Introduction aux groupes de Lie-Poisson

Charles-Michel Marle*

En hommage au Professeur Ribeiro Gomes, qui m'a fait
connaître la très prestigieuse Université de Coimbra,
où il m'a reçu avec tant d'amitié.

1. Introduction

Les groupes de Lie-Poisson ont été considérés pour la première fois par Drinfel'd [7] [8]. Nous nous proposons de présenter dans ce texte quelques unes de leurs très remarquables propriétés. Les résultats que nous présentons sont déjà connus et figurent dans la bibliographie citée, en particulier dans les très intéressants travaux de Lu [20], [21], Lu et Weinstein [22]; seules quelques démonstrations, utilisant le crochet de Schouten, sont peut-être nouvelles.

Le lecteur intéressé par des applications et exemples pourra consulter [5]; pour les développements du sujet que nous n'avons pas traités, il pourra se reporter :

— pour les actions de groupes de Lie-Poisson et les transformations d'habillage, à [20], [21], [22], [33], [37];

— pour les prolongements de la théorie aux groupoïdes symplectiques ou de Poisson, à [6], [19], [23], [24];

— pour la cohomologie de Lichnerowicz-Poisson, à [11], [12], [13], [34], [38];

— pour les applications aux systèmes complètement intégrablmes, è [14], [15].

2. Quelques rappels

2.1. Notations et conventions.

Les variétés et applications considérées sont supposées différentiables de classe C^∞. Pour toute variété M, on note $A(M) = \oplus_p A^p(M)$ et $\Omega(M) = \oplus_p \Omega^p(M)$ les algèbres graduées des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur M, et des formes différentielles sur M, respectivement. Par convention, $A^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbf{R})$,

* Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France. Email: marle@math.jussieu.fr

algèbre des fonctions différentiables sur M, et pour $p < 0$, $A^p(M) = \Omega^p(M) = \{0\}$. Nous utiliserons principalement $A^1(M)$, espace des champs de vecteurs sur M, et $A^2(M)$, espace des champs de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques sur M.

Pour tout difféomorphisme $\varphi : M \to M$, on notera $T\varphi : TM \to TM$ le prolongement de φ aux vecteurs, et aussi son prolongement naturel aux fibrés des tenseurs contravariants de tous les degrés. Si $P \in A(M)$ est un champ de tenseurs sur M, on notera $\varphi^* P$ l'image réciproque et $\varphi_* P$ l'image directe du champ de tenseurs P par le difféomorphisme φ. On rappelle que par définition,

$$\varphi^* P(x) = (T\varphi)^{-1}\Big(P\big(\varphi(x)\big)\Big), \qquad \varphi_* P(x) = (T\varphi)\Big(P\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big).$$

Rappelons que si X est un champ de vecteurs sur M, son flot $\{\Phi_t\,;\, t \in \mathbf{R}\}$ est une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux de M tel que, pour tout champ de tenseurs contravariants Q sur M, on ait $\dfrac{d}{dt}(\Phi_t^* Q) = \Phi_t^*\big(\mathcal{L}(X)Q\big)$, où $\mathcal{L}(X)Q$ est la dérivée de Lie de Q selon X.

Sur un groupe de Lie G, pour tout $g \in G$, on notera L_g et R_g les difféomorphismes de G, translations, respectivement à gauche et à droite, par g; ainsi, pour tout $h \in G$, $L_g h = gh$, $R_g h = hg$. On notera $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, que l'on identifiera à l'espace T_eG, tangent à G en l'élément neutre e. On identifiera l'espace cotangent T_e^*G au dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$.

2.2. Le crochet de Schouten-Nijenhuis. Soit M une variété différentiable. On rappelle que l'algèbre graduée $A(M)$ des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur M est munie d'une loi de composition interne, le *crochet de Schouten-Nijenhuis* [30], [31], [27], [26], [28], [16], notée $(P,Q) \mapsto [P,Q]$, dont la restriction à $A^1(M)$ est le crochet usuel des champs de vecteurs. Le crochet de Schouten-Nijenhuis est caractérisé par les propriétés suivantes :

Propriété 1. Pour f et $g \in A^0(M) = C^\infty(M, \mathbf{R})$, $[f,g] = 0$.

Propriété 2. Pour un champ de vecteurs $X \in A^1(M)$ et un champ de tenseurs $Q \in A(M)$, $[X,Q]$ est la dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)Q$ de Q relativement à X.

