas où (M,Λ,E) est une variété de Jacobi non nécessairement transitive et N une sous-variété de M, explicite les relations qui existent entre les structures de Jacobi induites, d'une part sur N par la structure de Jacobi de M, d'autre part sur chaque feuille de N par la structure de Jacobi transitive de la feuille correspondante de M.

3.12. Proposition.

Soit (M,Λ,E) une variété de Jacobi, N une sous-variété de M, x un point de N, et S la feuille de la structure de Jacobi de M qui passe par x. Alors il existe, sur un voisinage de x dans N, une structure de Jacobi induite par celle de M au sens du théorème 3.9, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) *les sous-variétés N et S sont transverses en x, i.e.,*

$$T_xN + T_xS = T_xM\,;$$

(ii) *il existe une structure de Jacobi sur un voisinage de x dans $N \cap S$ induite, au sens du théorème 3.9, par la structure de Jacobi transitive dont est munie S en tant que feuille de M.*

Lorsque c'est le cas, la structure de Jacobi induite sur $N \cap S$ au voisinage de x n'est autre que la structure transitive dont elle est munie en tant que feuille de N

Démonstration. Si N et S sont transverses en x, on sait que $N \cap S$ possède, au voisinage de x, une structure de sous-variété de S. Les espaces tangent et conormal (dans S) à $N \cap S$ au point x sont alors, respectivement, $T_xN \cap T_xS$ et $i_S^*(\nu_x^* N)$, où $i_S : S \to M$ est l'injection canonique et $\nu_x^* N$ l'espace conormal à N (dans M) en x. Le 2-tenseur Λ_S et le champ de vecteurs E_S qui définissent la structure de Jacobi transitive de S vérifient

$$\Lambda_S^\sharp(x) \circ i_S^* = \Lambda^\sharp(x)\,; \qquad E_S(x) = E(x)\,. \tag{16}$$

D'après la remarque 3.10.1, il suffit de vérifier l'équivalence des relation

$$T_xN + \Lambda^\sharp(\nu_x^* N) = T_xM$$

d'une part, et

$$T_xN + T_xS = T_xM \qquad \text{et} \qquad T_xN \cap T_xS + \Lambda_S^\sharp\big(i_S^*(\nu_x^* N)\big) = T_xS$$

d'autre part. Or cela résulte aisément de l'inclusion $\Lambda^\sharp(\nu_x^* N) \subset T_xS$ et de la première relation (16). □

3.13. Corollaire.

Les hypothèses et notations sont celles de 3.12. Il existe une structure de Jacobi induite, au sens du théorème 3.9, sur un voisinage de x dans N, dans chacun des cas suivants.

1. *La dimension de S est paire et N vérifie*

$$T_xN \oplus T_xS = T_xM\,;$$

la feuille de cette structure induite passant par le point x est alors réduite à $\{x\}$.

2. *La dimension de S est impaire et N vérifie*

(i) $T_xN + T_xS = T_xM$,

(ii) $T_xN \cap T_xS$ *est de dimension* 1 *et n'est pas contenu dans l'image de* $\Lambda_x^\sharp$*;*

la feuille de cette structure induite passant par x est alors de dimension 1.

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans chacun de ces deux cas, $N \cap S$ possède, au voisinage de x, une structure de Jacobi transitive induite par celle de S. □

4. Un troisième type de sous-variétés remarquables d'une variété de Jacobi

Afin d'étudier la structure transverse d'une feuille S de la variété de Jacobi (M, Λ, E), on peut songer à considérer une sous-variété N de M, coupant S transversalement en un point x, et de dimension égale à la codimension de S, c'est-à-dire vérifiant

$$T_xN \oplus T_xS = T_xM\,.$$

Lorsque la dimension de S est paire, le corollaire 3.13 montre que le théorème 3.9 s'applique à N, au voisinage de x. On voit ainsi qu'il existe, sur un voisinage de x dans N, une structure de Jacobi induite par celle de M. On verra plus loin (paragraphe 6) qu'à un difféomorphisme conforme de Jacobi près, le germe de cette structure au point x ne dépend que de la feuille S, non des choix de x et de N. On obtient donc bien ainsi une structure transverse de la feuille S.

Par contre, lorsque la dimension de la feuille S est impaire, le théorème 3.9 ne s'applique pas à N: le corollaire 3.13 montre en effet que pour que ce théorème s'applique, l'intersection de N et de S devrait être de dimension 1 (ou, plus généralement, de dimension impaire), non de dimension 0.

On va voir (théorème 4.2) qu'il existe un autre type de structure induite utilisable pour l'étude de la structure transverse des feuilles de M de dimension impaire. Le lemme ci-dessous indique plusieurs formes équivalentes des conditions que devra vérifier la sous-variété N pour que le théorème 4.2 lui soit applicable.

4.1. Lemme.

Soit N une sous-variété de la variété de Jacobi (M, Λ, E), et x un point de N. On suppose vérifiée la condition

(i) *le vecteur $E(x)$ n'est pas tangent à N.*

On note W_x le sous-espace vectoriel de T_xM engendré par T_xN et par $E(x)$, et W_x^0 son annulateur (sous-espace vectoriel de T_x^*M constitué par les formes qui s'annulent sur W_x). Les conditions suivantes sont équivalentes:

(ii A) $$W_x + \Lambda^\sharp(W_x^0) = T_xM\,;$$
(ii B) $$W_x \oplus \Lambda^\sharp(W_x^0) = T_xM\,;$$
(ii C) $$W_x \cap \Lambda^\sharp(W_x^0) = \{0\} \quad \text{et} \quad W_x^0 \cap \ker \Lambda_x^\sharp = \{0\}\,;$$
(ii D) $$W_x \cap \Lambda^\sharp(W_x^0) = \{0\} \quad \text{et} \quad W_x + \Lambda^\sharp(T_x^*M) = T_xM\,.$$

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme 3.8, T_xN et ν_x^*N étant remplacés, respectivement, par W_x et W_x^0. □

4.2. Théorème.

On suppose la sous-variété N de la variété de Jacobi (M, Λ, E) telle qu'en tout point x de N, la condition (i) *et les conditions équivalentes* (ii A) *à* (ii D) *du lemme 4.1 soient vérifiées. On note W le sous-fibré de T_NM engendré par $E\big|_N$ et par TN, et W^0 son annulateur.*

1. *Soit $\chi : T_NM \to TN$ le morphisme de projection ayant pour noyau le sous-fibré de T_NM, supplémentaire de TN d'après* (i) *et* (ii B)*, engendré par $E\big|_N$ et par $\Lambda^\sharp(W^0)$. Alors*

le champ de vecteurs E_N défini par la première formule (9) *est nul, et le* 2*-tenseur Λ_N défini par la seconde formule* (9) *vérifie l'identité* (4)*, donc définit sur N une structure de Poisson, induite par la structure de Jacobi de M.*

2. *Soit η l'unique* 1*-forme le long de N ayant pour noyau $TN \oplus \Lambda^\sharp(W^0)$ et vérifiant*

$$\langle \eta, E \rangle = 1\,.$$

Alors le champ de vecteurs le long de N

$$Z = \Lambda^\sharp(\eta)$$

est tangent à N et vérifie

$$[Z, \Lambda_N] = -\Lambda_N\,.$$

En d'autres termes, (N, Λ_N, Z) est une variété de Poisson homogène.

Démonstration. Puisque le champ de vecteurs E n'est tangent à N en aucun point, ses courbes intégrales engendrent, au voisinage de N, une sous-variété N_1 de M contenant N, de dimension $\dim N + 1$. En tout point x de N, T_xN_1 n'est autre que le sous-espace W_x engendré par T_xN et par $E(x)$. Par suite, N_1 vérifie en tout point de N les conditions équivalentes du lemme 3.8. Puisque ces conditions sont ouvertes, on peut en restreignant N_1 faire en sorte qu'elles soient vérifiées en tout point de N_1. D'après le théorème 3.9, il existe sur N_1 une structure de Jacobi induite par celle de M.

On peut alors considérer N comme une sous-variété de codimension 1 de N_1, transverse à la restriction de E à N_1. La structure de Poisson homogène induite sur N, au sens de 2.9, par la structure de Jacobi de N_1, est précisément celle définie dans l'énoncé. $\square$

4.3. Remarques.

1. La condition (i) et les conditions équivalentes (ii A) à (ii D) du lemme 4.1 sont ouvertes. Si elles sont vérifiées en un point de la sous-variété N, elles sont vérifiées aussi sur tout un voisinage ouvert de ce point dans N. Le théorème 4.2 s'applique à ce voisinage, et montre qu'il possède une structure de Poisson homogène induite par la structure de Jacobi de M.

2. En appliquant la remarque 3.10.2 à la sous-variété notée N_1 dans la démonstration du théorème 4.2, et en utilisant la remarque 2.18.3, on voit que pour tout point x de N, l'espace caractéristique étendu $\widehat{C}_N(x)$ (sous-espace vectoriel de T_xN engendré par l'espace caractéristique $C_N(x) = \operatorname{Im}\Lambda_N^\sharp(x)$ et par le vecteur $Z(x)$) vérifie

$$\widehat{C}_N(x) = T_xN \cap C(x) = T_xN \cap \operatorname{Im}\Lambda^\sharp(x)\,.$$

On voit aussi que les dimensions de $\widehat{C}_N(x)$ et de $C(x)$ sont nécessairement de parités différentes.

3. De même, en appliquant à N_1 la remarque 3.10.3 et en notant que $\dim N = \dim N_1 - 1$, on voit que la dimension d'une sous-variété N à laquelle le théorème 4.2 s'applique et la dimension de M sont nécessairement de parités différentes.

