Colloque international "Géométrie au vingtième siècle, 1930–2000"
Institut Henri Poincaré, Paris, France, 24–30 septembre 2001

Espace et temps physiques et description des systèmes mécaniques

Charles-Michel Marle
Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05, France
marle@math.jussieu.fr

À la mémoire de mes maîtres,

Alfred Senkeisen, Edgar Durupt, Marcel Saint-Jean et André Lichnerowicz

1. Introduction

Les concepts d'espace et de temps se forment dans notre esprit à partir de la conscience que nous avons de l'Univers dans lequel nous vivons, grâce aux constructions intellectuelles que nous faisons pour ordonner nos expériences et nos perceptions, et tenter de "comprendre" cet Univers. Voici ce qu'Hermann Weyl (1885–1955) écrit à ce sujet, dans son beau livre "Temps, espace, matière" [30] :

À propos du temps :

"La forme originelle du courant de conscience est le temps. C'est un fait qui peut être incompréhensible pour la raison, mais qui ne peut être nié : le contenu de la conscience n'est pas donné comme étant simplement, mais il est maintenant; il remplit la forme du présent qui dure, par un contenu changeant; de telle manière qu'il ne faut pas dire : cela est, mais cela est maintenant, ou cela n'est plus maintenant. Si par la réflexion on cherche à concevoir le contenu de ce courant de pensée comme un objet, il nous apparaîtra comme un écoulement dans le temps, dont les stades successifs se distinguent par les relations de plus tôt et plus tard".

À propos de l'espace :

*"De même que le temps est la forme de ce courant de conscience, de même nous pouvons affirmer de plein droit que l'*espace *est la forme de la réalité corporelle. Les choses corporelles, telles que nous les percevons, possèdent en soi une extension spatiale. Mais c'est seulement quand l'Univers réel, unique et connexe,*

se construit avec nos expériences répétées, que l'extension spatiale donnée par chaque perception devient une partie d'un espace, toujours le même, qui embrasse toute chose. Cet espace est la forme du monde extérieur; ce qui signifie que chaque chose corporelle peut occuper, sans être modifiée, une autre place que celle qu'elle occupe dans l'espace. Ce fait caractérise l'homogénéité de l'espace, il est la racine du concept de congruence".

Les philosophes ont abondamment discuté de la nature de l'espace et du temps. Le lecteur intéressé par les aspects historiques pourra consulter, par exemple, les ouvrages de B. C. van Frassen [27] et de M. Friedman [9], et trouvera dans les ouvrages de Poincaré [23 (a), (b), (c), (d)] et de Weyl [30] de très intéressantes idées sur l'espace, le temps et la perception que nous en avons. Le grand philosophe Henri Bergson (1859–1941) a tenté, dans un petit livre [2], de concilier notre perception intuitive d'un temps absolu avec la théorie de la Relativité d'Einstein (cette tentative ne nous a pas semblé concluante). Mais pour moi du moins, la nature profonde de l'espace et du temps demeure tout à fait mystérieuse, tout comme restent mystérieuses la nature profonde de l'Univers et celle de la conscience humaine. Aussi me contenterai-je, dans ce qui suit, de traiter des *représentations mathématiques* de l'espace et du temps employées notamment en mécanique. Cette démarche, qui consiste à remplacer un objet qui nous est extérieur (l'espace, le temps, l'univers) par un concept mathématique, c'est-à-dire par une création de notre esprit, nous donne souvent l'impression de mieux comprendre l'objet que nous étudions. Acceptons ce fait, puisque c'est ainsi que l'esprit humain fonctionne, tout en sachant que nos constructions intellectuelles ne se confondent pas avec les objets qu'elles veulent représenter.

2. Espace et temps absolus de la mécanique newtonienne

2.1. Temps absolu.

Notre intuition sensible nous conduit à représenter le temps comme un "continu à une dimension", car nous pouvons, par la pensée, ranger les événements par ordre chronologique en les disposant le long d'une ligne.

Que faut-il entendre par "continu à une dimension"? Les progrès des mathématiques permettent de donner à ce concept un sens précis : il faut entendre par cela une *variété topologique réelle connexe de dimension* 1. Nous noterons $\mathcal{T}$ la variété qui représente le temps, et par abus de langage nous l'appellerons *temps*; les éléments de $\mathcal{T}$ seront appelés *instants*.

Afin de lui conférer les propriétés nécessaires à son utilisation, nous allons munir le temps $\mathcal{T}$ de structures un peu plus riches que celle de variété topologique.

Tout d'abord, comme nous savons distinguer (au moins localement) entre deux instants lequel est antérieur à l'autre, nous sommes conduits à munir $\mathcal{T}$ d'une *orientation*, c'est-à-dire d'un sens de parcours privilégié, allant du passé vers le futur.

De plus, depuis l'invention du calcul différentiel par Newton et Leibniz, il est souhaitable de pouvoir représenter l'évolution de systèmes physiques au cours du temps au moyen d'équations différentielles. Cela nous conduit à munir $\mathcal{T}$ de la structure mathématique adéquate, celle de *variété différentiable*.

Enfin, l'existence d'horloges (les systèmes planétaires, les rayonnements émis par des atomes excités, ...) permettent de comparer entre eux des intervalles de temps, voire même de les mesurer (en les comparant à un intervalle de temps choisi comme unité). Cela nous conduit à munir le temps d'une structure encore plus précise, celle de *variété affine*. Voici comment une telle structure permet la comparaison d'intervalles de temps. Pour tout couple d'instants t_1 et t_2 éléments de $\mathcal{T}$, l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est élément d'un espace vectoriel réel de dimension 1, noté $\overrightarrow{\mathcal{T}}$, appelé *espace des durées*. L'espace $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ opère sur $\mathcal{T}$ (éventuellement localement seulement, si la variété affine $\mathcal{T}$ n'est pas complète) ; étant donné un troisième instant $t_3 \in \mathcal{T}$, cette opération permet de déterminer l'instant $t_4 = t_3 + (t_2 - t_1)$, tel que les intervalles de temps $t_4 - t_3$ et $t_2 - t_1$ soient égaux.

Moyennant le choix d'une durée positive particulière prise comme unité, l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des durées peut être identifié à la droite réelle $\mathbb{R}$. Mais ce choix d'une unité de temps n'a rien de canonique : la description mathématique des phénomènes physiques doit pouvoir être faite indépendamment de tout choix d'unités.

On connaît toutes les variétés affines réelles connexes orientées de dimension 1. À un isomorphisme affine près, ce sont, si l'on ne considère que les variétés sans bord :

- la droite affine réelle orientée entière $\mathbb{R}$,
- les demi-droites affines ouvertes $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$,
- l'intervalle ouvert borné $]0, 1[$,
- le cercle trigonométrique orienté S^1.

Tous ces modèles sont localement isomorphes. C'est pourquoi lorsqu'on s'intéresse à l'évolution locale d'un système physique pendant un intervalle de temps limité, il n'est pas nécessaire de choisir parmi eux. Par contre, ce choix a son importance lorsqu'on traite de problèmes cosmologiques faisant intervenir le temps dans sa totalité. On devrait alors considérer comme possibles aussi les variétés à bord, c'est-à-dire ajouter à la liste ci-dessus :

- les demi-droites affines fermées $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$,
- les intervalles semi-ouverts bornés $[0, 1[$ et $]0, 1]$,
- l'intervalle fermé borné $[0, 1]$.

Bien entendu, le choix entre ces divers modèles du temps n'a qu'un intérêt historique et anecdotique, car on sait maintenant que les problèmes cosmologiques ne peuvent être correctement traités dans le cadre de la mécanique classique.

Pour Isaac Newton (1642–1727) [19], le modèle qu'il convient d'adopter pour le temps est la droite affine réelle orientée entière $\mathbb{R}$. C'est ce modèle qui est le plus souvent employé en Mécanique classique non relativiste. Signalons toutefois que selon certains philosophes, par exemple Friedrich Nietzsche (1844–1900) [20], le temps serait cyclique (théorie de l'*éternel retour*); pour eux, le temps serait donc isomorphe au cercle trigonométrique orienté S^1. Cette théorie, invérifiable par sa nature même, doit à notre avis être considérée comme un essai poétique plutôt que comme une théorie physique.

Nous devons maintenant évoquer l'importante question du caractère *universel* du temps. Assez curieusement, ce caractère a été implicitement admis sans discussion jusqu'à l'avènement de la théorie de la Relativité restreinte. En Mécanique newtonienne classique, on admet donc qu'il existe un temps absolu $\mathcal{T}$, et qu'à tout événement on peut associer, de manière canonique (et non pas selon une convention ayant une part d'arbitraire), quel que soit l'endroit de l'espace où se produit cet événement, un élément unique de $\mathcal{T}$, qui est l'*instant* auquel a lieu cet événement.

2.2. Espace absolu.

Notre intuition sensible nous conduit à représenter l'espace comme un "continu à trois dimensions", c'est-à-dire comme une variété topologique réelle connexe de dimension 3. L'existence de corps rigides utilisables comme règles et permettant de comparer entre elles des longueurs, la possibilité de faire des visées, de mesurer des angles, le fait que les rayons lumineux nous donnent l'intuition de la ligne droite, ont conduit à munir l'espace de structures bien plus riches que celle de variété topologique. Très tôt (les *Éléments* d'Euclide datent de 300 ans avant Jésus-Christ) il a été admis que l'espace pouvait être représenté mathématiquement par une partie d'un espace affine réel de dimension 3, et que dans cet espace certaines transformations étaient privilégiées. Ces transformations, appelées *déplacements euclidiens*, forment un groupe, le *groupe des déplacements euclidiens*; il est engendré par les translations et par les rotations autour d'un point. Cette découverte est sans doute due à l'existence de corps solides que l'on peut déplacer dans l'espace, mettre dans diverses positions, et utiliser pour repérer la position d'autres objets par rapport à ces solides particuliers utilisés comme repères.

On dit souvent que l'espace physique est représenté mathématiquement par un espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension 3, muni d'une structure euclidienne (structure permettant de définir la *distance* $|\overrightarrow{AB}|$ de deux points A et B de $\mathcal{E}$, ainsi que le *produit scalaire* $g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ de deux vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$, éléments de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associé à l'espace affine $\mathcal{E}$, cette distance et ce produit scalaire étant des fonctions à valeurs réelles). Cela n'est pas tout à fait exact, car ce n'est qu'après le choix d'une unité de longueur que l'espace physique se trouve muni d'une structure euclidienne. Il est pourtant possible de définir, de manière tout à fait canonique, un espace vectoriel réel orienté $\overrightarrow{\mathcal{L}}$, de dimension 1, appelé *espace des distances* dans $\mathcal{E}$, et un autre espace vectoriel réel orienté $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$, de dimension 1 lui aussi, appelé *espace des produits euclidiens* dans $\mathcal{E}$ (en fait $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$ est tout simplement le produit tensoriel $\overrightarrow{\mathcal{L}} \otimes \overrightarrow{\mathcal{L}}$ de deux exemplaires de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$) ; moyennant quoi la *distance* de deux points A et B de $\mathcal{E}$, et le *produit euclidien* (nous préférons cette dénomination à celle de produit scalaire) $g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ de deux vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$, éléments de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, peuvent être canoniquement définis, sans qu'il soit nécessaire de choisir d'unité de longueur ; ce sont des éléments, respectivement, des espaces $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$. Pour cela, le lecteur pourra se reporter à l'Appendice 1 ci-après. Nous dirons donc que l'espace physique est représenté par un espace affine réel, de dimension 3, muni d'une *structure euclidienne intrinsèque*.