Propriété 3. Pour $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$,

$$[P,Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P].$$

Propriété 4. Pour $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A(M)$,

$$[P, Q \wedge R] = [P,Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P,R].$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie aussi les propriétés suivantes, conséquences des propriétés 1 à 4 :

Propriété 5. Pour $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$, on a $[P,Q] \in A^{p+q-1}(M)$.

Propriété 6. Pour $P \in A(M)$, $Q \in A^q(M)$ and $R \in A^r(M)$,

$$[P \wedge R, Q] = P \wedge [R, Q] + (-1)^{(q-1)r}[P, Q] \wedge R\,.$$

Propriété 7. Soient $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$. Le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie l'identité suivante, appelée *identité de Jacobi graduée*,

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}\big[P, [Q, R]\big] + (-1)^{(q-1)(p-1)}\big[Q, [R, P]\big] + (-1)^{(r-1)(q-1)}\big[R, [P, Q]\big] = 0\,.$$

Comme le crochet de champs de vecteurs, dont il est le prolongement, le crochet de Schouten-Nijenhuis se transporte par difféomorphisme. En particulier, si G est un groupe de Lie, P et $Q \in A(G)$ des champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur G, et si P et Q sont invariants à gauche (resp., à droite), leur crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ est invariant à gauche (resp., à droite). Si P est invariant à gauche et Q invariant à droite, $[P, Q]$ est identiquement nul.

Le lecteur intéressé par les généralisations du crochet de Schouten-Nijenhuis pourra consulter [4].

2.3. Rappels concernant les variétés de Poisson.

1. *Algèbres de Lie locales et tenseurs de Poisson.* Soit M une variété différentiable et $A^0(M) = C^\infty(M, \mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions différentiables définies sur M, à valeurs réelles. Une *structure de Poisson* sur M est une loi de composition interne bilinéaire sur $A^0(M)$, notée $(f, g) \mapsto \{f, g\}$, vérifiant les propriétés suivantes:

— cette loi de composition est antisymétrique, $\{g, f\} = -\{f, g\}$,
— elle vérifie l'identité de Jacobi, $\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0$,
— elle vérifie la formule de Leibniz, $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\}g_2 + g_1\{f, g_2\}$.

Les structures de Poisson sont un cas particulier des structures d'algèbres de Lie locales, qui ont été étudiées par Kirillov. Le lecteur intéressé par la géométrie des variétés de Poisson pourra consulter [2], [3], [35], [36].

On montre que sur une variété M munie d'une structure de Poisson, il existe un unique champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques $P \in A^2(M)$ tel que, pour tous f et $g \in A^0(M)$, $\{f, g\} = P(df, dg)$. On dit que P est le *tenseur de Poisson* qui définit la structure de Poisson de M. La variété M, munie de sa structure de Poisson, de tenseur de Poisson P, est alors appelée *variété de Poisson* et notée (M, P).

Réciproquement, soit P un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques sur une variété différentiable M. Pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M, posons $\{f, g\} = P(df, dg)$. Nous définissons ainsi une loi de composition interne sur $A^0(M)$, bilinéaire, antisymétrique et vérifiant la formule de Leibniz. Mais cette loi de composition ne vérifie en général pas l'identité de Jacobi. A. Lichnerowicz [17] [18] a montré que cette loi de composition vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si le tenseur P vérifie l'identité $[P, P] = 0$, le crochet figurant dans cette expression étant le crochet de Schouten-Nijenhuis. On peut donc dire qu'une variété de Poisson (M, P) est une variété différentiable M, munie d'un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques $P \in A^2(M)$ qui vérifie $[P, P] = 0$.

2. *Produit de variétés de Poisson.* Soient (M_1, P_1) et (M_2, P_2) deux variétés de Poisson. Nous considérons les fonctions différentiables définies sur la variété produit $M_1 \times M_2$ comme des fonctions de deux variables, la première variable parcourant M_1 et la seconde M_2. Posons, pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur $M_1 \times M_2$,

$$\{f, g\} = \{d_1 f, d_1 g\}_{M_1} + \{d_2 f, d_2 g\}_{M_2} = P_1(d_1 f, d_1 g) + P_2(d_2 f, d_2 g)\,,$$

où nous avons noté $d_1 f$ et $d_1 g$ les différentielles partielles de f et de g par rapport à leur première variable, $d_2 f$ et $d_2 g$ leurs différentielles partielles par rapport à leur seconde variable. On vérifie aisément que la loi de composition aisi définie fait de $M_1 \times M_2$ une variété de Poisson, appelée *produit* des variétés de Poisson M_1 et M_2.