4. On peut donner une autre démonstration du théorème 4.2, consistant à construire d'abord une sous-variété P de codimension 1 de M contenant N et transverse au champ E. La proposition 2.9 montre alors qu'il existe sur P une structure de Poisson homogène induite par la structure de Jacobi de M. On vérifie alors, en utilisant les hypothèses vérifiées par N, que cette variété est une sous-variété de Poisson de P au sens défini par Weinstein [21].

4.4. Exemples.

Considérons le cas où (M, Λ, E) est une variété de Jacobi transitive, et N une sous-variété de M. En utilisant les notations du paragraphe 3.11, et en appliquant les résultats de ce paragraphe à la sous-variété N_1 considérée dans la démonstration du théorème 4.2, on obtient aisément les résultats énoncés ci-dessous.

1. On suppose M de dimension impaire $2p+1$. Sa structure de Jacobi transitive est alors une structure Pfaffienne définie par une 1-forme de contact α. Soit $\alpha_N = i_N^*\alpha$ la 1-forme induite par α sur N. La sous-variété N satisfait les hypothèses du théorème 4.2 si et seulement si la 2-forme $d\alpha_N = i_N^*(d\alpha)$, induite sur N par $d\alpha$, est symplectique, ce qui impose à N d'être de dimension paire. La structure de Poisson induite sur N est la structure transitive associée à la structure symplectique exacte définie par $d\alpha_N$, et le champ d'homothéties Z est l'unique champ de vecteurs sur N vérifiant $i(Z)d\alpha_N = \alpha_N$.

2. On suppose M de dimension paire $2p$. Sa structure de Jacobi transitive est alors une structure localement conformément symplectique définie par une 2-forme σ partout de rang $2p$, et une 1-forme ω vérifiant l'identité (15). Soient $\sigma_N = i_N^*\sigma$ et $\omega_N = i_N^*\omega$ les formes induites par σ et par ω sur N. La sous-variété N vérifie les hypothèses du théorème 4.2 si et seulement si $\ker\sigma_N$ est de dimension 1 et n'est pas contenu dans $\ker\omega_N$. Lorsque ces conditions sont vérifiées, N est nécessairement de dimension impaire $2q+1$, et la 1-forme ω_N ne s'annule en aucun point. Le fibré tangent TN se décompose en une somme directe de sous-fibrés,

$$TN = \ker\sigma_N \oplus \ker\omega_N\,,$$

dont les rangs sont, respectivement, 1 et $2q$. Le champ d'homothéties Z est l'unique champ de vecteurs sur N qui vérifie

$$i(Z)\sigma_N = 0\,, \qquad i(Z)\omega_N = -1\,.$$

Le tenseur de Poisson Λ_N, partout de rang $2q$, a pour noyau le sous-fibré de rang 1 de T^*N engendré par ω_N. Il est entièrement déterminé par les relations, dans lesquelles β est une 1-forme quelconque sur N,

$$i(\Lambda_N^\sharp\beta)\omega_N = 0\,, \qquad i(\Lambda_N^\sharp\beta)\sigma_N = -\Big(\beta + \big(i(Z)\beta\big)\omega_N\Big)\,.$$

La distribution $\ker\omega_N$, de rang $2q$, est complètement intégrable puisqu'elle n'est autre que l'image de $\Lambda_N^\sharp$. Les feuilles du feuilletage qu'elle définit sont les feuilles symplectiques de la variété de Poisson (N, Λ_N), et la structure symplectique de chacune de ces feuilles est définie par la 2-forme induite par σ_N sur cette feuille.

On remarque que (N, Λ_N, Z) est une *variété canonique*, au sens défini par l'un des auteurs (A. L.) [11], dont les éléments caractéristiques sont σ_N et $-\omega_N$.

La proposition suivante, où l'on revient au cas où (M, Λ, E) est une variété de Jacobi non nécessairement transitive et N une sous-variété de M, est à rapprocher de 3.12. Elle explicite les relations qui existent, lorsque N satisfait les hypothèses du théorème 4.2, entre la structure symplectique des feuilles de N et les structures induites par les structures de Jacobi transitives des feuilles de M.

4.5. Proposition.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi, N une sous-variété de M, x un point de N, et S la feuille de la structure de Jacobi de M qui passe par x. Il existe, sur un voisinage de x dans N, une structure de Poisson homogène induite, au sens du théorème 4.2, par la structure de Jacobi de M, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) *les sous-variétés N et S sont transverses en x, i.e.,*

$$T_x N + T_x S = T_x M\,;$$

(ii) *il existe, sur un voisinage de x dans $N \cap S$, une structure de Poisson homogène induite, au sens du théorème 4.2, par la structure de Jacobi transitive dont est munie S en tant que feuille de M.*

Lorsque c'est le cas, $N \cap S$ est, au voisinage de x, une feuille du feuilletage défini sur N par sa distribution caractéristique étendue $\widehat{C}_N$, et les structures de variété de Poisson homogène induites sur $N \cap S$, d'une part au sens du théorème 4.2 par la structure de Jacobi transitive de S, d'autre part par restriction de la structure de Poisson homogène de N, coïncident.

La démonstration est semblable à celle de la proposition 3.12 (à laquelle on peut d'ailleurs se ramener, si l'on raisonne sur la sous-variété N_1 engendrée par les courbes intégrales de E qui rencontrent N).

4.6. Corollaire.

Les hypothèses et notations sont celles de 4.5. On suppose $E(x)$ non tangent à la sous-variété N. Il existe une structure de Poisson homogène induite, au sens du théorème 4.2, sur un voisinage de x dans N, dans chacun des cas suivants.

1. *La dimension de S est impaire et N vérifie*

$$T_x N \oplus T_x S = T_x M\,;$$

le champ d'homothéties et le tenseur de Poisson de la structure de Poisson homogène induite sont alors nuls au point x.

2. *La dimension de S est paire et N vérifie*

(i) *$T_x N + T_x S = T_x M$;*

(ii) *$T_x N \cap T_x S$ est de dimension 1, et n'est pas orthogonal à $E(x)$ pour la structure localement conformément symplectique de la feuille S;*

le tenseur de Poisson de la structure de Poisson homogène induite est alors nul au point x, et la trajectoire du champ d'homothéties passant par ce point n'est autre, au voisinage de x, que la courbe $N \cap S$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans chacun des deux cas $N \cap S$ possède, au voisinage de x, une structure de Poisson homogène induite par la structure de Jacobi transitive de la feuille S, et d'utiliser les résultats exposés en 4.4. $\square$

5. Structure locale et cartes distinguées

On étudie dans ce paragraphe la structure locale, au voisinage d'un point, d'une variété de Poisson homogène (P, Λ_P, Z), puis d'une variété de Jacobi (M, Λ, E). On construit une carte d'un voisinage de ce point, dite carte distinguée, dans laquelle les composantes de Λ_P et de Z, ou de Λ et de E (selon qu'il s'agit de la variété de Poisson homogène ou de la variété de Jacobi) s'expriment aussi simplement que possible.

Pour une variété de Poisson (P, Λ_P), ce problème a déjà été traité par A. Weinstein [21]; on devra donc seulement apporter les précisions supplémentaires nécessitées par l'existence du champ d'homothéties Z. Le cas d'une variété de Jacobi (M, Λ, E) a déjà été partiellement traité par un des auteurs (A. L.) et F. Guédira [3]; ses résultats sont ici précisés et complétés.

5.1. Quelques notations.

Dans ce qui suit, pour tout entier $q \geq 0$, on munira $\mathbf{R}^{2q}$, ou tout ouvert de cet espace, de la structure de Poisson transitive homogène associée à sa structure symplectique exacte usuelle. Le champ de tenseurs de Poisson Λ_{2q} et le champ d'homothéties Z_{2q} qui définissent cette structure s'expriment, au moyen des coordonnées usuelles x^i $(1 \leq i \leq 2q)$ sur $\mathbf{R}^{2q}$, par les formules

$$\Lambda_{2q} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x^{i+q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}\,; \qquad Z_{2q} = \sum_{i=1}^{q} x^{i+q} \frac{\partial}{\partial x^{i+q}}\,, \tag{17}$$

la 1-forme de Liouville et la 2-forme symplectique usuelles sur $\mathbf{R}^{2q}$ ayant respectivement pour expression

$$\lambda_q = \sum_{i=1}^{q} x^{i+q} dx^i\,, \qquad \sigma_{2q} = \sum_{i=1}^{q} dx^{i+q} \wedge dx^i\,.$$

De même, pour tout entier $q \geq 0$, on munira $\mathbf{R}^{2q+1}$, ou tout ouvert de cet espace, de la structure de Jacobi transitive associée à sa structure pfaffienne usuelle. Le champ de vecteurs E_{2q+1} et le champ de tenseurs Λ_{2q+1} qui définissent cette structure s'expriment, au moyen des coordonnées usuelles notées x^0, x^i, $1 \leq i \leq 2q$, sur $\mathbf{R}^{2q+1}$, par les formules

$$E_{2q+1} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,; \qquad \Lambda_{2q+1} = \sum_{i=1}^{q} \left(x^{i+q} \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i+q}}\,. \tag{18}$$

La 1-forme de contact usuelle sur $\mathbf{R}^{2q+1}$ a pour expression

$$\omega = dx^0 + \sum_{i=1}^{n} x^{i+q}\, dx^i\,.$$

On peut identifier $\mathbf{R}^{2q}$ au sous-espace de codimension 1 de $\mathbf{R}^{2q+1}$, transverse au champ E_{2q+1}, défini par l'équation

$$x^0 = 0\,. \tag{19}$$

La structure de Poisson homogène induite, au sens de 2.9, par la structure de Jacobi transitive de $\mathbf{R}^{2q+1}$ définie par Λ_{2q+1} et E_{2q+1}, n'est autre que la structure définie sur $\mathbf{R}^{2q}$ par Λ_{2q} et Z_{2q}.