Cette description de l'espace physique n'a été remise en question qu'au cours du XIX-ème siècle, après la découverte, par Nikolai Ivanovich Lobachevski (1792–1856), János Bolyai (1802–1860) et Bernhard Riemann (1826–1866) des géométries non euclidiennes. Dans sa belle conférence à ce même colloque, J.-P. Luminet a présenté les idées actuelles sur la géométrie de l'espace physique.

Abordons maintenant la délicate question du caractère absolu de l'espace, intimement liée à celle du caractère absolu du mouvement. Notre intuition sensible nous donne accès, non pas aux points de l'espace ou aux instants du temps, mais à des *événements*, c'est-à-dire à des couples formés d'un point d'espace (le point où a lieu l'événement) et d'un instant, élément du temps $\mathcal{T}$ (l'instant auquel a lieu l'événement). Mais comment comparer l'espace à deux instants différents? En d'autres termes, considérons un objet matériel, par exemple un morceau de sparadrap, et observons-le à deux instants différents t_1 et t_2. Comment savoir si le point de l'espace $\mathcal{E}$ où est situé cet objet à l'instant t_1 est le même que celui où il est situé à l'instant t_2? Les philosophes et les savants, depuis Aristote jusqu'à Copernic non inclus, dans leur grande majorité (nous verrons plus loin qu'il y eut quelques brillantes exceptions), ont considéré la Terre comme immobile. Par suite, si l'objet matériel en question (notre morceau de sparadrap) était partie d'un rouleau soigneusement rangé, pendant tout l'intervalle de temps $[\,t_1, t_2\,]$, dans la réserve d'une pharmacie installée sur la terre ferme, ces savants auraient répondu que le point de l'espace occupé par cet objet aux instants t_1 et t_2 était le même. Si par contre ce morceau de sparadrap se trouvait collé au doigt d'un voyageur [10], ces mêmes savants auraient répondu que les points de l'espace qu'il occupait aux instants t_1 et t_2 étaient différents.

En formulant prudemment l'hypothèse du mouvement orbital des planètes, Terre comprise, autour du Soleil, Copernic a modifié cette manière de voir les choses. Il ne s'agissait pas d'une modification radicale, simplement d'un changement de repère. Pour Copernic, un repère fixe était, non plus un repère lié à la Terre, mais un repère ayant son origine au centre du Soleil, formé par trois axes pointant vers trois étoiles lointaines (les directions des étoiles lointaines étant à l'époque considérées comme fixes).

Cette conception a été retenue par Newton [19], pour qui l'espace, tout comme le temps, avait un caractère absolu. Pour lui, les notions de repos et de mouvement avaient donc aussi un caractère absolu.

3. Temps absolu, caractère relatif de tout mouvement

3.1. L'idée du caractère relatif de tout mouvement.

Pour un mathématicien accoutumé à raisonner dans l'*espace-temps*, le caractère absolu du temps signifie l'existence d'une projection canonique de l'espace-temps sur un ensemble appelé *temps*, et le caractère absolu de l'espace l'existence d'une projection canonique de l'espace-temps sur un ensemble appelé *espace*. Ce sont donc deux notions de même nature. Curieusement, alors que le caractère absolu du temps a été admis sans discussion jusqu'à l'avènement de la théorie de la Relativité restreinte, le caractère absolu de l'espace a très tôt été mis en question.

Nicolas de Cues (1401–1464) pensait que tout, dans l'Univers, était en mouvement, y compris notre planète, et que la place de celle-ci n'était nullement privilégiée.

Nicolas Copernic (1473–1543), dont nous avons parlé ci-dessus, n'a pas mis en cause le caractère absolu du mouvement ou du repos; mais pour lui, le repère fixe est lié, non plus à la Terre, mais au Soleil et aux étoiles lointaines; pour lui, toutes les planètes de notre système tournent autour du Soleil. Son ouvrage *"De revolutionibus Orbium Coelestium"*, qu'il a longtemps hésité à publier, parut en 1543, l'année même de sa mort. Il échappa ainsi aux rigueurs de l'Église qui, en 1616, a retiré son ouvrage de la circulation "jusqu'à correction" et en a interdit l'enseignement. Le système de Copernic s'est quand même imposé, grâce aux travaux de Galilée (1564–1642) (condamné en 1633 à abjurer publiquement sa découverte du mouvement de la Terre, et dont les livres furent brûlés) ainsi qu'à la découverte par Johannes Kepler (1571–1630) des trois très importantes lois portant son nom, qui régissent les mouvements des planètes du système solaire.

Giordano Bruno (1548–1600) imaginait un univers infini et, le premier, a compris de manière parfaitement claire le caractère relatif de tout mouvement. Afin de réfuter un argument employé pour nier le mouvement de la Terre, selon lequel si la Terre se déplaçait, une pierre lâchée du haut d'une tour ne tomberait pas verticalement au pied de cette tour, il a imaginé que la pierre était lâchée du haut du mât d'un navire en mouvement, et a écrit (d'après [24]) :

> *"Ainsi se meut avec la Terre tout ce qui se trouve sur la Terre (...) ; un homme placé sur le mât du navire, quelle que soit la vitesse de celui-ci, ne manquera pas le but; rien n'empêchera la pierre ou tout autre objet pesant jeté (... du sommet) du mât (... d'atteindre) en ligne droite la base du mât".*

Son admirable indépendance d'esprit, son non conformisme intellectuel, lui ont valu un châtiment bien cruel : la Sainte Inquisition l'excommunia et le fit brûler vif. Il n'a toujours pas été réhabilité (alors que la révision du procès de 1633, engagée par le pape Jean Paul II, a abouti en 1992 à la réhabilitation de Galilée).

Wilhelm Gotfried Leibniz (1678–1716) a critiqué la conception que se faisait Newton d'un espace absolu, et suggéré qu'on exprime les lois de la mécanique sous une forme ne faisant intervenir que les positions relatives des corps matériels les uns par rapport aux autres, non leurs positions dans un hypothétique espace absolu. Malheureusement, une théorie mécanique qui ne fait intervenir que les distances mutuelles des corps matériels en présence ne permet de traiter correctement l'évolution d'un système isolé que si le moment cinétique total de ce système est nul. La suggestion de Leibniz ne pouvait donc pas aboutir avec les moyens connus à son époque.

Plus d'un siècle plus tard, Ernst Mach (1838–1916) [15] a repris, en les poussant plus loin encore, les idées de Leibniz. Pour lui, l'inertie d'un corps matériel n'existe qu'en raison des interactions de ce corps avec tous les autres corps matériels de l'Univers. Ses idées, difficiles à formaliser dans le cadre de la mécanique non relativiste, ont influencé Einstein dans sa conception de la Relativité générale (voir [8 (c)] pages 88 à 96).

Ces voix sont longtemps restées isolées. Cependant, les progrès de l'Astronomie et l'étude de la Dynamique ont conduit à remettre en question le caractère absolu du mouvement, donc de l'espace.

William Herschel (1738–1822) avait compris que la Voie Lactée est une galaxie, c'est-à-dire un amas d'étoiles en forme de disque, dont notre Soleil fait partie. Il pensait que le Soleil était proche de son centre. En étudiant le mouvement apparent de sept étoiles relativement proches, il fut le premier à voir qu'on devait attribuer un mouvement propre au Soleil. Les observations de Jacobus Cornelius Kapteyn (1851–1922) ont confirmé les idées de Herschel sur l'appartenance du Soleil à une galaxie et sur le mouvement propre du Soleil. Le dogme de l'immobilité du Soleil se trouvait ainsi mis en doute. Harlow Shapley (1885–1972) a confirmé les résultats de Herschel et de Kapteyn sur la structure de la galaxie, tout en révisant fortement leurs estimations quant à ses dimensions et en montrant que la place du Soleil n'est pas du tout centrale. Bertil Lindblad (1895–1965) et Jan Hendrik Oort (1900–1992) ont découvert le mouvement de rotation d'ensemble de notre galaxie autour de son centre, la vitesse angulaire des étoiles dans ce mouvement étant d'autant plus grande que ces étoiles sont plus proches du centre de la galaxie. La nature extra-galactiques de certains objets, tels que la nébuleuse d'Andromède (M 31) a été reconnue par Herbert Doust Curtis (1872–1942). Edwin Powell Hubble (1889–1953) a observé la présence de céphéides dans la nébuleuse d'Andromède et conclu que cet objet était une autre galaxie, semblable à la nôtre. L'existence d'autres galaxies avait été pressentie par le philosophe Emmanuel Kant (1724–1804). De nombreuses galaxies ont été identifiées au cours du vingtième siècle. Vesto Melvin Slipher (1875–1969) a observé qu'Andromède se rapprochait de nous, à une vitesse d'environ 300 kilomètres par seconde. Avec Hubble, il a observé que la plupart des autres galaxies s'éloignent de nous. Milton La Salle Humason (1891–1973) et Hubble ont formulé la loi générale de fuite des galaxies : elles s'éloignent les unes des autres (et, en particulier, de la nôtre) à une vitesse proportionnelle à leurs distances mutuelles. Cette très importante découverte (dont l'interprétation est contestée par certains) est une pièce maîtresse des théories cosmologiques actuelles.

L'étude de la Dynamique a très tôt montré que les équations qui décrivent le mouvement relatif d'un système isolé par rapport à un repère qui, lui-même, est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme dans l'espace absolu, gardent la même forme que celles qui décrivent le mouvement de ce même système dans l'espace absolu. Voici ce que Paul Painlevé (1863–1933) écrit dans son petit livre, datant de 1909, sur les axiomes de la mécanique [21] :

> *"En un mot, le repérage absolu des mouvements n'est défini de par les axiomes de la Mécanique qu'à une translation près rectiligne et uniforme. Cette indétermination, sur laquelle nous revenons plus loin, ne présente d'ailleurs aucun inconvénient quant au développement de la Mécanique; qu'on adopte un quelconque des repérages absolus entre lesquels on a ainsi le choix, on démontre que les forces absolues telles que nous les avons définies restent les mêmes".*

Dans ce petit livre, Painlevé revient en effet à plusieurs reprises sur cette indétermination ([21], pages 20, 27 à 31, 35 et 36), mais ne va pas jusqu'à mettre en doute l'existence de l'espace absolu. Par contre Poincaré [23 (b), (c), (d)] rejette l'idée d'un espace absolu et affirme avec force le caractère relatif de tout mouvement. Dans les traités plus récents, tels que ceux de Jean Mandel [16], de Joseph Pérès [22] et de Henri Cabannes [3], tous les mouvements sont présentés comme relatifs, et les repères inertiels (relativement auxquels le mouvement d'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est rectiligne et uniforme) sont considérés comme tous équivalents, aucun n'étant privilégié.