3. *Applications de Poisson.* Soient (M, P) et (N, Q) deux variétés de Poisson, et $\varphi : M \to N$ une application différentiable de classe C^∞. On dit que φ est une *application de Poisson* si pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur N,

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_{M_1} = \{f, g\}_{M_2} \circ \varphi\,.$$

4. *L'algèbre de Lie graduée des formes différentielles sur une variété de Poisson.* Soit (M, P) une variété de Poisson. On note $i(P) : \Omega(M) \to \Omega(M)$ le produit intérieur par P, et on pose $\Delta = \big[i(P), d\big] = i(P) \circ d - d \circ i(P)$. Soient $\eta \in \Omega^p(M)$ et $\zeta \in \Omega^q(M)$ deux formes différentielles sur M, de degrés respectifs p et q. Posons

$$[\eta, \zeta] = (-1)^p \big(\Delta(\eta \wedge \zeta) - (\Delta\eta) \wedge \zeta - (-1)^p \eta \wedge (\Delta\zeta)\big)\,.$$

Remarquons que $[\eta, \zeta]$ est une forme différentielle de degré $p + q - 1$. En particulier, si $p = q = 1$, $[\eta, \zeta]$ est de degré 1.

Nous avons ainsi défini une loi de composition interne bilinéaire sur $\Omega(M)$. J.-L. Koszul [16] a montré qu'elle fait de cet espace une algèbre de Lie graduée [29], et du sous-espace $\Omega^1(M)$ des formes différentielles de degré 1, une algèbre de Lie. Cette structure d'algèbre de Lie de $\Omega^1(M)$ avait été déjà découverte par Magri et Morosi [25].

2.4. La dérivée intrinsèque. Soit M une variété différentiable, p un entier ≥ 0 et $P \in A^p(M)$ un champ de tenseurs contravariants antisymétriques de degré p sur M. On suppose qu'il existe un point $a \in M$ tel que $P(a) = 0$. Soit $v \in T_a M$, et X un champ de vecteurs sur M tel que $X(a) = v$. La valeur au point a de la dérivée de Lie de P selon X, $\mathcal{L}(X)P(a)$, ne dépend que de P et de v. On la note $d_a P(v)$. L'application linéaire $d_a P : T_a M \to \bigwedge^p(T_a M)$ ainsi définie est appelée *dérivée intrinsèque* de P au point a. Pour l'évaluer, on peut procéder comme suit. Soient α_i, $1 \leq i \leq p$, des éléments de $T_a^* M$, et $\widetilde{\alpha}_i$ des 1-formes différentielles sur M vérifiant $\widetilde{\alpha}_i(a) = \alpha_i$. On a alors

$$d_a P(v)(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \big\langle d\big(P(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_p)\big)(a), v \big\rangle\,.$$

3. Champs multiplicatifs et groupes de Lie-Poisson

3.1. Définition. Soit G un groupe de Lie. Un champ de tenseurs $P \in A(M)$ est dit *multiplicatif* s'il vérifie, pour tous g et $h \in G$,

$$P(gh) = TL_g\bigl(P(h)\bigr) + TR_h\bigl(P(g)\bigr) .$$

La proposition suivante indique plusieurs caractérisations équivalentes des champs multiplicatifs.

3.2. Proposition. *Soit G un groupe de Lie, p un entier ≥ 0 et $P \in A^p(G)$ un champ de tenseurs contravariants antisymétriques de degré p sur G. On lui associe les applications $P_l : G \to \bigwedge^p(\mathcal{G})$ et $P_g : G \to \bigwedge^p(\mathcal{G})$ aisi définies; pour tout $g \in G$,*

$$P_l(g) = (TL_g)^{-1}\bigl(P(g)\bigr) , \qquad P_r(g) = (TR_g)^{-1}\bigl(P(g)\bigr) .$$

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes:

(i) *le champ de tenseurs P est multiplicatif, c'est-à-dire vérifie, pour tous g et $h \in G$,*

$$P(gh) = TL_g\bigl(P(h)\bigr) + TR_h\bigl(P(g)\bigr) ;$$

(ii) *l'application P_l vérifie, pour tous g et $h \in G$,*

$$P_l(gh) = P_l(h) + \mathrm{Ad}_{h^{-1}} P_l(g) ;$$

(iii) *l'application P_r vérifie, pour tous g et $h \in G$,*

$$P_r(gh) = \mathrm{Ad}_g P_r(h) + P_r(g) .$$

De plus, ces propriétés équivalentes impliquent

(iv) *le champ de tenseurs P vérifie $P(e) = 0$ et il est tel que, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche sur G, le champ de tenseurs $\mathcal{L}(X)P$ soit invariant à gauche sur G;*