L'étude de la structure locale et la construction de cartes distinguées d'une variété de Poisson homogène reposent sur les deux lemmes ci-après (5.2 et 5.4).

5.2. Lemme.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène et x_0 un point de P. On suppose le vecteur $Z(x_0)$ et le tenseur $\Lambda_P(x_0)$ non nuls. Alors il existe deux fonctions F et G, définies sur un voisinage de x_0, qui vérifient

$$\mathcal{L}(Z)F = 0\,, \qquad \mathcal{L}(Z)G = G\,, \qquad \{G, F\}_P = 1\,, \qquad F(x_0) = 0\,.$$

De plus,

(i) *si la dimension de $\widehat{C}(x_0)$ est impaire, c'est-à-dire si $Z(x_0)$ n'appartient pas à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, ou si le rang de $\Lambda_P(x_0)$ est strictement supérieur à 2, on peut imposer à G de vérifier*

$$G(x_0) = 0$$

et choisir F et G de manière telle que les vecteurs $\Lambda_P^\sharp(dF)(x_0)$, $\Lambda_P^\sharp(dG)(x_0)$ et $Z(x_0)$ soient linéairement indépendants;

(ii) *si la dimension de $\widehat{C}(x_0)$ est paire, c'est-à-dire si $Z(x_0)$ appartient à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, et si le rang de $\Lambda_P(x_0)$ est égal à 2, on peut imposer à F et G de vérifier*

$$G(x_0) = 1\,, \qquad \Lambda_P^\sharp(dF)(x_0) = -Z(x_0)\,.$$

Démonstration. Puisque $Z(x_0)$ est non nul, son annulateur $\big(\mathbf{R}Z(x_0)\big)^0$ est un sous-espace vectoriel de codimension 1 de $T^*_{x_0}P$. Le complémentaire de ce sous-espace est donc un ouvert dense de $T^*_{x_0}P$ qui ne saurait être contenu dans le noyau de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, puisque $\Lambda_P^\sharp(x_0)$ n'est pas nul. Il existe donc un élément (non unique) η de $T^*_{x_0}P$ qui vérifie

$$\langle \eta, Z(x_0)\rangle = 1\,, \qquad \Lambda_P^\sharp(x_0)(\eta) \neq 0\,.$$

Par intégration le long des courbes intégrales de Z, on peut construire une fonction g, définie sur un voisinage de x_0, qui vérifie

$$\mathcal{L}(Z)g = 1\,, \quad dg(x_0) = \eta\,, \quad \text{donc} \quad \Lambda_P^\sharp(dg)(x_0) \neq 0\,, \quad \text{et} \quad g(x_0) = 0\,.$$

D'autre part, la dimension de $\Lambda_P^\sharp(x_0)\Big(\big(\mathbf{R}Z(x_0)\big)^0\Big)$ est, soit inférieure d'une unité, soit égale, au rang de $\Lambda_P(x_0)$, selon que le noyau de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$ est, ou n'est pas, contenu dans

$\big(\mathbf{R}Z(x_0)\big)^0$, c'est-à-dire selon que $Z(x_0)$ appartient, ou n'appartient pas, à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$.

Si $Z(x_0)$ n'appartient pas à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, ou si le rang de $\Lambda_P(x_0)$ est strictement supérieur à 2 (donc au moins égal à 4), il existe un élément (en général non unique) ξ de $T^*_{x_0}P$ qui vérifie

$$\big\langle \xi, Z(x_0)\big\rangle = 0\,, \qquad Z(x_0)\wedge \Lambda_P^\sharp(x_0)(\xi) \neq 0\,.$$

On peut alors construire une fonction h, définie sur un voisinage de x_0, qui vérifie

$$\mathcal{L}(Z)h = 0\,, \qquad h(x_0) = 0\,, \qquad dh(x_0) = \xi\,.$$

On pose alors

$$G = h\exp(g)\,,$$

et on a

$$\mathcal{L}(Z)G = G\,, \qquad G(x_0) = 0\,, \qquad Z(x_0)\wedge \Lambda_P^\sharp(dG)(x_0) \neq 0\,.$$

Si $Z(x_0)$ appartient à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$ et si le rang de $\Lambda_P(x_0)$ est égal à 2, on pose simplement

$$G = \exp(g)$$

et on a

$$\mathcal{L}(Z)G = G\,, \qquad G(x_0) = 1\,, \qquad Z(x_0)\wedge \Lambda_P^\sharp(dG)(x_0) \neq 0\,;$$

la non-colinéarité de $Z(x_0)$ et de $\Lambda_P^\sharp(dG)(x_0)$ résulte en effet de

$$\big\langle dG(x_0), \Lambda_P^\sharp(dG)(x_0)\big\rangle = \{G,G\}_P(x_0) = 0\,, \qquad \text{et} \qquad \big\langle dG(x_0), Z(x_0)\big\rangle = G(x_0) = 1\,.$$

Posons $Y = \Lambda_P^\sharp(dG)$. Les champs de vecteurs Y et Z vérifient, d'après le lemme 2.2,

$$[Z,Y] = -\Lambda_P^\sharp\Big(d\big(G - \mathcal{L}(Z)G\big)\Big) = 0\,.$$

On vient de voir qu'ils sont linéairement indépendants en x_0. Il existe donc un élément (en général non unique) ζ de $T^*_{x_0}P$ qui vérifie

$$\big\langle \zeta, Z(x_0)\big\rangle = 0\,, \qquad \big\langle \zeta, Y(x_0)\big\rangle = 1\,. \tag{20}$$

D'après la seconde égalité, $\Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta)$ et $Y(x_0)$ sont linéairement indépendants; donc si $Z(x_0)$ n'appartient pas à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, les vecteurs $Z(x_0)$, $Y(x_0)$ et $\Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta)$ sont linéairement indépendants. Si $Z(x_0)$ appartient à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$, et si le rang de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$ est strictement supérieur à 2, on peut encore choisir l'élément ζ de $T^*_{x_0}P$ de manière telle que les trois vecteurs $Z(x_0)$, $Y(x_0) = \Lambda_P^\sharp(x_0)(\xi)$ et $\Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta)$ soient linéairement indépendants, puisque la dimension de $\Lambda_P^\sharp(x_0)\Big(\big(\mathbf{R}Z(x_0)\big)^0\Big)$ est supérieure à 3.

Si par contre $Z(x_0)$ appartient à l'image de $\Lambda_P^\sharp(x_0)$ et si le rang de $\Lambda_P(x_0)$ est égal à 2, on voit aisément que $\Lambda_P^\sharp(x_0)\Big(\big(\mathbf{R}Z(x_0)\big)^0\Big)$ est de dimension 1 et contient $Z(x_0)$; par suite, $\Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta)$ est colinéaire à $Z(x_0)$. De plus on a dans ce cas, compte tenu du choix de G,

$$\big\langle dG(x_0), \Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta)\big\rangle = -\big\langle \zeta, Y(x_0)\big\rangle = -1 = -G(x_0) = -\big\langle dG(x_0), Z(x_0)\big\rangle\,,$$

donc $\Lambda_P^\sharp(x_0)(\zeta) = -Z(x_0)$.

En remarquant que les flots de Y et de Z commutent localement, et que ces champs de vecteurs définissent un feuilletage régulier de rang 2 au voisinage de x_0, on peut construire, par intégration le long des courbes intégrales de ces champs de vecteurs, une fonction F, définie sur un voisinage de x_0, qui vérifie

$$\mathcal{L}(Y)F = 1\,, \qquad \mathcal{L}(Z)F = 0\,, \qquad dF(x_0) = \zeta\,, \qquad F(x_0) = 0\,.$$

On voit alors que les fonctions F et G vérifient les propriétés annoncées. □

5.3. Remarque.

Dans les hypothèses du lemme 5.2 on peut définir, au moyen des fonctions F et G, une submersion f de variétés de Poisson homogènes (au sens de la définition 2.12) d'un voisinage de x_0 dans P sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure de variété de Poisson homogène canonique (5.1), appliquant x_0 sur l'origine. Il suffit en effet de poser

$$f = \begin{cases} (F, G) & \text{dans le cas (i),} \\ (F, G-1) & \text{dans le cas (ii).} \end{cases}$$

On remarque que la submersion de variétés de Poisson homogènes f est stricte dans le cas (i).

5.4. Lemme.

Soit (P, Λ, Z) une variété de Poisson homogène, et $f = (f_j)$, $1 \leq j \leq 2k$, une submersion de variétés de Poisson homogènes d'un voisinage ouvert W d'un point x_0 de (P, Λ, Z) sur un voisinage ouvert U_{2k} de l'origine dans $(\mathbf{R}^{2k}, \Lambda_{2k}, Z_{2k})$, appliquant x_0 sur l'origine. La famille de champs de vecteurs hamiltoniens admettant pour hamiltoniens les fonctions f_j engendre un feuilletage $\mathcal{F}$ de W, de rang $2k$. On suppose W $\mathcal{F}$-distingué, c'est-à-dire tel que l'ensemble W_1 des feuilles de $\mathcal{F}$ possède une structure de variété et que la projection canonique $\pi : W \to W_1$ soit une submersion. Alors W_1 possède une structure de variété de Poisson homogène unique (W_1, Λ_1, Z_1) telle que π soit une submersion de variétés de Poisson homogènes stricte. De plus, en restreignant éventuellement W, on peut faire en sorte que (π, f) soit un difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes de W, muni de la structure de Poisson homogène restriction de celle de P, sur le produit $W_1 \times U_{2k}$, muni de la structure de Poisson homogène produit. Le difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes (π, f) est strict si et seulement si la submersion de variétés de Poisson homogènes f est stricte. Lorsque c'est le cas, le champ d'homothéties Z_1 s'annule au point $\pi(x_0)$ si et seulement si le champ d'homothéties Z s'annule en x_0.