3.2. L'espace-temps fibré sur le temps et sa structure affine.

Dans les traités classiques de mécanique [3, 16, 22], la présentation du caractère relatif de tout mouvement et l'introduction des repères inertiels est en général faite comme suit. L'espace est implicitement identifié à l'espace euclidien de dimension 3 de la géométrie. Cet espace est peuplé de corps, matériels ou conceptuels, avec parmi eux des solides qui peuvent être employés comme repères, dont la position dépend d'un paramètre, le temps. On évite d'évoquer la position absolue de chacun de ces corps dans l'espace, pour ne considérer que les positions relatives qu'ils occupent les uns par rapport aux autres. Chaque solide mobile peut servir à étudier le mouvement relatif des autres corps, par rapport à lui, utilisé comme repère. Le principe de l'inertie est alors introduit sous la forme suivante ([22], page 3) :

> *"Il existe au moins un repère géométrique, dit repère absolu, et un système de repérage du temps, (temps absolu) pour lesquels valent les énoncés ci-dessous :*
>
> *a) Un point matériel qui n'est soumis à aucune force a un mouvement d'accélération nulle, donc rectiligne et uniforme (principe de l'inertie);*
>
> *b) Un point matériel soumis à une ou plusieurs forces a, à chaque instant, une accélération proportionnelle à la résultante de ces forces;*
>
> *c) Les coefficients de proportionnalité entre accélérations et résultante des forces sont des constantes caractéristiques des divers points matériels que l'on peut envisager. Ils sont, par définition, les masses".*

Il est alors facile de montrer que le repère appelé ci-dessus *repère absolu* (et qui, à notre avis, devrait plutôt être appelé *repère inertiel*) n'est pas unique, mais qu'il en existe une infinité, et que si l'on considère deux quelconques d'entre eux, le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre est un mouvement de translation uniforme.

Si elle est parfaitement cohérente et adaptée à l'étude des systèmes mécaniques rencontrés en pratique, cette présentation de la Mécanique classique a l'inconvénient de ne pas mettre clairement en évidence la structure géométrique de l'espace-temps : celle-ci n'apparaît qu'à travers les formules de changement de repères inertiels (ce qui peut convenir à un algébriste, mais ne satisfera pas un géomètre). On peut également lui reprocher de ne pas donner une description intrinsèque de l'évolution des systèmes mécaniques, puisque parmi les grandeurs qu'elle utilise, certaines (telles que les vitesses, les impulsions, l'énergie cinétique) ne dépendent pas que du système mécanique considéré, mais aussi du repère par rapport auquel on étudie son mouvement. Pour un géomètre, une description vraiment intrinsèque du mouvement serait beaucoup plus satisfaisante.

Élie Cartan (1869–1951), dans son mémoire [4 (a)], a clairement décrit la structure géométrique de l'espace-temps de la Mécanique classique, et en a même proposé diverses généralisations. Ses réflexions sur ce sujet ont été très fécondes : il semble bien qu'elles aient contribué à lui faire découvrir diverses structures géométriques importantes, qu'il a appelées *connexions affines* [4 (a)], *connexions conformes* et *connexions projectives* [4 (b)]. Ces travaux (avec ceux de H. Weyl [30], eux aussi inspirés à ce grand savant par ses réflexions sur les théories physiques) sont à l'origine du concept de *connexion principale*, développé plus tard par Charles Ehresmann (1905–1979) [7] (pour un exposé récent sur le sujet, voir l'article de Paulette Libermann [12]).

Nous allons nous efforcer de donner un aperçu des idées de Cartan sur la structure géométrique de l'espace-temps en Mécanique non relativiste. Dans cette théorie, le temps $\mathcal{T}$ est absolu, mais l'espace ne l'est pas. Nous devons considérer qu'à chaque instant $t \in \mathcal{T}$, il existe un *espace à l'instant* t, noté $\mathcal{E}_t$, et que pour deux instants distincts t_1 et t_2, les espaces $\mathcal{E}_{t_1}$ et $\mathcal{E}_{t_2}$ sont disjoints. La réunion $\mathcal{U} = \bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_t$ des espaces à tous les instants est l'*espace-temps*; ses éléments sont appelés *événements*. Il est muni d'une structure d'*espace fibré* dont la *base* est le temps $\mathcal{T}$, et dont la *projection canonique* est l'application qui, à chaque événement, associe l'unique instant t tel que cet événement soit élément de $\mathcal{E}_t$. Pour un instant $t \in \mathcal{T}$ donné, l'espace $\mathcal{E}_t$ à l'instant t est la *fibre* de l'espace-temps à cet instant. Chacune de ces fibres est munie, comme nous l'avons vu, d'une structure d'espace affine réel de dimension 3 et d'une structure euclidienne intrinsèque, au sens de l'Annexe 1. Mais nous devons encore munir l'espace-temps lui-même d'une structure géométrique permettant de comparer entre elles les fibres à différents instants. Comme nous l'avons vu ci-dessus, ce sont des propriétés mécaniques et physiques (l'existence de corps solides qu'on peut déplacer dans l'espace et employer comme règles, l'existence de rayons lumineux nous donnant l'intuition de la ligne droite) qui sont à l'origine de la création de la géométrie euclidienne. De même, c'est un principe de Mécanique, le *principe de l'inertie* énoncé ci-dessus, qui va nous permettre de munir l'espace-temps de la structure géométrique adéquate.

Considérons, pour chaque instant t, un repère affine $\bigl(P(t), \overrightarrow{e}_1(t), \overrightarrow{e}_2(t), \overrightarrow{e}_3(t)\bigr)$ de l'espace $\mathcal{E}_t$. Son origine $P(t)$ est un point de $\mathcal{E}_t$, et les vecteurs $\overrightarrow{e}_i(t)$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont des éléments de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}_t$ associé à l'espace affine $\mathcal{E}_t$ qui forment une base de cet espace. Nous supposons que cette famille de repères affines constitue un *repère inertiel* de l'espace-temps, qui pourrait être réalisé matériellement par un certain nombre de points matériels dont les distances relatives restent invariantes au cours du temps (comme les distances relatives des points d'un corps solide) et dont le mouvement est libre, aucune force ne s'exerçant sur ces points. Ayant ainsi construit, pour tout instant $t \in \mathcal{T}$, un repère affine de $\mathcal{E}_t$, nous pouvons identifier entre eux tous ces espaces, en identifiant, pour deux instants distincts t et t', le point de $\mathcal{E}_t$ dont les coordonnées, dans le repère $\bigl(P(t), \overrightarrow{e}_1(t), \overrightarrow{e}_2(t), \overrightarrow{e}_3(t)\bigr)$ sont (x_1, x_2, x_3) avec le point de $\mathcal{E}_{t'}$ dont les coordonnées, dans le repère $\bigl(P(t'), \overrightarrow{e}_1(t'), \overrightarrow{e}_2(t'), \overrightarrow{e}_3(t')\bigr)$ sont les mêmes, (x_1, x_2, x_3). Remarquons au passage que dans ces identifications, les espaces des distances $\overrightarrow{\mathcal{L}}_t$ et $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{t'}$ dans $\mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_{t'}$, ainsi que les espaces des produits euclidiens $\overrightarrow{\mathcal{L}}_t^2$ et $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{t'}^2$ dans ces deux espaces, s'identifient, et que les structures euclidiennes intrinsèques des fibres $\mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_{t'}$ se correspondent. Nous construisons ainsi une *trivialisation* de l'espace-temps $\mathcal{U}$. Comme la fibre-type $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire l'espace auquel toutes les fibres $\mathcal{E}_t$ ont été identifiées) est un espace affine réel de dimension 3, et que la base $\mathcal{T}$ est un espace affine réel de dimension 1, l'espace-temps, identifié, grâce à la trivialisation ainsi construite, au produit $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$, se trouve muni d'une structure d'espace affine réel de dimension 4. Pour tout couple (z_1, z_2) d'événements éléments de $\mathcal{U}$, nous pouvons donc donner un sens à la notion de vecteur $\overrightarrow{z_1 z_2}$ d'origine z_1 et d'extrémité z_2 (alors qu'auparavant nous ne pouvions le faire que si z_1 et z_2 étaient éléments d'une même fibre $\mathcal{E}_t$ en utilisant la structure d'espace affine de cette fibre). L'ensemble de ces vecteurs est l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ associé à l'espace affine $\mathcal{U}$, que nous pouvons maintenant faire opérer sur $\mathcal{U}$ par translations (ces translations pouvant désormais porter à la fois sur l'espace et sur le temps).

En utilisant le fait que le mouvement relatif d'un repère inertiel par rapport à un autre repère inertiel est une translation uniforme, il est facile de vérifier que la structure affine de $\mathcal{U}$ ainsi construite, donc aussi l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ et son action sur $\mathcal{U}$ par translations, ne dépendent pas du choix du repère inertiel qui a servi à trivialiser $\mathcal{U}$. Rejeter l'existence d'un espace absolu équivaut à considérer que parmi les trivialisations de $\mathcal{U}$ ainsi construites au moyen de repères inertiels, aucune n'est privilégiée. Cela n'empêche nullement la structure d'espace affine de $\mathcal{U}$ d'être parfaitement bien définie.

Cartan va plus loin dans son analyse, en remarquant que le rôle essentiel des repères inertiels est de permettre de définir le *transport parallèle* de vecteurs le long d'une courbe d'univers (courbe dans l'espace-temps), ce qui peut être fait au moyen d'une structure géométrique locale qu'il appelle *connexion affine* (et qu'on appelle aujourd'hui *connexion de Cartan*). Dans l'espace affine $\mathcal{U}$, l'équipollence de deux vecteurs, attachés à deux points distincts de $\mathcal{U}$, exprime le fait qu'ils se déduisent l'un de l'autre par transport parallèle le long d'une courbe joignant ces deux points. La connexion naturellement associée à la structure d'espace affine de $\mathcal{U}$ est dite *plate* parce que le résultat ne dépend pas du choix de la courbe le long de laquelle se fait le transport parallèle. Cartan montre aussi qu'en utilisant des connexions plus générales, non plates, pouvant comporter une *courbure* et une *torsion*, on peut munir l'espace-temps d'une structure géométrique tenant compte de l'existence d'un champ de forces (comme par exemple la pesanteur) et qu'on obtient ainsi une théorie qui, tout en restant classique (c'est-à-dire admettant la notion de temps absolu) ressemble beaucoup à la théorie de la Relativité générale, car elle incorpore certaines forces dans la géométrie de l'espace-temps.

3.3. Le groupe de Galilée.

La structure géométrique de l'espace-temps est très clairement décrite par Vladimir Arnold, dès le premier chapitre de son très riche ouvrage [1]; cet auteur en fait, à juste titre, le point de départ de son exposé des principes de la mécanique classique. L'espace-temps $\mathcal{U}$ est muni d'une structure d'espace affine réel de dimension 4, d'une projection canonique $\mathcal{U} \to \mathcal{T}$, qui est une application affine, sur un espace affine réel de dimension 1 appelé *temps*, dont les fibres $\mathcal{E}_t$ (qui sont des sous-espaces affines réels de dimension 3, puisque la projection canonique est une application affine) sont toutes munies d'une structure euclidienne intrinsèque. De plus, toute translation dans l'espace affine $\mathcal{U}$ dont la composante temporelle $\theta \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$ est non nulle applique chaque fibre $\mathcal{E}_t$ sur la fibre $\mathcal{E}_{t+\theta}$ par un isomorphisme d'espaces munis de structures euclidiennes intrinsèques, au sens de l'appendice 1. Le *groupe de Galilée* est le groupe des transformations de $\mathcal{U}$ qui préservent cette structure. Pour sa description explicite, le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage d'Arnold déjà cité [1], ou au beau livre de Jean-Marie Souriau ([25], pages 138 à 140).