Démonstration. En utilisant le fait que $f = (f_j)$, $1 \leq j \leq 2k$, est un morphisme de Poisson à valeurs dans $\mathbf{R}^{2k}$, dont la structure de Poisson est symplectique (donc partout de rang $2k$), on voit que les champs de vecteurs hamiltoniens $[\Lambda, f_j]$, $1 \leq j \leq 2k$, sont linéairement indépendants et commutent deux à deux. Ces champs de vecteurs engendrent donc un feuilletage $\mathcal{F}$ de W, de rang $2k$. Un théorème de P. Libermann [7] montre que $\mathcal{F}$ est symplectiquement complet, et que par suite, la variété W_1 des feuilles de ce feuilletage possède une structure de Poisson unique (W_1, Λ_1) telle que π soit un morphisme de variétés de Poisson.

La submersion f étant un morphisme de variétés de Poisson homogènes, il existe une fonction différentiable u définie sur U_{2k} telle que

$$f_*Z = Z_{2k} + [\Lambda_{2k}, u]\,.$$

On a donc, pour toute fonction différentiable h définie sur U_{2k},

$$\mathcal{L}(Z)(f^*h) = f^*\mathcal{L}\big(Z_{2k} + [\Lambda_{2k}, u]\big)h\,.$$

Posons, pour tout j ($1 \leq j \leq 2k$), $X_j = [\Lambda, f_j]$. D'après le lemme 2.2, on a

$$[X_j, Z] = \big[\Lambda, d\big(f_j - \mathcal{L}(Z)f_j\big)\big]\,.$$

Chaque fonction f_j étant composée de f et d'une fonction coordonnée sur U_{2k}, l'égalité établie ci-dessus montre que chaque champ de vecteurs $[X_j, Z]$ est tangent aux feuilles de $\mathcal{F}$. Le champ de vecteurs Z est donc projetable par π sur la variété W_1 des feuilles de ce feuilletage. Soit $Z_1 = \pi_*Z$ sa projection. On a

$$\mathcal{L}(Z_1)\Lambda_1 = \mathcal{L}(\pi_*Z)(\pi_*\Lambda) = \pi_*\big(\mathcal{L}(Z)\Lambda\big) = \pi_*(-\Lambda) = -\Lambda_1\,.$$

On voit ainsi que (W_1, Λ_1, Z_1) est une variété de Poisson homogène et $\pi : W \to W_1$ un morphisme strict de variétés de Poisson homogènes. L'application $(\pi, f) : W \to W_1 \times U_{2k}$ est étale au point x_0, donc en restreignant éventuellement W, on peut faire en sorte que ce soit un difféomorphisme. Ses deux composantes étant des morphismes de variétés de Poisson homogènes, (π, f) est un difféomorphisme de variétés homogènes, strict si et seulement si f est strict. Dans ce cas, Z_1 s'annule en $\pi(x_0)$ si et seulement si Z s'annule en x_0, puisque Z_{2k} s'annule à l'origine. $\square$

5.5. Théorème.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène et x_0 un point de P. On note $2q$ le rang de $\Lambda_P(x_0)$, et on suppose $Z(x_0) \neq 0$. Il existe un voisinage W de x_0 qui s'identifie, par un isomorphisme ψ de variétés de Poisson homogènes, à un produit $U_{2q} \times \widetilde{N}$ d'un ouvert U_{2q} de $\mathbf{R}^{2q}$ et d'une variété de Poisson homogène $(\widetilde{N}, \Lambda_{\widetilde{N}}, Z_{\widetilde{N}})$ de dimension $\dim P - 2q$. *La première projection applique $\psi(x_0)$ sur l'origine de $\mathbf{R}^{2q}$, et le champ de tenseurs $\Lambda_{\widetilde{N}}$ s'annule au point image de $\psi(x_0)$ par la seconde projection. On peut écrire, avec les notations précisées en 5.1,*

$$\psi_*(\Lambda_P) = \Lambda_{2q} + \Lambda_{\widetilde{N}}\,.$$

De plus,

(i) *si Z n'est pas tangent à la feuille symplectique passant par x_0, on peut faire en sorte que l'isomorphisme ψ soit strict, c'est-à-dire (2.12) que*

$$\psi_*(Z) = Z_{2q} + Z_{\widetilde{N}}\,;$$

alors $Z_{\widetilde{N}}$ est non nul au point image de $\psi(x_0)$ par la seconde projection;

(ii) *si Z est tangent à la feuille symplectique passant par x_0, on peut faire en sorte que*

$$\psi_*(Z) = Z_{2q} - \Lambda^\sharp_{2q}(dx^q) + Z_{\widetilde{N}} = Z_{2q} + \frac{\partial}{\partial x^{2q}} + Z_{\widetilde{N}}$$

et que $Z_{\widetilde{N}}$ soit nul au point image de $\psi(x_0)$ par la seconde projection.

Démonstration. Pour $q = 0$, le théorème est trivial. Supposons $q \geq 1$. En appliquant successivement les lemmes 5.2 et 5.4, on voit qu'il existe un voisinage ouvert W de x_0 qui s'identifie, par un difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes, au produit d'une variété de Poisson homogène (W_1, Λ_1, Z_1) et d'un ouvert U_2 de $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure de variété de Poisson homogène canonique (5.1). Ce difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes est strict si $q \geq 2$, ou si Z n'est pas tangent à la feuille symplectique passant par x_0. Le rang de Λ_1 au point image de x_0 par la projection $\pi : W \to W_1$ est $2(q-1)$.

Si $q = 1$, le théorème résulte immédiatement du lemme 5.2 et de la remarque 5.3.

Si $q \geq 2$, le lemme 5.2 montre qu'on peut faire en sorte que le difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes qui permet d'identifier W au produit $W_1 \times \mathbf{R}^2$ soit strict. Le champ Z_1 s'annule au point $\pi(x_0)$ si et seulement si $Z(x_0) = 0$. On peut alors appliquer à (W_1, Λ_1, Z_1) le raisonnement qui précède, le rang de Λ_1 au point $\pi(x_0)$ étant maintenant $2(q-1)$. On achève la démonstration en répétant q fois cette même construction. $\square$

5.6. Corollaire.

Les hypothèses sont celles de 5.4, et on note p la dimension de P. Il existe, sur un voisinage W de x_0, un système de coordonnées locales $(x^\lambda,\ x^{\overline{\mu}}, x^a)$, avec $1 \leq \lambda, \mu \leq q$, $\overline{\mu} = \mu + q$, $2q+1 \leq a, b, c \leq \dim P$, nulles au point x_0, dans lequel les composantes de Λ_P et de Z ont les propriétés suivantes;

1. *Les seules composantes éventuellement non identiquement nulles de Λ_P sont*

$$\Lambda_P^{\overline{\lambda}\lambda} = -\Lambda_P^{\lambda\overline{\lambda}} = 1\,; \qquad \Lambda_P^{ab}\,;$$

de plus, les composantes Λ_P^{ab} sont nulles au point x_0 et ne dépendent pas des coordonnées locales x^λ, $x^{\overline{\mu}}$;

2. *Les seules composantes éventuellement non identiquement nulles de Z sont:*

(i) *si Z n'est pas tangent à la feuille symplectique passant par x_0,*

$$Z^{\overline{\lambda}} = x^{\overline{\lambda}}\,, \qquad Z^a\,, \qquad q+1 \leq \overline{\lambda} \leq 2q\,, \quad 2q+1 \leq a \leq p\,;$$

de plus, les composantes Z^a ne s'annulent pas toutes en x_0 (on peut par exemple imposer $Z^{2q+1}(x_0) = 1$, et $Z^b(x_0) = 0$ pour $2q+2 \leq b \leq p$), et ne dépendent pas des coordonnées locales x^λ, $x^{\overline{\mu}}$;

(ii) *si Z est tangent à la feuille symplectique passant par x_0,*

$$Z^{\overline{\lambda}} = x^{\overline{\lambda}} \quad \text{pour} \quad q+1 \leq \overline{\lambda} \leq 2q-1\,, \qquad Z^{2q} = x^{2q} + 1\,, \qquad Z^a\,, \quad 2q+1 \leq a \leq p\,;$$

de plus, les composantes Z^a s'annulent en x_0 et ne dépendent pas des coordonnées locales x^λ, $x^{\overline{\mu}}$.

Cet corollaire ne fait qu'exprimer sous une autre forme le théorème 5.5.

Le corollaire suivant montre qu'on peut aisément s'affranchir de l'hypothèse $Z(x_0) \neq 0$.

5.7. Corollaire.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, et x_0 un point de P. On note $2q$ le rang de $\Lambda_P(x_0)$, et on suppose $q > 0$. Il existe un voisinage ouvert W de x_0 qui s'identifie, par un difféomorphisme ψ de variétés de Poisson homogènes, au produit $U_{2q} \times \widetilde{N}$ d'un voisinage ouvert U_{2q} de l'origine de $\mathbf{R}^{2q}$ et d'une variété de Poisson homogène $(\widetilde{N}, \Lambda_{\widetilde{N}}, Z_{\widetilde{N}})$. La première projection applique $\psi(x_0)$ sur l'origine de $\mathbf{R}^{2q}$, et le champ de tenseurs $\Lambda_{\widetilde{N}}$ s'annule au point image de $\psi(x_0)$ par la seconde projection. De plus, le champ de vecteurs $Z_{\widetilde{N}}$ s'annule au point image de $\psi(x_0)$ par la seconde projection si et seulement si $\widehat{C}(x_0)$ est de dimension paire, c'est-à-dire si et seulement si Z est tangent en x_0 à la feuille symplectique qui passe par ce point.