3.5. Descriptions intrinsèques de l'évolution d'un système mécanique.

La connexion affine de l'espace-temps $\mathcal{U}$ permet de mettre les équations qui décrivent l'évolution d'un système mécanique sous une forme intrinsèque, n'utilisant aucun repère arbitraire auquel rapporter les mouvements, ni aucun choix particulier d'unités de temps, de longueur ou de masse. Nous allons traiter l'exemple très simple d'un point matériel dans un champ de forces; la méthode pourrait s'appliquer à des systèmes beaucoup plus compliqués.

La masse du point matériel est un élément d'un espace vectoriel de dimension 1, l'*espace des masses*, que nous noterons $\overrightarrow{\mu}$ (nous réservons la lettre $\mathcal{M}$ pour l'espace de Minkowski dont il sera question plus loin). Le mouvement du point matériel est décrit par une application $t \mapsto c(t)$ de l'ensemble $\mathcal{T}$ des temps dans l'espace-temps $\mathcal{U}$. Cette application doit bien sûr être une *section* de la projection canonique $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$, ce qui veut dire qu'elle doit vérifier $\tau \circ c = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$. La différentielle de c au point $t \in \mathcal{T}$ est élément de l'espace $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mathcal{T}}, \overrightarrow{\mathcal{U}})$ des applications linéaires de $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{U}}$, qui s'identifie au produit tensoriel $\overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{U}}$, où $\overrightarrow{\mathcal{T}}^*$ désigne le dual de $\overrightarrow{\mathcal{T}}$. La force f (qui peut éventuellement dépendre du point de l'espace-temps occupé par le point matériel considéré) prend ses valeurs dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mu} \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{U}}$. De plus, la projection de la force sur $\overrightarrow{\mu} \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}$ (définie à partir de la projection canonique $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$) doit être identiquement nulle (la force n'accélère pas l'écoulement du temps). L'équation du mouvement du point matériel s'écrit

$$m \otimes \nabla_{Dc(t)}\bigl(Dc(t)\bigr) = f\bigl(c(t)\bigr)\,.$$

Dans cette équation, $\nabla_{Dc(t)}\bigl(Dc(t)\bigr)$ est la dérivée covariante, pour la connexion affine de l'espace-temps $\mathcal{U}$, du vecteur $Dc(t)$ relativement à lui-même.

En Appendice 3 nous montrons comment cette équation, explicitée dans un système de coordonnées locales correspondant à un repère tournant, conduit à exprimer la force centrifuge et la force de Coriolis (considérées, en Mécanique, comme des "forces fictives") au moyen des symboles de Christoffel de la connexion dans ce système de coordonnées.

Nous allons brièvement présenter quelques travaux, effectués dans la période 1930-2000, qui nous semblent avoir été inspirés à leurs auteurs par leurs réflexions sur la description des systèmes mécaniques. Sans avoir le caractère exceptionnellement novateur des travaux d'Einstein, qui ont révolutionné notre manière de voir l'univers, ces travaux nous semblent dignes d'être mentionnés.

André Lichnerowicz (1915–1998) [13 (a), (b), (c)], étudiant l'expression intrinsèque des équations de la Mécanique, a été conduit à introduire des structures géométriques nouvelles dont l'importance ne cesse de croître, qu'il a appelées *variétés de Poisson* [13 (d)] et *variétés de Jacobi* [13 (e)]. Il a notamment montré que le cadre naturel, pour l'étude de la géométrie des transformations canoniques employées en Mécanique analytique, était une *variété canonique* [13 (a), (f)], c'est-à-dire une variété de Poisson de dimension impaire dont les feuilles symplectiques sont de codimension 1, l'ensemble de ces feuilles s'identifiant à l'ensemble des temps $\mathcal{T}$. Les très importants travaux d'André Lichnerowicz sur les variétés de Poisson l'ont notamment conduit à l'étude des déformations des structures de Poisson, conduisant à un méthode de quantification. Les variétés de Poisson, qui ont donné lieu à un important travail d'Alan Weinstein [29 (a)], sont toujours très activement étudiées.

L'approche très originale de Jean-Marie Souriau [25] pour l'étude des systèmes mécaniques utilise, comme point de départ, l'*espace d'évolution $\mathcal{E}$ du système*, variété de dimension impaire $2n+1$ (qui, en Mécanique non relativiste, n'est autre que la variété canonique d'André Lichnerowicz). Cette variété (dont chaque élément décrit un état cinématique possible du système dans l'espace-temps) est munie d'une 2-forme fermée dont le noyau, de dimension 1, détermine un feuilletage en courbes de l'espace d'évolution. Chacune de ces courbes représente un *mouvement* du système. L'ensemble des mouvements est une variété $\mathcal{R}$ (éventuellement non séparée), de dimension paire $2n$, appelée *variété des mouvements* du système.

Lorsque le système considéré relève de la Mécanique non relativiste, on peut assez facilement comprendre pourquoi $\mathcal{R}$ a bien une structure de variété. Dans ce cas, il existe une projection canonique $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ de l'espace d'évolution du système sur l'ensemble des temps qui, à chaque état cinématique du système dans l'espace-temps, associe l'instant qui lui correspond. Considérons une valeur particulière t_0 du temps, et notons $\mathcal{E}_{t_0} = \tau^{-1}(t_0)$ la sous-variété de $\mathcal{E}$, de dimension paire $2n$, formée par les éléments de l'espace d'évolution dont la coordonnée "temps" est t_0. L'ensemble des mouvements qui existent à l'instant t_0 est un ouvert de l'ensemble de tous les mouvements, et l'application qui associe, à chaque élément de cet ouvert, le point unique où ce mouvement (qui est une courbe dans $\mathcal{E}$) rencontre $\mathcal{E}_{t_0}$ est une bijection de cet ouvert sur $\mathcal{E}_{t_0}$. On peut employer cette bijection pour construire une carte de $\mathcal{R}$ dont le domaine est l'ensemble des mouvements qui existent à l'instant t_0. Si on considère un autre instant t_1, on peut de même construire une autre carte de $\mathcal{R}$ dont le domaine est l'ensemble des mouvements qui existent à l'instant t_1. Le théorème de différentiabilité du flot d'une équation différentielle permet alors de voir que l'application de changement de carte est un difféomorphisme. C'est pourquoi l'ensemble des cartes de $\mathcal{R}$ qu'on peut ainsi construire, en considérant tous les instants possibles, détermine sur $\mathcal{R}$ une structure de variété différentiable. La variété des mouvements peut ne pas être séparée en raison de l'existence de mouvements non éternels, qui cessent d'exister (ou qui commencent à exister) pour une valeur finie du temps (comme, par exemple, les mouvements de collision ou d'éjection dans le problème des deux corps).

La 2-forme fermée dont l'espace d'évolution est muni détermine, par projection, une forme symplectique sur la variété des mouvements. L'idée de la variété des mouvements, munie de sa forme symplectique, se trouve en germe dans la *Mécanique analytique* de Joseph Louis Lagrange (1736–1813) [11], plus précisément dans son étude des équations qui régissent l'évolution des éléments orbitaux des planètes. Les symétries de l'espace d'évolution (notamment les translations dans le temps si le système est autonome, éventuellement aussi les transformations de Galilée) donnent, après projection, des symétries de la variété des mouvements, exprimées mathématiquement par l'action d'un groupe de Lie sur cette variété, cette action conservant la forme symplectique. Lorsque le système mécanique considéré est traité dans le cadre de la Mécanique classique, ce groupe de symétries contient le groupe de Galilée. Mais l'approche de Souriau reste encore valable en Mécanique relativiste, le groupe de symétries du système contenant alors le groupe de Poincaré (dont il sera question plus loin). Les variétés des mouvements sur lesquelles le groupe de Galilée dans le cas classique, ou le groupe de Poincaré dans le cas relativiste, agit de manière transitive, ont été classifiées par J.-M. Souriau (qui, au passage, a le premier obtenu un intéressant théorème sur la classification de tous les espaces homogènes symplectiques, obtenu indépendamment par Kirillov et Kostant). Cette classification a une interprétation physique : elle correspond à la classification des particules élémentaires selon leur *masse* et leur *spin*.

L'étude des systèmes mécaniques a conduit Wlodzimierz Tulczyjew [26] à de très intéressants développements concernant la géométrie, sur une variété différentiable M, des fibrés tangents et cotangents itérés TT^*M, T^*TM et T^*T^*M. Ces outils mathématiques nouveaux lui ont permis de renouveler les formulations lagrangienne et hamiltonienne de la Mécanique.

Les importants travaux d'Alan Weinstein [29 (b)] sur les groupoïdes symplectiques, puis sur les groupoïdes de Poisson, ont aussi pour origine, au moins en partie, les problèmes rencontrés en Mécanique.

4. Abandon du temps absolu : la Relativité restreinte

4.1. Vitesse de la lumière, expériences de Michelson et Morley.

Dès 1675, l'astronome Ole Christensen Römer (1644–1710) avait compris que la lumière se propage à une vitesse finie et donné une estimation relativement précise de cette vitesse. Ce résultat, qu'il avait déduit de l'observation des instants auxquels il avait observé les éclipses des satellites de Jupiter, ne fut pleinement reconnu qu'après l'observation, en 1727, par l'astronome James Bradley (1693-1762), de l'aberration des étoiles lointaines. Ce phénomène (une légère variation de la direction apparente d'une étoile, lors d'observations faites à deux époques différentes de l'année) avait fourni à Bradley à la fois la première preuve directe du mouvement relatif de la Terre par rapport aux étoiles lointaines et une mesure de la vitesse de la lumière plus précise que l'évaluation faite par Römer.

Par ailleurs, James Clerk Maxwell (1831-1879), qui avait, vers 1873, établi les équations générales qui régissent l'évolution d'un champ électromagnétique, avait compris que la lumière est une onde électromagnétique. Ce fait fut très généralement admis après que l'on eut vérifié que la vitesse à laquelle elle se propage est bien la même que celle à laquelle se propagent les ondes hertziennes.