Démonstration. Le cas où $Z(x_0)$ est non nul étant résolu par le théorème 5.5, il reste seulement à considérer celui où $Z(x_0) = 0$. Puisqu'on a supposé $q > 0$, il existe une fonction différentiable f, définie sur un voisinage de x_0, telle que $[\Lambda_P, f](x_0) \neq 0$. Il suffit alors de remplacer Z par $Z + [\Lambda_P, f]$ et d'appliquer le théorème 5.5. □

5.8. Remarque.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, et x_0 un point de P. Supposons $Z(x_0) = 0$ et $\Lambda_P(x_0) = 0$, c'est-à-dire $q = 0$. Ainsi que l'a montré Weinstein [21], l'espace cotangent $T^*_{x_0}P$ possède une structure d'algèbre de Lie, et l'espace tangent $T_{x_0}P$ une structure de Poisson linéaire (structure de Poisson canonique sur le dual d'une algèbre de Lie), dont le tenseur de Poisson Λ^L est le jet du premier ordre de Λ_P en x_0. Le jet du premier ordre Z^L de Z en x_0, qui est un champ de vecteurs linéaire sur $T_{x_0}P$, est un champ d'homothéties pour Λ^L. Dans le cas où l'algèbre de Lie $T^*_{x_0}P$ est semi-simple, la structure de Poisson linéaire homogène est isomorphe à la structure canonique (dans laquelle le champ d'homothéties est l'application identique de $T_{x_0}P$). Dans le cas où, de plus, l'algèbre de Lie $T^*_{x_0}P$ est de type compact, on sait d'après un théorème de J. Conn [1] que la structure de Poisson de P est linéarisable, au sens de Weinstein [21], au voisinage de x_0. On voit alors que cette structure est linéarisable aussi en tant que structure de Poisson homogène.

Les théorèmes 5.9 et 5.11 ci-dessous et leurs corollaires 5.10 et 5.12 décrivent la structure locale d'une variété de Jacobi, respectivement au voisinage d'un point de rang pair et d'un point de rang impair.

5.9. Théorème.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi de dimension m, x_0 un point de M, et S la feuille de la structure de Jacobi de M passant par x_0. On suppose S de dimension paire $2p$. Alors il existe un voisinage W de x_0 dans M qui s'identifie, par un difféomorphisme conforme de Jacobi φ, au produit $U_{2p} \times N$ d'un voisinage ouvert U_{2p} de l'origine dans $\mathbf{R}^{2p}$ et d'une variété de Jacobi (N, Λ_N, E_N) de dimension $m - 2p$. Le champ de vecteurs $E_{U_{2p}\times N}$ et le champ de tenseurs $\Lambda_{U_{2p}\times N}$ qui définissent la structure de Jacobi de $U_{2p} \times N$ ont pour expressions, avec les notations des formules (17) *de 5.1,*

$$E_{U_{2p}\times N} = E_N\,, \qquad \Lambda_{U_{2p}\times N} = \Lambda_{2p} + \Lambda_N - Z_{2p} \wedge E_N\,.$$

Le difféomorphisme conforme de Jacobi φ applique x_0 sur $(0, \widetilde{x}_0)$ et $S \cap W$ sur $U_{2p} \times \{\widetilde{x}_0\}$, avec $\widetilde{x}_0 \in N$, et la structure de Jacobi de N est de rang nul au point $\widetilde{x}_0$.

Démonstration. Soit $P = \mathbf{R} \times M$ la variété de Poisson associée à (M, Λ, E) au sens de la proposition 2.7. Comme dans cette proposition, on note Λ_P le tenseur de Poisson de P, et Z son champ d'homothéties. D'après la remarque 2.6, la feuille symplectique de P passant par le point $(0, x_0)$ est de dimension $2p$, et le champ de vecteurs Z n'est pas tangent à cette feuille. D'après le théorème 5.5, il existe un voisinage $\widetilde{W}$ de $(0, x_0)$ dans P qui s'identifie au produit $U_{2p} \times \widetilde{N}$ d'un ouvert U_{2p} de $\mathbf{R}^{2p}$ et d'une variété de Poisson homogène $(\widetilde{N}, \Lambda_{\widetilde{N}}, Z_{\widetilde{N}})$. On notera $(0, \widetilde{x}_0)$ le point de $U_{2p} \times \widetilde{N}$ correspondant à $(0, x_0)$ dans cette identification. Le champ de vecteurs Z et le tenseur Λ_P ont pour expressions:

$$Z = Z_{2p} + Z_{\widetilde{N}}\,; \qquad \Lambda_P = \Lambda_{2p} + \Lambda_{\widetilde{N}}\,.$$

On sait de plus que $\Lambda_{\widetilde{N}}$ s'annule en $\widetilde{x}_0$, tandis que $Z_{\widetilde{N}}(\widetilde{x}_0)$ est non nul.

La variété de Jacobi M doit être identifiée à la sous-variété $\{0\} \times M$ de P, de codimension 1. Son intersection avec $\widetilde{W}$ s'identifie donc à une sous-variété de codimension 1 de $U_{2p} \times \widetilde{N}$ passant par $(0, \widetilde{x}_0)$ et transverse au champ Z.

Soit d'autre part N une sous-variété de codimension 1 de $\widetilde{N}$ passant par $\widetilde{x}_0$ et transverse au champ $Z_{\widetilde{N}}$. D'après la proposition 2.3, la structure de Poisson homogène de $\widetilde{N}$ induit sur N une structure de Jacobi; on notera Λ_N et E_N le champ de tenseurs et le champ de vecteurs qui définissent cette structure. Le rang de la structure de Poisson de $\widetilde{N}$ étant nul en $\widetilde{x}_0$, Λ_N et E_N sont nuls en ce point.

On a alors deux sous-variétés de codimension 1 de $U_{2p} \times \widetilde{N}$ passant par $(0, \widetilde{x}_0)$ et transverses au champ Z: l'une s'identifie à l'ouvert $\widetilde{W} \cap M$ de M, et l'autre est $U_{2p} \times N$. La structure de Poisson homogène de P induit sur la première, au sens de 2.3, une structure de Jacobi qui coïncide avec la structure initialement donnée sur M (proposition 2.7). Elle induit sur la seconde une structure de Jacobi dont le champ de tenseurs $\Lambda_{U_{2p} \times N}$ et le champ de vecteurs $E_{U_{2p} \times N}$ ont été explicités dans le lemme 2.8. Enfin, la proposition 2.4 montre que ces deux sous-variétés de $U_{2p} \times \widetilde{N}$ sont localement difféomorphes, au voisinage du point $(0, \widetilde{x}_0)$, par un difféomorphisme conforme de Jacobi. □

5.10. Corollaire.

Les hypothèses sont celles de 5.9. Il existe, au voisinage de x_0, un 2-tenseur $\widetilde{\Lambda}$ et un champ de vecteurs $\widetilde{E}$ définissant sur ce voisinage une structure de Jacobi conformément équivalente à celle initialement donnée, et un système de coordonnées locales $(x^\lambda,\ x^{\overline{\mu}},\ x^a)$, avec $1 \leq \lambda, \mu \leq p$, $\overline{\mu} = \mu + p$, $2p+1 \leq a, b, c \leq m$, nulles au point x_0 et telles que les seules composantes éventuellement non identiquement nulles de Λ et de E soient

$$E^a\,; \quad \Lambda^{\overline{\lambda}\lambda} = -\Lambda^{\lambda\overline{\lambda}} = 1\,; \quad \Lambda^{ab}\,; \quad \Lambda^{\overline{\lambda}a} = -\Lambda^{a\overline{\lambda}} = -x^{\overline{\lambda}} E^a\,.$$

De plus, E^a et Λ^{ab} ne dépendent pas des coordonnées x^λ, $x^{\overline{\mu}}$, $1 \leq \lambda, \mu \leq p$, $\overline{\mu} = \mu + p$, et s'annulent au point x_0.

Ce corollaire n'est en effet qu'une autre formulation du théorème 5.9, compte tenu des expressions de Λ_{2p} et de Z_{2p} données en 5.1. Il précise un résultat de [3] dans lequel le terme $\Lambda^{\overline{\lambda}a}$ avait été omis.

5.11. Théorème.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi de dimension m, x_0 un point de M, et S la feuille de la structure de Jacobi de M passant par x_0. On suppose S de dimension impaire $2p+1$. Alors il existe un voisinage W de x_0 dans M qui s'identifie, par un difféomorphisme de Jacobi φ, au produit $U_{2p+1} \times N$ d'un voisinage ouvert U_{2p+1} de l'origine dans $\mathbf{R}^{2p+1}$ et d'une variété de Poisson homogène (N, Λ_N, Z_N) de dimension $m-2p-1$. Dans cette identification, le champ de vecteurs E et le champ de tenseurs Λ ont pour expressions, avec les notations de 5.1,

$$E = E_{2p+1}\,, \qquad \Lambda = \Lambda_{2p+1} + \Lambda_N + E_{2p+1} \wedge Z_N\,.$$

Le difféomorphisme de Jacobi φ applique x_0 sur $(0, \widetilde{x}_0)$ et $S \cap W$ sur $U_{2p+1} \times \{\widetilde{x}_0\}$, avec $\widetilde{x}_0 \in N$; le tenseur de Poisson Λ_N et le champ d'homothéties Z_N de N s'annulent au point $\widetilde{x}_0$.