Or les équations de Maxwell, qui prévoient la propagation de la lumière à la même vitesse c dans toutes les directions, ne sont pas invariantes par le groupe de Galilée. Dans un repère mobile à une vitesse v par rapport à l'hypothétique milieu (appelé *éther*) servant de support aux ondes électromagnétiques, la vitesse de la lumière devrait être $c - v$ dans la direction de la vitesse v, $c + v$ dans la direction opposée, et devrait prendre, dans les directions transverses à la vitesse v, toutes les valeurs comprises entre $c - v$ et $c + v$, suivant leurs orientations. L'électromagnétisme faisait ainsi réapparaître l'hypothétique repère absolu, dont les mécaniciens avaient eu tant de mal à se débarrasser! Des expériences, destinées à comparer la vitesse de la lumière dans deux directions orthogonales, furent réalisée par Albert Abraham Michelson (1852–1931) d'abord seul (1880) puis (en 1887 [17] et à plusieurs reprises par la suite) en collaboration avec Edward Williams Morley (1838–1923). Diverses hypothèses plus ou moins satisfaisantes furent proposées pour expliquer le résultat négatif de ces expériences. Par exemple, l'entraînement de l'éther par la Terre, envisagé par Michelson, s'accordait mal avec l'aberration des étoiles lointaines. Hendrik Anton Lorentz (1853–1928) proposa en 1895 [14 (a)] une explication basée sur une contraction des longueurs d'un solide en mouvement selon la direction parallèle à sa vitesse. La même explication fut aussi proposée indépendamment par George Francis FitzGerald (1851–1901). En 1904 [14 (b)], Lorentz observa l'invariance de la forme des équations de Maxwell lors de changements de variables (aujourd'hui appelés *transformations de Lorentz*) portant à la fois sur les coordonnées d'espace et le temps. Ainsi que l'a signalé Poincaré dans son mémoire [23 (e)], cette transformation avait été précédemment considérée par Woldemar Voigt (1850–1919) [28].

En 1905, presque simultanément et sans doute indépendamment, Albert Einstein (1879–1955) et Henri Poincaré (1854–1912) soumettent pour publication deux importants mémoires qui, tous deux, contiennent l'essentiel des bases mathématiques de la théorie de la Relativité restreinte.

Le mémoire d'Einstein [8 (a)] met très clairement en cause la notion de temps absolu, en présentant une critique détaillée de la notion de simultanéité. Il propose d'admettre deux postulats fondamentaux :

(i) aucun phénomène physique, qu'il soit mécanique ou électromagnétique, ne peut permettre de distinguer, parmi tous les repères inertiels, un éventuel repère absolu;

(ii) la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, et ne dépend pas du repère inertiel par rapport auquel on l'évalue.

En utilisant ces deux postulats, Einstein retrouve les formules de changement de repère précédemment obtenues par Lorentz, discute des conséquences de la nouvelle théorie pour la cinématique (lois de composition des vitesses) et l'électromagnétisme (expressions d'un même champ électromagnétique dans deux repères en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre). Il revient sur la contraction des longueurs postulée par Lorentz et sur le phénomène corrélatif de dilatation des temps, mais avec une explication beaucoup plus satisfaisante basée sur le caractère non absolu de la simultanéité. Enfin il observe l'équivalence fondamentale entre masse et énergie, donnée par la fameuse relation

$$E = mc^2 ,$$

sur laquelle il reviendra lors du développement de la théorie de la relativité générale. Ces idées révolutionnaires sont explicitées et popularisées dans ses conférences et publications ultérieures [8 (b), (c), (d)].

Le très riche mémoire de Poincaré [23 (e)], certainement rédigé tout à fait indépendamment de celui d'Einstein, contient une étude exhaustive des transformations de Lorentz, considérées comme formant un groupe et ainsi rattachées à une théorie mathématique bien établie. Poincaré admet le premier postulat d'Einstein (impossibilité de distinguer entre repères inertiels), qu'il formule dans des termes très semblables à ceux employés par Einstein. Comme Einstein, il obtient les formules relativistes de composition des vitesses. Il discute de la dynamique de l'électron, observe qu'on doit distinguer sa masse longitudinale et sa masse transversale, et envisage une modification de la loi d'attraction universelle de Newton afin de la rendre compatible avec une transmission des interactions gravitationnelles à la vitesse de la lumière, qu'il considère comme une limite infranchissable. Comme Einstein, Poincaré a compris l'équivalence de la masse et de l'énergie, puisqu'il a cherché à prouver que la masse de l'électron était d'origine électromagnétique (explication aujourd'hui considérée comme inexacte).

Peut-on attribuer conjointement à Einstein et à Poincaré la découverte de la théorie de la Relativité restreinte? Certains physiciens et historiens des sciences le pensent. Cependant, les idées physiques (caractère non absolu de la simultanéité, nécessité de raisonner sur les événements, dans l'espace-temps, plutôt que séparément sur les points d'espace et le temps) sont, à notre avis, beaucoup plus clairement exprimées par Einstein que par Poincaré. Pour Poincaré, les transformations de Lorentz et les "temps locaux" qu'elles font intervenir semblent rester des artifices mathématiques. Il ne met pas en doute l'existence d'un temps absolu. Ayant fait d'admirables travaux dans le domaine de la Mécanique classique [23 (f)], peut-être Poincaré avait-il quelque réticence à en remettre les bases en question. Peut-être aussi était-il trop imprégné par l'idée, à plusieurs reprises affirmée dans ses livres de Philosophie des sciences [23 (a), (b), (c), (d)], selon laquelle une description du monde physique peut être plus commode qu'une autre sans pour autant être plus vraie, et qu'entre plusieurs théories rendant aussi bien compte des phénomènes physiques, il convient d'employer la plus simple, jusqu'à ce qu'une autre la remplace parce qu'elle se révèle encore plus commode et plus simple. Poincaré n'était pas convaincu de la plus grande simplicité ou de la plus grande commodité de la théorie de la Relativité; voici en effet la conclusion d'une conférence qu'il a faite à Londres le 4 mai 1912, publiée dans ses *Dernières pensées* [23 (d)] , dans laquelle il présentait cette théorie :

> *"Quelle va être notre position en face de ces nouvelles conceptions? Allons-nous être forcés de modifier nos conclusions? Non certes : nous avions adopté une convention parce qu'elle nous semblait commode, et nous disions que rien ne pourrait nous contraindre à l'abandonner. Aujourd'hui certains physiciens veulent adopter une convention nouvelle. Ce n'est pas qu'ils y soient contraints; ils jugent cette convention nouvelle plus commode, voilà tout; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l'ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes. Je crois, entre nous, que c'est ce qu'ils feront encore longtemps".*

Sur ce dernier point, Poincaré ne se trompait malheureusement pas! Il est à noter aussi que dans ses conférences et écrits nettement postérieurs à la publication du mémoire d'Einstein, par exemple la conférence au congrès de Lille de 1909 et celle de 1912 dont la conclusion est citée ci-dessus, Poincaré expose les principes de la Relativité restreinte en rendant un hommage appuyé à Lorentz, mais sans jamais mentionner Einstein! Il est vrai que de même Einstein, de son côté, ne mentionne jamais dans ses écrits le mémoire de Poincaré de 1905.

4.2. L'espace-temps de Minkowski.

Comme en mécanique classique non relativiste, l'espace-temps de la Relativité restreinte est un espace affine réel $\mathcal{M}$, de dimension 4. Mais cet espace n'est plus doté d'une projection canonique sur un ensemble des temps, car il n'existe plus de temps absolu. Par contre, l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ associé à l'espace affine $\mathcal{M}$ est muni de ce que nous avons appelé une *structure de Minkowski intrinsèque* (voir Appendice 3), définie par une application bilinéaire symétrique de $\overrightarrow{\mathcal{M}} \times \overrightarrow{\mathcal{M}}$ dans un certain espace vectoriel réel de dimension 1, noté $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^*$ (qui est le dual de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ engendré par une certaine forme quadratique de signature $(+,-,-,-)$ sur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$). Nous montrons dans l'Appendice 3 que le choix d'un élément non nul particulier de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ permet de définir, dans $\mathcal{M}$, à la fois une unité de longueur (utilisable pour la mesure de segments de droite sur les droites de genre espace) et une unité de temps (utilisable pour la mesure de segments de droite sur les droites de genre temps).

L'espace-temps $\mathcal{M}$ de la Relativité restreinte est nommé *espace de Minkowski*, en hommage à Hermann Minkowski (1864–1909) qui en a décrit la géométrie [18] et a eu, le premier, l'idée d'utiliser une coordonnée imaginaire pure pour exprimer les transformations de Lorentz au moyen de formules analogues à celles qui expriment les rotations.

4.3. Le groupe de Poincaré.

Le groupe de Lorentz, ainsi nommé par Poincaré, est le groupe des transformations linéaires de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ qui préservent chaque forme quadratique élément de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$, de dimension 1. Le groupe de Poincaré est le groupe des transformations de l'espace-temps de Minkowski $\mathcal{M}$ qui préservent sa structure. Il est engendré par les translations de cet espace affine et les transformations de Lorentz (l'espace affine $\mathcal{M}$ étant identifié à l'espace vectoriel associé en choisissant un point quelconque comme origine). Le lecteur en trouvera une description explicite dans le livre de J.-M. Souriau [25], page 170.

5. La Relativité générale

5.1. Insuffisances de la Relativité restreinte.

Dans sa troisième conférence à l'université de Princeton [8 (c)], Einstein indique très clairement les considérations qui l'ont conduit à développer la théorie de la Relativité générale. En voici un bref aperçu.

Dans la théorie de la Relativité restreinte, tout comme en Mécanique classique non relativiste, il existe une classe particulière de repères privilégiés : les repères inertiels. Einstein a cherché à construire une théorie dans laquelle aucun repère ne serait privilégié. D'ailleurs, le concept même de repère global, inspiré par l'existence de corps solides indéformables par rapport auxquels on peut repérer la position, en fonction du temps, des objets physiques, a-t-il encore un sens en Relativité? On peut légitimement se poser cette question, puisque l'impossibilité de transmettre des signaux à distance à une vitesse supérieure à celle de la lumière est incompatible avec l'existence de corps solides parfaitement rigides. En étudiant la géométrie d'un disque tournant, Einstein a même été conduit à mettre en doute la validité de la géométrie euclidienne pour décrire les propriétés physiques des hyperplans de genre espace dans l'espace-temps.

D'autre part, Einstein remarque que la théorie de la Relativité restreinte n'explique pas un fait troublant : l'égalité de la masse inerte et de la masse gravitationnelle. Les expériences faites par Loránd Eötvös (1848–1919) avaient montré cette égalité (ou plutôt la constance du rapport de la masse gravitationnelle à la masse inerte pour des substances de différentes compositions chimiques), avec une précision de l'ordre de 5.10^{-9}. Des expériences faites par Robert Henry Dicke vers 1960 ont porté cette précision à 10^{-11}. Ce résultat implique (et équivaut) à l'équivalence entre champ gravitationnel et champ d'accélération : en rapportant les mouvements à un repère plus ou moins accéléré on peut, à volonté, faire apparaître ou annuler un champ gravitationnel dans une région restreinte de l'espace-temps. C'est ainsi que dans un avion en vol parabolique, simulant la chute libre, on peut faire disparaître la force de pesanteur. Einstein propose d'accorder à ce fait expérimental le rang de principe, et l'appelle *principe d'équivalence*. Pour en tenir compte, il a l'intuition géniale de traduire le champ gravitationnel en termes de propriétés géométriques de l'espace-temps.

Enfin, l'équivalence masse - énergie, déjà découverte lors du développement de la Relativité restreinte, conduit Einstein à penser que comme la masse, toute forme d'énergie (par exemple l'énergie électromagnétique) doit contribuer à la création d'un champ gravitationnel. Il y aurait ainsi réciprocité, comme dans la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell : la masse d'un objet matériel, et plus généralement toute forme d'énergie, recevrait l'influence du champ de gravitation, ce qui affecterait son mouvement, et réciproquement contribuerait à créer ce champ, intervenant dans la structure géométrique de l'espace-temps.

Alors que la paternité de la théorie de la Relativité restreinte peut sembler à certains partagée entre Lorentz, Poincaré et Einstein, c'est sans conteste possible Einstein seul qui est à l'origine de la théorie de la Relativité générale.

5.2. Espace-temps et équations d'Einstein.

Einstein conserve la structure locale de l'espace de Minkowski, c'est-à-dire la forme bilinéaire, de signature $(+,-,-,-)$, servant à mesurer à la fois les distances et les durées. Mail il lui confère un caractère purement local : elle dépend du point de l'espace-temps considéré. Ainsi l'espace-temps d'Einstein est une variété différentiable réelle, de dimension 4, munie de ce que l'on appelle aujourd'hui une métrique pseudo-riemannienne de signature $(+,-,-,-)$, notée g.

Comme en mécanique classique (paragraphe 2.2 et appendice 1) ou en Relativité restreinte (appendice 3), on peut remarquer que ce n'est qu'après le choix d'une unité de mesure que la métrique pseudo-riemannienne g est déterminée. En changeant d'unité, on remplace g par λg, où λ est un scalaire réel strictement positif. En procédant comme dans l'appendice 3, on peut s'affranchir complètement du choix d'une unité en remplaçant la métrique pseudo-riemannienne g par une application bilinéaire symétrique à valeurs dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^*$, de dimension 1, dual de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ engendré par g.

La ligne d'univers d'une particule-test (soumise au champ gravitationnel, mais supposée de masse suffisamment faible pour ne pas contribuer de manière significative à sa création) est une géodésique de genre temps de la connexion de Levi-Civita associée à la métrique pseudo-riemannienne g.

Il restait à Einstein à formuler les équations qui indiquent comment la masse des objets matériels, et les diverses formes d'énergie, distribuées dans l'espace-temps, contribuent à la formation du champ de gravitation. Einstein semble s'être inspiré de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi\rho$$

qui lie le champ d'attraction newtonienne ϕ créé par des masses distribuées dans l'espace, à la densité ρ de cette distribution de masses. Il pense à représenter la distribution d'énergie dans l'espace-temps par un champ T de tenseurs symétriques du second ordre appelé *tenseur d'impulsion-énergie*. Einstein aboutit à la célèbre équation

$$\mathcal{R} - \frac{1}{2}Rg = \chi T\,,$$

où $\mathcal{R}$ est le tenseur de Ricci de la métrique pseudo-riemannienne g et R la courbure scalaire (obtenue par contraction de $\mathcal{R}$). Au membre de droite, χ est une constante scalaire, et T le tenseur d'impulsion-énergie. Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est souvent appelé *tenseur d'Einstein* et noté $\mathcal{S}$.

Plus tard [8 (d)], des considérations sur la structure globale de l'espace-temps (problème cosmologique), et le désir de rendre possible l'existence de solutions stationnaires (Einstein acceptait mal l'idée d'un univers en évolution) conduisent Einstein à modifier cette équation en ajoutant un terme :

$$\left(\mathcal{R} - \frac{1}{2}Rg\right) + \Lambda g = \chi T\,,$$

où Λ est une nouvelle constante, appelée *constante cosmologique*.

Dès 1911, Einstein avait fait une prévision pouvant servir de test de la théorie de la Relativité gènérale : un rayon lumineux, provenant d'une étoile lointaine et rasant le bord du Soleil, devait, selon cette théorie, subir une déflexion de 1,7 seconde. Cette prévision a été vérifiée par Arthur Stanley Eddington (1882–1944) lors de l'éclipse totale de 1919. Une autre observation astronomique (l'avance du périhélie de Mercure de 43 secondes par siècle en plus de l'avance prédite par la théorie des perturbations classique), a également très tôt étayé cette théorie. Un troisième effet (la déviation vers le rouge de la longueur d'onde de la lumière lorsqu'elle se déplace à contre-courant dans un champ gravitationnel) a été confirmé par des observations astronomiques en 1925 (déviation vers le rouge des raies spectrales des étoiles massives) et par une expérience terrestre faite par R. Pound et G. Rebka en 1959. Tout récemment, les prévisions de la théorie de la Relativité générale ont dû être appliquées à un problème technique : la détermination de la position des objets terrestres au moyen des ondes émises par des satellites artificiels ("Global Positioning System"); les corrections relativistes sont en effet indispensables pour donner à cette détermination toute sa précision.

Après avoir créé la théorie de la Relativité générale, Einstein a cherché à construire une théorie plus générale encore qui ferait entrer le champ électromagnétique dans la géométrie de l'espace-temps. Ces recherches ont donné lieu à des échanges de lettres entre Einstein et Cartan [5] portant sur la théorie des connexions et le parallélisme absolu. La lecture de ces lettres est extrêmement enrichissante et instructive. La nouvelle théorie élaborée par Einstein, dans laquelle la connexion de Levi-Civita est remplacée par une connexion non symétrique, est brièvement présentée dans [8 (e)] et discutée par Cartan [4 (b)], pages 1863–1875. Cette théorie n'a malheureusement pas pleinement abouti.

6. Remerciements et conclusion

Je remercie les organisateurs du Colloque international "Géométrie au vingtième siècle, 1930–2000" de m'avoir invité à présenter ces quelques idées, bien qu'une bonne partie des travaux dont j'ai parlé soit quelque peu antérieure à 1930 (mais le temps n'est-il pas relatif?). Je remercie également Alain Albouy pour d'intéressants échanges de vue sur l'usage d'unités en Mécanique et en Physique, Jean Gunther pour d'importantes précisions sur l'histoire de l'Astronomie, José Beltrán, Paulette Libermann et Roland Pons pour leur lecture attentive d'une version préliminaire de ce travail et leurs critiques constructives. Je remercie Alan Weinstein et l'expert anonyme qui a examiné ce travail pour leurs recommandations, dont j'ai essayé de tenir compte.

Les limites de mes compétences m'ont contraint à laisser de côté plusieurs questions importantes qu'on peut légitimement se poser à propos de l'espace et du temps. Qu'en est-il de l'irréversibilité du temps? Quels sont les liens qui unissent la causalité et le sens de l'écoulement du temps? Que peut-on dire du temps cosmologique, et peut-on légitimement parler de l'âge de l'univers, s'il n'existe pas de temps absolu? Comment l'espace et le temps entrent-ils dans la description des phénomènes quantiques?

Pour terminer cet exposé, je voudrais souligner le fait que les descriptions du temps et de l'espace données ci-dessus admettent toutes la possibilité de donner un sens au concept d'événement ponctuel de l'espace-temps. Est-ce vraiment légitime? Peut-on vraiment concevoir un événement de durée nulle, d'extension spatiale nulle, correspondant à un point mathématique de la variété espace-temps? Cette question avait déjà été soulevée par Poincaré [23 a]. Les variétés différentiables sont des objets mathématiques qui, en dernier ressort, sont fondés sur les propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Cet ensemble est une construction mathématique due, dans une large mesure, à Julius Dedekind (1831–1916). Il est tout à fait admirable et stupéfiant que cette construction se soit révélée adaptée à la description du monde réel, à des échelles allant de 10^{-15} mètres (dimension des particules élémentaires) à 10^{26} mètres (dimension estimée de l'univers). De nouveaux objets mathématiques, tels que la géométrie non commutative d'Alain Connes, permettront peut-être, dans l'avenir, d'aller encore plus loin dans la compréhension de l'univers.

7. Bibliographie

1. Arnold, V.I., *Mathematical methods of classical mechanics*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1989; première édition en russe, Nauk, Moscou, 1974.

2. Bergson, H., *Durée et simultanéité, à propos de la théorie d'Einstein*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1922; réédité par Quadrige / Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

3. Cabannes, H., *Cours de mécanique générale*, Dunod, Paris, 1962.

4. Cartan, É., (a) *Les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, I et II, Ann. Ec. Norm. **40**, 1923, pp. 325–342 et **41**, 1924, pp. 1–25 (se trouve aussi dans les *Œuvres complètes*, partie III 1, pp. 659–746 et 799-823). (b) *Œuvres complètes*, parties III 1 et III 2, pp. 747–797, 825–862, 863–889, 1239–1243, Éditions du CNRS, Paris, 1984.

5. Cartan, É. et Einstein, A., *Letters on absolute parallelism, 1929–1932*, Princeton University Press et Académie Royale de Belgique, Princeton, 1979.

6. Dugas, R., *Histoire de la Mécanique*, Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1950. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996.

7. Ehresmann, Ch., *Les connexions infinitésimales*, Colloq. Topologie (Bruxelles 1950). Œuvres complètes, Partie I 2, pp. 179–205.

8. Einstein, A., (a) *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, traduit par M. Solovine d'après l'article des Annalen der Physik, XVII, 1905, Gauthier-Villars, Paris, 1925. (b) *L'éther et la théorie de la Relativité* et *La Géométrie et l'expérience*, Gauthier-Villars, Paris, 1953. (c) *Quatre conférences sur la théorie de la Relativité faites à l'université de Princeton* traduites par M. Solovine, Gauthier-Villars, Paris, 1925 (également publiées en anglais en un volume sous le titre *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 1922). (d) *Signification de la Relativité, compléments*, traduit par M. Solovine et M.-A. Tonnelat, Gauthier-Villars, 1960. (e) *Théorie de la gravitation généralisée*, traduit par M. Solovine d'après le second appendice de la troisième édition de "The Meaning of Relativity", 1950. Textes rassemblés en un seul volume et réimprimés par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1994.

9. Friedman, M., *Foundations of Space-Time Theories*, Princeton University Press, Princeton, 1983.

10. Hergé, *L'affaire Tournesol*, page 45, et *Vol 714 pour Sydney*, page 33. Casterman, Paris-Tournai, 1956 et 1968.

11. Lagrange, J.-L., *Méchanique analitique*, chez la veuve Desaint, Paris, 1788. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989.

12. Libermann, P., *Cartan connections and momentum maps*, à paraître dans les Banach Center Publications, Warszawa.

13. Lichnerowicz, A., (a) *Variétés symplectiques, variétés canoniques et systèmes dynamiques*, dans *Topics in Differentiable geometry*, pp. 57–85, Academic Press, New York, 1976. (b) *Variétés symplectiques et variétés canoniques*, dans *Trends in applications of pure mathematics to mechanics*, pp. 249–261, Pitman, London, 1976. (c) *New geometrical dynamics*, in *Differential geometrical methods in Mathematical Physics*, pp. 377–394, Lecture notes in Mathematics **570**, Springer Verlag, Berlin, 1977. (d) *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977), pp. 253–300. (e) *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. Pures et Appl. **57** (1978), pp. 453–488. (f) *La géométrie des transformations canoniques*, Bull. Soc. math. de Belgique **31** (1979), pp. 105–135.