Démonstration. Soit P une sous-variété de codimension 1 de M passant par x_0 et transverse au champ E. On munit cette sous-variété de la structure de Poissson homogène (P, Λ_P, Z_P) induite, au sens de 2.9, par la structure de Jacobi de M. On sait que $\Lambda_P(x_0)$ est de rang $2p$.

Considérons d'abord le cas où $p > 0$. On peut alors choisir P de manière telle que $T_{x_0}P$ ne contienne pas l'image de $\Lambda^\sharp(x_0)$. L'annulateur de $T_{x_0}P$ n'est alors pas contenu dans le noyau de $\Lambda^\sharp(x_0)$, et par suite $Z_P(x_0)$ est non nul. On peut alors appliquer à P le théorème 5.5: il existe un voisinage W de x_0 dans P qui s'identifie au produit $U_{2p} \times N$ d'un voisinage ouvert U_{2p} de l'origine de $\mathbf{R}^{2p}$ et d'une variété de Poisson homogène (N, Λ_N, Z_N) de dimension $m-2p-1$. Le point x_0 s'identifie à $(0, \widetilde{x}_0)$, avec $\widetilde{x}_0 \in N$. On sait que Λ_N s'annule en $\widetilde{x}_0$, ainsi que Z_N, puisque d'après la remarque 2.18.3 Z_P est tangent à la feuille symplectique de P passant par x_0. On a

$$\Lambda_P = \Lambda_{2p} + \Lambda_N\,; \qquad Z_P = Z_{2p} + Z_N\,.$$

D'après la remarque 2.10, il existe un voisinage de x_0 dans M qui s'identifie au produit $I \times U_{2p} \times N$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant l'origine. Le champ de vecteurs E s'identifie au champ dont la projection sur I est égale à 1 et dont les projections sur les deux autres facteurs sont nulles. Le tenseur Λ est donné par la formule (8), qui devient

$$\Lambda = \Lambda_{2p} + \Lambda_N + E \wedge (Z_{2p} + Z_N)\,.$$

Mais d'après la remarque faite à la fin du paragraphe 5.1, $I \times U_{2p}$ s'identifie, par un difféomorphisme de Jacobi, à un voisinage ouvert U_{2p+1} de l'origine de $\mathbf{R}^{2p+1}$, muni de sa structure de Jacobi transitive canonique, définie par E_{2p+1} et Λ_{2p+1} donnés par les formules (18). Ceci achève la démonstration dans le cas $p > 0$.

Dans le cas où $p = 0$, il suffit de poser $(P, \Lambda_P, Z_P) = (N, \Lambda_N, Z_N)$. $\square$

5.12. Corollaire.

Les hypothèses sont celles de 5.9. Il existe une carte de M dont le domaine est un voisinage ouvert de x_0 et dont les coordonnées locales, notées x^0, x^λ, $x^{\overline{\mu}}$, x^a, avec $1 \leq$

$\lambda, \mu \leq p$, $\overline{\mu} = \mu + p$, $2p+1 \leq a, b, c \leq m-1$, sont nulles au point x_0 et telles que les seules composantes éventuellement non identiquement nulles de Λ et de E soient

$$E^0 = 1\,; \quad \Lambda^{\overline{\lambda}\lambda} = -\Lambda^{\lambda\overline{\lambda}} = 1 \text{ si } p \geq 1\,; \quad \Lambda^{0\overline{\lambda}} = -\Lambda^{\overline{\lambda}0} = x^{\overline{\lambda}}\,; \quad \Lambda^{0a} = -\Lambda^{a0}\,; \quad \Lambda^{ab}\,.$$

De plus, Λ^{a0} et Λ^{ab} ne dépendent pas des coordonnées locales x^0, x^λ, $x^{\overline{\mu}}$, $1 \leq \lambda, \mu \leq p$, $\overline{\mu} = \mu + p$, et s'annulent au point x_0.

Ce corollaire n'est en effet qu'une autre formulation du théorème 5.11.

5.13. Remarques.

Dans les hypothèses du théorème 5.5, l'isomorphisme ψ permet d'identifier $\widetilde{N}$ à une sous-variété de P passant par le point x_0, contenue dans W. La structure de Poisson homogène induite sur $\widetilde{N}$ au sens de 3.10.4 n'est autre que $(\widetilde{N}, \Lambda_{\widetilde{N}}, Z_{\widetilde{N}})$.

De même, dans les hypothèses du théorème 5.9, la structure de Jacobi induite sur N (considérée comme sous-variété de M) au sens de 3.9, n'est autre que (N, Λ_N, E_N).

De même encore, dans les hypothèses du théorème 5.11, la structure de Poisson homogène induite sur N (considérée comme sous-variété de M) au sens de 4.2, n'est autre que (N, Λ_N, Z_N).

6. Structure transverse d'une feuille

6.1. La notion de structure transverse.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, S une feuille symplectique de P, x_0 un point de S, et N une sous-variété de P passant par x_0, de dimension égale à la codimension de S, transverse à S en x_0, c'est-à-dire vérifiant

$$T_{x_0}P = T_{x_0}S \oplus T_{x_0}N\,.$$

En restreignant éventuellement N on peut supposer qu'elle vérifie, en chacun de ses points, les propriétés du lemme 3.8. Ainsi qu'on l'a vu en 3.10.5, la structure de Poisson homogène de P induit sur N une structure de Poisson homogène. On va montrer (théorème 6.2) que le germe de cette structure de Poisson homogène en x_0 ne dépend, à un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes (au sens 2.12) près, que de la feuille S. La classe d'équivalence (au sens de la relation d'équivalence 2.13.1) de germes de structures de Poisson homogènes ainsi définie sera appelée *structure transverse* de la feuille S. Ce résultat précise, dans le cas de variétés de Poisson homogènes, le théorème d'A. Weinstein [21] relatif à la structure transverse d'une feuille symplectique d'une variété de Poisson.

De même, soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi, S une feuille de la structure de Jacobi de M, x_0 un point de S et N une sous-variété de M passant par x_0, de dimension égale à la codimension de S, transverse à S en x_0, c'est-à-dire vérifiant

$$T_{x_0}M = T_{x_0}S \oplus T_{x_0}N\,.$$

En restreignant éventuellement N on peut supposer qu'elle vérifie, en chacun de ses points, les propriétés du lemme 3.8 si S est de dimension paire, ou celles du lemme 4.1 si S est de dimension impaire. D'après les corollaires 3.13 et 4.6, la structure de Jacobi de M induit sur N une structure de Jacobi si S est de dimension paire, ou une structure de Poisson homogène si S est de dimension impaire. En utilisant le théorème 6.2, on montrera que le germe de cette structure au point x_0 ne dépend, à un difféomorphisme conforme de Jacobi près, ou à un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes près, selon la parité de la dimension de S, que de la feuille S, et non du choix du point x_0 de cette feuille, ni du choix de la sous-variété transverse N. La classe d'équivalence de ce germe de structure (conforme de Jacobi si S est de dimension paire, de Poisson homogène si S est de dimension impaire) sera appelée *structure transverse* de la feuille S.

6.2. Théorème.

Soit (P, Λ_P, Z) une variété de Poisson homogène, S une feuille symplectique de P, x_1 et x_2 deux points de S, N_1 et N_2 deux sous-variétés, de dimensions égales à la codimension de S, transverses à S, respectivement en x_1 et en x_2. On munit N_1 et N_2, au voisinage de x_1 et de x_2, respectivement, des structures de Poisson homogènes induites, au sens de 3.10.4. Il existe un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes φ (au sens 2.12) d'un voisinage ouvert W_1 de x_1 dans N_1 sur un voisinage ouvert W_2 de x_2 dans N_2, qui applique x_1 sur x_2.

En d'autres termes, les germes, respectivement en x_1 et en x_2, de structures de Poisson homogènes induites (au sens 3.10.4), respectivement sur N_1 et sur N_2, sont isomorphes. Leur classe d'équivalence (au sens 2.13.1) est appelée structure transverse de la feuille S.

Démonstration. Tout point de S étant accessible, à partir d'un point x_0 de S donné, par des produits de flots hamiltoniens, qui sont des automorphismes locaux de la structure de Poisson homogène, il suffit d'examiner le cas où $x_1 = x_2 = x_0$. Comme il suffit de raisonner à isomorphisme de Poisson homogène près, le théorème 5.5 permet de remplacer la variété P, au voisinage de x_0, par le produit de variétés de Poisson homogènes $(U_{2k}, \Lambda_{2k}, Z_{2k}) \times (N, \Lambda_N, Z_N)$, où U_{2k} (resp., N) est un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^{2k}$ (resp., dans $\mathbf{R}^{p-2k}$, p étant la dimension de P). Tout revient alors à prouver que si N_1 est une sous-variété passant par l'origine telle que $T_0N_1 \oplus T_0U_{2k} = T_0N \oplus T_0U_{2k}$, les structures de Poisson homogènes induites sur N_1 et sur N (ou du moins leurs germes à l'origine) sont isomorphes. On sait déjà [21] qu'elles sont isomorphes comme structures de Poisson.