14. Lorentz, H. A., (a) *Versuch einer Theorie der elktrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpen*, Leyde, 1895. (b) *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, Proc. Acad. Sc. Amsterdam, **6** (1904), p. 809.

15. Mach, E., *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*, ouvrage traduit de la quatrième édition allemande par E. Bertrand, Hermann, Paris, 1904. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1987.

16. Mandel, J., *Cours de mécanique, tome I*, École Polytechnique, Année scolaire 1953–1954, Paris.

17. Michelson, A. A. et Morley, E. W., American Journal of Science, **22** (1887), p. 333.

18. Minkowski, R. L. , Conférence faite à Cologne le 21 septembre 1908, citée et analysée dans le livre de René Dugas [6], pp. 468–473.

19. Newton, I., *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, tomes I et II, traduit par Madame la Marquise du Chastellet, chez Desaint et Saillant, Paris, 1759. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1990.

20. Nietzsche, F., *Le gai savoir* et *Ainsi parlait Zarathoustra*, Œuvres philosophiques complètes, volumes V et VI, Gallimard, Paris, 1971 et 1982.

21. Painlevé, P. *Les axiomes de la Mécanique, examen critique, avec une note sur la propagation de la lumière*, Gauthier-Villars, Paris, 1922. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995.

22. Pérès, J. *Mécanique générale*, deuxième édition, Masson, Paris (1962).

23. Poincaré, H. (a) *La science et l'hypothèse*, Ernest Flammarion, Paris, 1906. (b) *Science et méthode*, Ernest Flammarion, Paris, 1908. (c) *La valeur de la science*, Ernest Flammarion, Paris, 1912. (d) *Dernières pensées*, Ernest Flammarion, Paris, 1913. (e) *La Mécanique nouvelle*, livre réunissant en un seul volume le texte d'une conférence faite au congrès de Lille de l'Association française pour l'avancement des sciences en 1909, le mémoire du 23 juillet 1905 intitulé *Sur la dynamique de l'électron*, publié aux Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **XXI** (1906) et une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, de même titre (séance du 15 juin 1905, **CXL**, 1905, p. 1504); Gauthier-Villars, Paris, 1924; réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. (f) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tomes I, II et III, Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899, réimprimé par la Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1987.

24. SIMAAN, A. et FONTAINE, J. *L'image du monde des Babyloniens à Newton*, AdaptÉditions, Paris, 1998.

25. SOURIAU, J.-M. *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

26. TULCZYJEW, W. M. *Geometric Formulations of Physical Theories*, Bibliopolis, Napoli, 1989.

27. VAN FRASSEN, B. C. *An introduction to the Philosophy of Space and Time*, Columbia University Press, 1970.

28. VOIGT, W., Göttinger Nachrichten (1887), p. 41. Cité dans le livre de R. Dugas [6], page 454.

29. WEINSTEIN, A. (a) *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), pp. 523–557. (b) *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), pp. 101–104.

30. WEYL, H. *Temps, espace, matière*, traduit de la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy, 1922; réimprimé par la Librairtie scientifique Albert Blanchard, Paris, 1958.

Appendice 1. Espaces des distances et des produits euclidiens

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel, de dimension 3, pris comme modèle de l'espace physique, sur lequel agit le groupe G_E des déplacements euclidiens, par une action affine que nous noterons $\Phi : G_E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Pour chaque $g \in G_E$, l'application $\Phi_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, définie par $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$, est un automorphisme affine de $\mathcal{E}$.

Nous allons voir comment, de manière tout à fait canonique, sans avoir à choisir d'unité de longueur, munir $\mathcal{E}$ d'une structure (que nous appellerons *structure euclidienne intrinsèque*) permettant de définir la distance de deux points de $\mathcal{E}$ et le produit euclidien de deux vecteurs éléments de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les droites vectorielles orientées plongées dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire l'ensemble dont chaque élément est une droite affine orientée D plongée dans $\mathcal{E}$, munie d'un point privilégié 0_E jouant, sur cette droite, le rôle d'origine. Soit $\widehat{\mathcal{D}}$ l'ensemble

$$\widehat{\mathcal{D}} = \left\{ (D, P) \mid D \in \mathcal{D}\,,\ P \in D \right\},$$

dont les éléments sont les couples (D, P) formés par une droite vectorielle orientée $D \in \mathcal{D}$ et un point P de cette droite (qui ne coïncide pas nécessairement avec l'origine 0_D de D).

Le groupe G_E des déplacements euclidiens agit

- sur $\mathcal{D}$ de manière transitive,
- sur $\widehat{\mathcal{D}}$ de manière non transitive.

Plus précisément, deux léments (D_1, P_1) et (D_2, P_2) de $\widehat{\mathcal{D}}$ appartiennent à la même orbite de l'action de G_E si et seulement si les deux vecteurs $\overrightarrow{0_{D_1} P_1}$ et $\overrightarrow{0_{D_2} P_2}$ sont de même longueur et de même orientation (l'orientation d'un de ces vecteurs étant dite positive si elle est la même que celle de la droite orientée qui le porte, et négative dans le cas contraire).

L'*espace des distances* dans $\mathcal{E}$, que nous noterons $\overrightarrow{\mathcal{L}}$, est, par définition, le quotient de $\widehat{\mathcal{D}}$ par l'action de G_E, c'est-à-dire l'ensemble des orbites de l'action de G_E sur $\widehat{\mathcal{D}}$. Cet espace possède une structure naturelle d'espace vectoriel orienté de dimension 1. Voici comment cet espace apparaît, de manière tout à fait naturelle, comme celui dans lequel la mesure des disances orientées dans $\mathcal{E}$ prend ses valeurs. Considérons une droite affine orientée D plongée dans $\mathcal{E}$, et deux points A et B de cette droite. En prenant, sur la droite affine orientée D, le point $0_D = A$ pour origine, nous en faisons une droite vectorielle orientée (encore notée D). La distance (orientée) séparant A de B, note $|\overrightarrow{AB}|$, est, par définition, l'élément de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$, classe d'équivalence de (D, B). On remarquera que l'ordre des points A et B et l'orientation choisie de D jouent un rôle: la distance séparant B de A est, non pas égale, mais opposée à la distance séparant A de B; et si nous remplaçons l'orientation de D initialemnt choisie par l'orientation opposée, la distance séparant A de B est changée en son opposée.

Soit maintenant $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2 = \overrightarrow{\mathcal{L}} \otimes \overrightarrow{\mathcal{L}}$ le produit tensoriel de deux exemplaires de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$. C'est encore un espace vectoriel orienté de dimension 1, que nous appellerons *espace des produits euclidiens*. Soient $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ deux vecteurs, éléments de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associé à l'espace affine $\mathcal{E}$. Soit O un point quelconque de $\mathcal{E}$, D_1 et D_2 deux droites affines orientées passant par le point O parallèles, respectivement, aux vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$, et de même orientation que ces vecteurs. Si l'un ou l'autre des vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ ou $\overrightarrow{V}_2$ est nul, la droite orientée correspondante D_1 ou D_2 peut être choisie de manière quelconque, pourvu qu'elle passe par le point O. On choisit ce point pour origine de D_1 et de D_2, qui deviennent donc des droites vectorielles orientées. Soit θ l'angle de ces deux droites orientées (il est défini au signe près et modulo 2π, mais son cosinus est parfaitement déterminé). Soient A_1 un point de D_1 et A_2 un point de D_2 tels que $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{V}_2$. Posons:

$$g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2) = \cos\theta [D_1,\, A_1] \otimes [D_2,\, A_1]\,,$$

où nous avons noté $[D_1,\, A_1]$ et $[D_2,\, A_2]$ les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$, classes d'équivalence de $(D_1,\, A_1)$ et de $D_2,\, A_2)$, respectivement. Nous dirons que l'élément $g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ de $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$ est le *produit euclidien* des vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$.

L'application g ainsi définie ne dépend pas des choix arbitraires (point O, droites D_1 et D_2 dans le cas où un des vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ ou $\overrightarrow{V}_2$ est nul) que nous avons faits pour la définir. C'est une application bilinéaire symétrique de $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$. De plus, elle est définie positive (cette notion a un sens car $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$ possède une orientation naturelle). En outre, g est invariant par l'action du groupe G_E (plus précisément, par le groupe, quotient du groupe affine G_E par le sous-groupe des translations, car c'est ce groupe, isomorphe à $SO(3)$, qui agit sur l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$).Nous dirons que g est la *structure euclidienne intrinsèque* de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

Soit $\overrightarrow{l}$ un élément strictement positif de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$. En prenant $\overrightarrow{l}$ comme vecteur unité de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ et $\overrightarrow{l} \otimes \overrightarrow{l}$ comme vecteur unité de $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$, nous pouvons identifier chacun de ces deux espaces à la droite réelle $\mathbb{R}$. La distance $|\overrightarrow{AB}|$ séparant un point A d'un autre point B de $\mathcal{E}$, et le produit euclidien $g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ de deux vecteurs éléments de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, peuvent alors être considérés comme des réels, et le produit euclidien peut être appelé *produit scalaire*, c'est-à-dire produit à valeurs dans le corps des scalaires $\mathbb{R}$. Soucieux du sens physique qu'il faut atribuer aux objets mathématiques que nous manipulons, nous préférons cependant construire une théorie dans laquelle les lois physiques peuvent être formulées indépendamment de tout choix d'unités.

Appendice 2. Symboles de Christoffel et forces fictives

Considérons un point matériel soumis à un champ de forces f, mobile dans l'espace-temps non relativiste $\mathcal{U}$. Sa ligne d'univers est l'image d'une section $c : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ de la projection canonique $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$ de l'espace-temps sur l'ensemble des temps $\mathcal{T}$, c'est-à-dire d'une application c qui vérifie $\tau \circ c = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$. L'application c est solution de l'équation du mouvement sous forme intrinsèque

$$m \otimes \nabla_{Dc(t)}\bigl(Dc(t)\bigr) = f\bigl(c(t)\bigr)\,,$$

où $t \in \mathcal{T}$ est la variable indépendante (le temps), $Dc(t)$ la différentielle au point t de l'application c (c'est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\overrightarrow{\mathcal{T}}, \overrightarrow{\mathcal{U}})$ des applications linéaires de $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{U}}$), que l'on identifie canoniquement au produit tensoriel $\overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{U}}$. Le terme $\nabla_{Dc(t)}\bigl(Dc(t)\bigr)$ est la dérivée covariante, pour la connexion affine de $\mathcal{U}$, de $Dc(t)$ relativement à lui-même. C'est un élément de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{U}}$. Quant à m, c'est la masse du point matériel, élément de l'espace vectoriel de dimension 1 $\overrightarrow{\mu}$ des masses (nous ne le notons pas $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ pour éviter toute confusion avec l'espace de Minkowski). La force f prend ses valeurs dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mu} \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{U}}$, et sa projection sur $\overrightarrow{\mu} \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}^* \otimes \overrightarrow{\mathcal{T}}$, par l'application déduite de la projection canonique $\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$, est nulle (la composante temporelle de la force est toujours nulle).