Pour simplifier les notations, on note avec l'indice 0 (Λ_0, Z_0, ...) les éléments relatifs à $N = N_0$. La variété N_1 étant, au voisinage de 0, le graphe d'une application u de N dans U_{2k}, on note N_t ($t \in [0, 1]$) le graphe de tu. La projection $\pi : U_{2k} \times N_0 \to N_0$ permet de transporter sur N_0 la structure de Poisson homogène induite (au sens 3.10.4) sur N_t, et on note (N_0, Λ_t, Z_t) cette structure. Par construction même, toutes ces structures de Poisson homogènes ont même feuilletage caractéristique et même feuilletage caractéristique étendu. L'interpolation réalisée va permettre de mettre en oeuvre la méthode variationnelle de Moser [14]. Soit X_t le champ de vecteurs C^∞ à paramètres défini sur N_0 par

$$X_t = -2t\Lambda_t^\sharp u^*\lambda\,,$$

où $\lambda \equiv \lambda_{2k} \equiv \sum_{i=1}^{k} x^{i+k}\, dx^i$ est la forme de Liouville de $\mathbf{R}^{2k}$. X_t est tangent au feuilletage caractéristique commun des structures Λ_t. Comme $X_t(0) = 0$, la courbe intégrale maximale

$t \mapsto f_t(x)$ de X_t issue de x est, pour x assez voisin de 0, définie sur $[0,1]$, et on peut, en restreignant éventuellement V, faire en sorte que $x \mapsto f_t(x)$ soit un difféomorphisme dans N_0 pour $t \in [0,1]$. Pour prouver que $(f_1)_*\Lambda_1 = \Lambda_0$, il suffit de prouver que $\frac{d}{dt}\big((f_t)_*\Lambda_t\big) = 0$. Mais comme f_t conserve feuille à feuille le feuilletage caractéristique commun des structures Λ_t, il suffit de prouver que, pour chaque feuille symplectique Σ de N_0, on a $\frac{d}{dt}\big((f_t)^*\sigma_t\big) = 0$, où σ_t est la 2-forme symplectique sur Σ associée au tenseur de Poisson Λ_t. Il faut donc prouver que $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_t + \mathcal{L}(X_t)\sigma_t = 0$. La 2-forme σ_t est l'image par π de la forme symplectique de $N_t \cap (U_{2k} \times \Sigma)$, trace sur cette variété de la forme symplectique dont est munie $U_{2k} \times \Sigma$, en tant que feuille symplectique de $(U_{2k}, \Lambda_{2k}) \times (N_0, \Lambda_0)$. Par suite, $\sigma_t = \sigma_0 + t^2\widetilde{u}^* d\lambda$, où on a noté $\widetilde{u} = u\big|_\Sigma$. Mais on a

$$\mathcal{L}(X_t)\sigma_t = di(X_t)\sigma_t = d(2t\widetilde{u}^*\lambda)\,;$$

puisque $\Lambda_t^\sharp$ a pour isomorphisme réciproque $X \mapsto -i(X)\sigma_t$, on en déduit

$$\mathcal{L}(X_t)\sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = 0\,;$$

ce qui prouve que $(f_1)_*\Lambda_1 = \Lambda_0$. L'application f_1 définit donc un (germe de) difféomorphisme de Poisson de (N_1, Λ_1) sur (N_0, Λ_0), ce qui avait été prouvé par Weinstein [21]. Il reste à montrer que f_1 est un difféomorphisme homogène, autrement dit à construire, sur un voisinage de 0 dans N_0, une fonction h telle que $(f_1)_*Z_1 - Z_0 = [\Lambda_0, h]$.

Comme f_t conserve le feuilletage caractéristique étendu, on va construire h feuille par feuille, en distinguant deux cas selon la parité de la dimension de la feuille considérée $\widehat{\Sigma}$. On note encore $\widetilde{u} = u\big|_{\widehat{\Sigma}}$, par abus de notation.

a) Si la dimension de $\widehat{\Sigma}$ est paire, (Λ_t, Z_t) induit sur $\widehat{\Sigma}$ une structure symplectique exacte de champ d'homothétie Z_t (2.18.2). Cette structure est l'image, par la submersion homogène stricte $U_{2k} \times N_0 \to N_0$, de la structure induite sur $N_t \cap (U_{2k} \times \widehat{\Sigma})$, au sens de 3.9. On a donc les relations

$$i(Z_t)\sigma_t = \lambda_t\,, \qquad d\lambda_t = \sigma_t\,, \qquad \lambda_t = \lambda_0 + t^2\widetilde{u}^*\lambda\,.$$

Par suite,

$$-\mathcal{L}(X_t)\lambda_t + \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} = -i(X_t)\sigma_t - da_t(x) + 2t\widetilde{u}^*\lambda\,, \qquad \text{avec} \quad a_t(x) = \big(i(X_t)\lambda_t\big)(x)\,.$$

Comme $i(Z_t)\sigma_t = \lambda_t$ équivaut à $\Lambda_t^\sharp(\lambda_t) = -Z_t$,

$$a_t(x) = -2t\langle \Lambda_t^\sharp(\widetilde{u}^*\lambda), \lambda_t\rangle = -2ti(Z_t)(\widetilde{u}^*\lambda)\,.$$

Finalement, compte tenu de la définition de X_t,

$$\frac{d}{dt}\big((f_t^{-1})^*\lambda_t\big) = (f_t^{-1})^*\left(-\mathcal{L}(X_t)\lambda_t + \frac{\partial \lambda_t}{\partial t}\right) = -(f_t^{-1})^* da_t(x)\,,$$

soit par intégration entre 0 et 1

$$(f_1^{-1})^*\lambda_1 - \lambda_0 = -dh\,, \qquad \text{avec} \qquad h(x) = \int_0^1 a_t\big(f_t(x)\big)\,dt\,.$$

Comme $(f_1)_*\Lambda_1 = \Lambda_0$, on a, sur Σ,

$$(f_1)_* Z_1 = Z_0 + [\Lambda_0, h]\,.$$

b) Si la dimension de $\widehat{\Sigma}$ est impaire, la feuille $U_{2k} \times \widehat{\Sigma}$ du feuilletage caractéristique étendu de $U_{2k} \times N_0$ admet, d'après 2.18.2, une structure canonique donnée par un couple $(\widehat{\sigma}, \widehat{\omega})$ tel que

$$i(Z_{2k} + Z_0)\widehat{\sigma} = 0\,, \qquad i(Z_{2k} + Z_0)\widehat{\omega} = 1\,,$$

la 2-forme $\widehat{\sigma}$ induisant, sur chaque feuille du feuilletage défini par $\widehat{\omega} = 0$, la forme symplectique canonique. Par suite,

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_0 + \lambda \wedge \omega_0 + d\lambda\,, \qquad \widehat{\omega} = \omega_0\,,$$

où $(\widehat{\sigma}_0, \omega_0)$ définit la structure canonique dont est munie $\widehat{\Sigma}$ en tant que feuille du feuilletage caractéristique étendu de (N_0, Λ_0, Z_0). La structure canonique de $U_{2k} \times \widehat{\Sigma}$ induit, au sens de 3.9, une structure canonique sur $(U_{2k} \times \widehat{\Sigma}) \cap N_t$. Celle-ci, transportée par la submersion homogène stricte $\pi : U_{2k} \times N_0 \to N_0$, fournit la structure canonique $(\widehat{\sigma}_t, \omega_t)$ de $\widehat{\Sigma}$ comme feuille de (Λ_t, Z_t). On en déduit

$$\widehat{\sigma}_t = \widehat{\sigma}_0 + t^2 \widetilde{u}^*(\lambda \wedge \omega_0 + d\lambda)\,, \qquad \omega_t = \omega_0\,.$$

Pour calculer $i(X_t)\widehat{\sigma}_t$, on remarque que pour tout vecteur Y tangent au feuilletage symplectique, σ_t désignant la forme symplectique de la feuille correspondante,

$$i(X_t)\widehat{\sigma}_t(Y) = i(X_t)\sigma_t(Y) = i(Y)(2t\widetilde{u}^*\lambda)\,.$$

On a donc

$$i(X_t)\widehat{\sigma}_t - 2t\widetilde{u}^*\lambda = \rho\,\omega_0\,,$$

où ρ est une fonction. Puisque $\omega_0 = \omega_t$ et que $i(Z_t)\widehat{\sigma}_t = 0$,

$$i(X_t)\widehat{\sigma}_t = 2t\widetilde{u}^*\lambda + a_t(x)\omega_0\,,$$

où $a_t(x) = -2ti(Z_t)(\widetilde{u}^*\lambda)$ comme précédemment. On peut donc écrire

$$\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial t} - \mathcal{L}(X_t)\widehat{\sigma}_t = -da_t(x) \wedge \omega_0\,,$$

ce qui entraîne

$$\frac{d}{dt}\big((f_t^{-1})^*\widehat{\sigma}_t\big) = -d\big((f_t^{-1})^* a_t\big) \wedge \omega_0\,,$$

et, par intégration entre 0 et 1,

$$(f_1^{-1})^*\widehat{\sigma}_1 - \widehat{\sigma}_0 = -dh \wedge \omega_0 \,, \qquad \text{avec, comme ci-dessus,} \quad h(x) = \int_0^1 a_t\big(f_t(x)\big)dt \,.$$

Comme $\omega_t(X_t) = \omega_0(X_t) = 0$, on a $(f_1^{-1})^*\omega_0 = \omega_0$. Mais $Y = (f_1)_*Z_1 - Z_0$ vérifie

$$\omega_0(Y) = 0 \,, \qquad i(Y)\widehat{\sigma}_0 = i\big((f_1)_*Z_1\big)\big((f_1^{-1})^*\widehat{\sigma}_1 + dh \wedge \omega_0\big) \,,$$

car $i(Z_0)\widehat{\sigma}_0 = 0$. De même

$$i\big((f_1)_*Z_1\big)\big((f_1^{-1})^*\sigma_1\big) = {f_1}^*\big(i(Z_1)\widehat{\sigma}_1\big) = 0 \,.$$

Enfin

$$i\big((f_1)_*Z_1\big)\omega_0 = (f_1)_*i(Z_1)\omega_1 = 1 \,.$$

Il en résulte que $\omega_0(Y) = 0$, $i(Y)\widehat{\sigma}_0 = -dh$, ce qui équivaut à $Y = [\Lambda_0, h]$.

Finalement on a construit, sur un voisinage de 0 dans N_0, une fonction h, de classe C^∞, définie par

$$h(x) = -2\int_0^1 t\, i(Z_t)(\widetilde{u}^*\lambda)\big(f_t(x)\big)dt \,,$$

telle que $(f_1)_*Z_1 = Z_0 + [\Lambda_0, h]$. La preuve est donc complète. □

6.3. Remarque.

Le difféomorphisme f_1 est un isomorphisme de Poisson homogène strict si $i(Z_t)(u^*\lambda) \equiv 0$. Il en est ainsi si Z est tangent à N_1. En effet, lorsque c'est le cas, le champ de vecteurs Z étant égal à $Z_{2k} + Z_0$, on a pour tout $y \in N_0$

$$Tu\big(Z_0(y)\big) = Z_{2k}\big(u(y)\big) \,.$$

Comme Z_{2k} est homogène de degré 1, on a pour tout t

$$T(tu)\big(Z_0(y)\big) = Z_{2k}\big(tu(y)\big) \,,$$

ce qui montre que pour tout t, Z est tangent à N_t. Par suite, Z_t est la projection de $Z\big|_{N_t}$, donc $Z_t \equiv Z_0$. On a alors

$$a_t(x) = i(Z_t)(u^*\lambda) = \langle Z_{2k}, \lambda\rangle \circ (tu) \equiv 0 \,.$$

Cette remarque sera utilisée ci-après.

6.4. Théorème.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi, S une feuille de la structure de Jacobi de M, x_1 et x_2 deux points de S, N_1 et N_2 deux sous-variétés, de dimensions égales à la codimension de S, transverses à S, respectivement en x_1 et en x_2. On munit N_1 et N_2, au voisinage de x_1 et de x_2, respectivement,

(i) *des structures de Jacobi induites au sens de 3.13, si S est de dimension paire,*

(ii) *des structures de Poisson homogènes induites au sens de 4.6, si S est de dimension impaire.*

Alors il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage ouvert W_1 de x_1 dans N_1 sur un voisinage ouvert W_2 de x_2 dans N_2, qui applique x_1 sur x_2, et qui est

(i) *un difféomorphisme conforme de Jacobi si S est de dimension paire,*

(ii) *un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes si S est de dimension impaire.*

En d'autres termes, les germes, respectivement en x_1 et en x_2, des structures conformes de Jacobi si S est de dimension paire, ou des structures de Poisson homogènes si S est de dimension impaire, induites, au sens de 3.13 ou de 4.6, respectivement sur N_1 et sur N_2, sont isomorphes. Leur classe d'équivalence est appelée structure transverse de la feuille S.

Démonstration. On distingue deux cas, selon la parité de la dimension de S.

1. *Cas où S est de dimension paire.* On se ramène au cas où $x_1 = x_2 = x_0$ en remarquant que tout point de S est accessible à partir d'un point x_0 de S donné par un produit de flots hamiltoniens qui sont des automorphismes locaux conformes de Jacobi. L'utilisation du théorème de structure locale 5.9 permet de se ramener au cas où $M = U_{2p} \times N$. Il suffit alors, pour prouver le théorème, de comparer la structure de Jacobi (N, Λ, Z) fournie par 5.9 à celle induite au sens de 3.9 sur une sous-variété N_1 de M passant par 0 et transverse à U_{2k}. La carte de M s'obtient à partir d'une carte de la variété de Poisson homogène associée $P = \mathbf{R} \times M$ (notations de 5.9). Cette carte identifie P à $U_{2p} \times \widetilde{N}$, où $\widetilde{N} = \mathbf{R} \times N$, et le champ d'homothéties Z est par construction même tangent à $\widetilde{N}_1 = \mathbf{R} \times N_1$. La remarque 6.3 montre que $\widetilde{N}_1$ et $\widetilde{N}$ sont strictement isomorphes comme variétés de Poisson homogènes. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de N_1 avec sa structure de Jacobi sur son image N_1' dans $\widetilde{N}$, munie également de la structure de Jacobi induite. L'isomorphisme de $\widetilde{N}_1$ sur $\widetilde{N}$ étant strict, N_1' et N sont transverses au champ d'homothéties Z au point $(0, x_0)$. La proposition 2.4 prouve que N et N_1' sont isomorphes comme variétés conformes de Jacobi, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

2. *Cas où S est de dimension impaire.* Il suffit à l'évidence de prouver le théorème pour deux points assez voisins de S, car l'application composée de deux difféomorphismes de variétés de Poisson homogènes est un difféomorphisme de variétés de Poisson homogènes (2.13.1). On peut donc se placer dans le voisinage de x_0 fourni par le théorème 5.11 et prouver le théorème pour un couple (x_0, x_1) de points appartenant à la même plaque du feuilletage caractéristique. Autrement dit, on peut supposer que $W = U_{2p+1} \times N$, la structure de Jacobi de W étant définie par $(E_{2p+1}, \Lambda_{2p+1} + E_{2p+1} \wedge Z_N + \Lambda_N)$. Il est alors immédiat que sur la variété W le feuilletage défini par C_E (proposition 2.14), engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens associés à des intégrales premières du champ de vecteurs E_{2p+1}, coïncide avec le feuilletage caractéristique de W. Si N_1 est une sous-variété passant par x_1, on peut l'inclure dans une sous-variété P_1 transverse à E en x_1 et de codimension 1. Mais $P_0 = U_{2p} \times N$ (où U_{2p} est identifié au sous-espace $x_0 = 0$ de U_{2p+1}) est une sous-variété de Poisson également transverse à E. P_0 et P_1 étant transverses à la même feuille de C_E, la proposition 2.14 montre qu'elles sont isomorphes comme variétés de Poisson homogènes. Il suffit alors pour prouver le théorème d'examiner le cas où N_1 est une sous-variété de P_0 transverse à U_{2p}, et dans ce cas le théorème 6.2 fournit le résultat, ce qui achève la démonstration. □

6.5. Remarque.

Soit (M, Λ, E) une variété de Jacobi, S une feuille de sa structure, et x_0 un point de S. Lorsque S est de dimension paire, le théorème de décomposition locale 5.9 montre que M s'identifie, au voisinage de x_0, au produit d'un voisinage de x_0 dans S et d'une variété de Jacobi (N, Λ_N, E_N). Le théorème 6.4 montre que la classe d'équivalence conforme de (N, Λ_N, E_N) ne dépend pas du choix du point x_0 dans S; on peut dire que cette classe d'équivalence est un invariant conforme de Jacobi, attaché à la feuille S. De même, lorsque S est de dimension impaire, le théorème de décomposition locale 5.11 montre que M s'identifie, au voisinage de x_0, au produit d'un voisinage de x_0 dans S et d'une variété de Poisson homogène (N, Λ_N, Z_N). Le théorème 6.4 montre que cette variété de Poisson homogène ne dépend pas du choix de x_0 dans S. On peut dire que cette structure de Poisson homogène est un invariant attaché à la feuille S.

Bibliographie

1. J. Conn, *Normal forms for smooth Poisson structures*, Annals of Mathematics **121** (1985) 565–593.
2. P. Dazord, *Feuilletages à singularités*, Indagationes Mathematicae **47** (1985) 21–39.
3. F. Guédira et A. Lichnerowicz, *Géométrie des algèbres de Lie de Kirillov*, J. Math. pures et appl. **63** (1984) 407–484.
4. A. M. Justino, *Propriétés du quotient d'une variété de Jacobi par un feuilletage engendré par des automorphismes infinitésimaux*, C. R. Acad. Sc. Paris **298** I (1984) 489–492.
5. A. M. Justino, *Géométrie des variétés de Poisson et des variétés de Jacobi*, Thèse de troisième cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984.
6. A. Kirillov, *Local Lie algebras*, Russian Math. surveys **31** (1976) 55–75.
7. P. Libermann, *Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique*, Astérisque **107-108** (1983) 43–69.
8. P. Libermann et C. M. Marle, *Géométrie symplectique; bases théoriques de la mécanique*, Publications mathématiques de l'Université Paris VII, Paris, 1987. Edition in English: *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
9. A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977) 253–300.
10. A. Lichnerowicz *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. pures et appl. **57** (1978) 453–488.
11. A. Lichnerowicz, *La géométrie des transformations canoniques*, Bull. Soc. Math. de Belgique **31** (1979) 105–135.
12. C.-M. Marle, *Quelques propriétés des variétés de Jacobi*, dans *Géométrie symplectique et mécanique*, séminaire sud-rhodanien de géométrie (J.-P. Dufour, ed.), 125–139, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1985.
13. J. E. Marsden and T. Ratiu, *Reduction of Poisson manifolds*, Letters in Mathematical Physics **11** (1986) 161–169.

14. J. Moser *On the volume element on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294.

15. R. Ouzilou, *Hamiltonian actions on Poisson manifolds*, in *Symplectic geometry* (A. Crumeyrolle and J. Grifone, ed.), 172–183. Pitman, Boston, 1983.

16. J. Pradines, *Graph and holonomy of singular foliations*, preprint, 1984.

17. J. A. Schouten, *On the differential operators of first order in tensor calculus*, in *Convegno di Geom. Differen. Italia*, 1–7. Edizioni Cremonese, Roma, 1953.

18. P. Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. **29** (1974) 699–713.

19. H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973) 171–188.

20. A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds.* C.B.M.S. Regional conference series in mathematics **29**, American Mathematical Society, Providence, 1977.

21. A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983) 523–557.

Adresse des auteurs:

P. Dazord, Université Claude Bernard (Lyon I), 43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69621 Villeurbanne Cedex.

A. Lichnerowicz, Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris.

C.-M. Marle, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.