Après le choix d'une unité de masse et d'une unité de temps, cette équation devient une équation différentielle, au sens usuel, dans l'espace affine $\mathcal{U}$, qui s'écrit

$$m\nabla_{\frac{dc(t)}{dt}} \frac{dc(t)}{dt} = f\bigl(c(t)\bigr)\,,$$

dont les deux membres peuvent être considérés comme prenant leurs valeurs dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{U}}$.

Dans un système de coordonnées locales curvilignes quelconque (x^0, x^1, x^2, x^3) de $\mathcal{U}$, les composantes de la dérivée covariante $\nabla_{\frac{dc(t)}{dt}} \frac{dc(t)}{dt}$ ont pour expression (en écrivant $c^i(t)$ pour $x^i\bigl(c(t)\bigr)$, et en utilisant la convention d'Einstein de sommation par rapport aux indices répétés) :

$$\nabla_{\frac{dc(t)}{dt}} \frac{dc^i(t)}{dt} = \frac{d^2c^i(t)}{dt^2} + \Gamma^i_{j\,k} \frac{dc^j}{dt} \frac{dc^k}{dt}\,,$$

où les $\Gamma^i_{j\,k}$ sont les symboles de Christoffel de la connexion pour le système de coordonnées considéré. Les composantes de l'équation du mouvement s'écrivent donc :

$$m\left(\frac{d^2c^i(t)}{dt^2}+\Gamma^i_{j\,k}\frac{dc^j}{dt}\frac{dc^k}{dt}\right)=f^i\bigl(c(t)\bigr)\,,\quad i=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,.$$

Supposons le système de coordonnées (x^0,x^1,x^2,x^3) tel que $x^0=t$ soit le temps et que (x^1,x^2,x^3) soient les coordonnées d'espace dans un repère inertiel orthonormé. Les symboles de Christoffel associés à ce système sont tous identiquement nuls, et les équations ci-dessus deviennent :

$$m\,\frac{d^2c^i(t)}{dt^2}=f^i\bigl(c(t)\bigr)\,,\quad i=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,$$

(les f^i étant les composantes de la force f dans le repère considéré; on a $f^0=0$ puisque la force doit avoir une projection nulle sur l'ensemble des temps).

Soit maintenant (y^0,y^1,y^2,y^3) un système de coordonnées dans $\mathcal{U}$ déduit du précédent par les formules

$$\begin{aligned}
&y^0=x^0=t\,, && y^3=x^3\,,\\
&y^1=x^1\cos(\omega x^0)+x^2\sin(\omega x^0)\,, && y^2=-x^1\sin(\omega x^0)+x^2\cos(\omega x^0)\,,
\end{aligned}$$

(le second repère tourne, relativement au premier, autour de l'axe des x^3, à une vitesse angulaire constante ω). Soient $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\,\gamma}$ les symboles de Christoffel de la connexion pour ce nouveau système. Les formules générales de transformation des symboles de Christoffel dans un changement de système de coordonnées sont (toujours avec la convention d'Einstein de sommation par rapport aux indices répétés) :

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\,\gamma}=\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}+\Gamma^i_{j\,k}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\,.$$

On voit donc que les seuls symboles de Christoffel relativement au nouveau système de coordonnées éventuellement non nuls sont les $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\,\gamma}$ pour $\alpha=1$ ou 2, β et $\gamma=0$, 1 ou 2. On obtient aisément

$$\begin{aligned}
&\overline{\Gamma}^1_{0\,0}=-\omega^2y^1\,,\quad \overline{\Gamma}^1_{1\,0}=\overline{\Gamma}^1_{0\,1}=0\,,\ \overline{\Gamma}^1_{2\,0}=\overline{\Gamma}^1_{0\,2}=-\omega\,,\\
&\overline{\Gamma}^2_{0\,0}=-\omega^2y^2\,,\quad \overline{\Gamma}^2_{1\,0}=\overline{\Gamma}^2_{0\,1}=\omega\,,\ \overline{\Gamma}^2_{2\,0}=\overline{\Gamma}^2_{0\,2}=0\,.
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement du point matériel dans les coordonnées (y^0,y^1,y^2,y^3) s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
&m\frac{d^2y^0}{dt^2}=0\,,\\
&m\frac{d^2y^1}{dt^2}=m\omega^2y^1+2m\omega\frac{dy^2}{dt}+\overline{f}^1\bigl(c(t)\bigr)\,,\\
&m\frac{d^2y^2}{dt^2}=m\omega^2y^2-2m\omega\frac{dy^1}{dt}+\overline{f}^2\bigl(c(t)\bigr)\,,\\
&m\frac{d^2y^3}{dt^2}=\overline{f}^3\bigl(c(t)\bigr)\,,
\end{aligned}$$

où les $\overline{f}^i$ ($i = 1$, 2 ou 3) sont les composantes de la force f dans le nouveau repère.

Au second membre de la seconde et de la troisième équations de ce système, on voit apparaître les composantes de la force centrifuge $(m\omega^2 y^1, m\omega^2 y^2)$ et de la force de Coriolis $(2m\omega\frac{\partial y^2}{\partial t}, -2m\omega\frac{\partial y^1}{\partial t})$. Ces forces, considérées en Mécanique comme des "forces fictives", sont tout simplement les termes contenant les symboles de Christoffel dans l'expression de la dérivée covariante.

Plus généralement, E. Cartan a montré [3 a] qu'en modifiant la connexion de $\mathcal{U}$ on pouvait transformer un champ de forces que les mécaniciens considèrent en général comme "réel", comme par exemple le champ de pesanteur, afin de l'inclure dans la géométrie de l'espace-temps. Ce champ de forces n'apparaîtra alors, dans les équations du mouvement explicitées en coordonnées locales, que par les symboles de Christoffel.

Appendice 3. Structure intrinsèque de l'espace-temps de Minkowski

Nous avons vu que l'espace de Minkowski $\mathcal{M}$ est un espace affine réel de dimension 4, sur lequel agit le groupe de Poincaré G_P. Soit O un point quelconque de $\mathcal{M}$. En utilisant ce point comme origine nous identifions $\mathcal{M}$ avec son espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. Le sous-groupe de G_P formé par les éléments qui laissent le point O fixe s'identifie au groupe de Lorentz G_L. On sait qu'il existe sur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ des formes quadratiques qui sont invariantes par l'action du groupe de Lorentz. Ces formes, mises sous forme réduite, s'expriment comme des sommes algébriques de quatre carrés, dont un est affecté d'un signe et les trois autres du signe opposé; elles sont toutes proportionnelles à l'une quelconque d'entre elles, pourvu que cette dernière soit non nulle. En d'autres termes, elles constituent, avec la forme nulle, un espace vetoriel de dimension 1, que nous noterons $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$. Soit $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^*$ son dual. Nous définissons une application bilinéaire symétrique $g : \overrightarrow{\mathcal{M}} \times \overrightarrow{\mathcal{M}} \to \overrightarrow{\mathcal{Q}}^*$ en posant, pour toute forme quadratique $\eta \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}$ et tout couple $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ d'éléments de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$:

$$\langle g(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2), \eta \rangle = \eta(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)\,,$$

où le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ au membre de gauche est le couplage par dualité de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^*$ avec $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ et où, au membre de droite, η désigne la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique, élément de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$, elle aussi notée η. L'application g ainsi définie sera appelée *structure de Minkowski intrinsèque* sur l'espace $\mathcal{M}$.

Remarques.

1. La construction décrite ci-dessus pourrait être appliquée à l'espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension 3, utilisé comme modèle de l'espace physique. Cela donnerait une autre construction de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{L}}^2$ des produits euclidiens, équivalente à celle donnée dans l'Appendice 1. On peut en effet montrer que ces deux constructions conduisent à des espaces des produits euclidiens canoniquement isomorphes;

2. Le choix d'un élément non nul η de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}$ détermine, dans l'espace $\mathcal{M}$, à la fois une unité de longueur et une unité de temps. Supposons par exemple que la forme quadratique η, mise sous forme canonique, comporte un carré affecté du signe $+$ et trois carrés affectés du signe $-$ (nous dirons qu'elle est de signature $(+,-,-,-)$). Un vecteur $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ sera dit *de genre temps* si $\eta(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}) > 0$, *de genre espace* si $\eta(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}) < 0$ et *isotrope* si $\eta(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}) = 0$.

Si $\overrightarrow{V}$ est de genre temps, l'intervalle de temps qu'il représente est mesuré, avec l'unité de temps associée à η, par le réel positif $\sqrt{g(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V})}$. S'il est de genre espace, la longueur qu'il représente est mesurée, avec l'unité de longueur associée à η, par le réel positif $\sqrt{-g(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V})}$.

3. Le groupe de Poincaré (même si on le restreint à sa composante neutre) agit transitivement sur chacun des trois ensembles de droites vectorielles orientées plongées dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}$:

- l'ensemble des droites orientées de genre espace,
- l'ensemble des droites de genre temps orientées vers le futur,
- l'ensemble des droites isotropes orientées vers le futur.

Un élément du groupe de Poincaré qui laisse globalement invariante une droite vectorielle orientée plongée dans $\mathcal{M}$, restreint à cette droite, est l'application identique si cette droite est de genre espace, ou de genre temps, mais pas si cette droite est isotrope. La méthode utilisée dans l'Appendice 1 permet donc de comparer entre eux des segments de deux droites différentes, pourvu que ces droites soient toutes deux de genre espace, ou toutes deux de genre temps, et de définir, pour les droites de genre espace d'une part, et pour les droites de genre temps d'autre part, un espace vectoriel orienté de dimension 1 dans lequel la mesure de ces intervalles prend ses valeurs.

Par contre, on ne peut en général pas comparer des intervalles de deux droites isotropes différentes.

Dans la plupart des ouvrages d'enseignement traitant de la théorie de la Relativité, il est question de "contraction des longueurs" et de "dilatation des temps". Or ce qui précède montre bien qu'on peut comparer entre eux des segments de droite appartenant à deux droites différentes de genre espace, ou à deux droites différentes de genre temps. Lorsqu'on raisonne dans l'espace-temps, sur les événements, il n'y a pas de contraction des longueurs, ni de dilatation des temps. Ces concepts, imaginés par FitzGerald et Lorentz pour expliquer le résultat négatif des expériences de Michelson et Morley avant qu'Einstein ne crée la théorie de la Relativité, sont à l'origine de bien des confusions et devraient être, sinon bannis des ouvrages d'enseignement, du moins présentés différemment, en suivant le développement historique de la théorie.

4. Les opérations mathématiques décrites dans l'Appendice 1 correspondent exactement aux opérations physiques que l'on fait pour mesurer une distance, en plaçant une règle graduée le long de l'objet à mesurer. Les opérations mathématiques décrites dans le présent appendice correspondent aux opérations physiques que l'on fait pour mesurer une distance en mesurant le temps mis par la lumière pour la parcourir. Historiquement, ces deux manières de procéder ont été utilisées successivement pour définir le mètre : d'abord défini comme la quarante millionième partie du méridien terrestre, puis (de 1889 à 1960) comme la distance entre les deux traits gravés sur le mètre étalon déposé au pavillon de Breteuil, puis par référence à la longueur d'onde d'une raie spectrale du krypton 86, le mètre est, depuis 1983, la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de 1/299792458 secondes.