(v) *le champ de tenseurs P vérifie $P(e) = 0$ et il est tel que, pour tout champ de vecteurs Y invariant à droite sur G, le champ de tenseurs $\mathcal{L}(Y)P$ soit invariant à droite sur G.*

Enfin, lorsque de plus le groupe de Lie G est connexe, chacune des propriétés (iv) *ou* (v) *implique les propriétés* (i), (ii) *et* (iii).

Démonstration. Nous avons, pour tous g et $h \in G$,

$$\begin{aligned} P_l(gh) - P_l(h) - &\mathrm{Ad}_{h^{-1}} P_l(g) \\ &= TL_{(gh)^{-1}}P(gh) - TL_{h^{-1}}P(h) - TL_{h^{-1}} \circ TR_h \circ TL_{g^{-1}}P(g) \\ &= TL_{(gh)^{-1}}\bigl(P(gh) - TL_gP(h) - TR_hP(g)\bigr) . \end{aligned}$$

Cela prouve que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. Un calcul tout à fait analogue prouve que les propriétés (i) et (iii) sont équivalentes.

Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G. Son flot n'est autre que $\{R_{\exp(tX)}\,;\, t \in \mathbf{R}\}$, groupe à un paramètre des translations à droite $R_{\exp(tX)}$. Posons, pour tous $t \in \mathbf{R}$, g et $h \in G$,

$$Q(t,g,h) = \bigl(R^*_{\exp(tX)}P\bigr)(gh) - TL_g\bigl((R^*_{\exp(tX)}P)(h)\bigr)\,.$$

Dérivons par rapport à t, en considérant g et h comme fixés. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}Q(t,g,h) &= \bigl(R^*_{\exp(tX)}\mathcal{L}(X)P\bigr)(gh) - TL_g\Bigl(\bigl(R^*_{\exp(tX)}\mathcal{L}(X)P\bigr)(h)\Bigr)\\ &= TR_{\exp(-tX)}\Bigl(\mathcal{L}(X)P\bigl(gh\exp(tX)\bigr) - TL_g\mathcal{L}(X)P\bigl(h\exp(tX)\bigr)\Bigr)\,.\end{aligned}$$

Supposons la propriété (i) vérifiiée. En faisant $g = h = e$ dans (i), nous obtenons $P(e) = 2P(e)$, donc $P(e) = 0$. En tenant compte de (i) dans l'expression de $Q(t,g,h)$, nous obtenons $Q(t,g,h) = TR_hP(g)$, expression qui ne dépend pas de t. Nous pouvons donc écrire que $\dfrac{\partial}{\partial t}Q(t,g,h) = 0$. Nous obtenons ainsi

$$\mathcal{L}(X)P\bigl(gh\exp(tX)\bigr) - TL_g\mathcal{L}(X)P\bigl(h\exp(tX)\bigr) = 0\,,$$

d'où en faisant $t = 0$,

$$\mathcal{L}(X)P(gh) - TL_g\mathcal{L}(X)P(h) = 0\,,$$

ce qui exprime que $\mathcal{L}(X)P$ est invariant à gauche. Nous avons prouvé que la propriété (iv) est satisfaite.

Réciproquement, supposons la propriété (iv) satisfaite, et le groupe G connexe. Nous avons, pour tous $t \in \mathbf{R}$, g et $h \in G$, $\dfrac{\partial}{\partial t}Q(t,g,h) = 0$. Nous en déduisons $Q(t,g,h) = Q(0,g,h)$, d'où en particulier, en faisant $h = e$,

$$TR_{\exp(-tX)}\Bigl(P\bigl(g\exp(tX)\bigr) - TL_gP\bigl(\exp(tX)\bigr)\Bigr) = P(g) - TL_gP(e) = P(g)\,,$$

puisque $P(e) = 0$. Ou encore,

$$P\bigl(g\exp(tX)\bigr) = TL_gP\bigl(\exp(tX)\bigr) + TR_{\exp(tX)}P(g)\,.$$

Autrement dit, la propriété (i) est satisfaite lorsque $h = \exp(tX)$. Il est facile d'en déduire par récurrence que cette propriété est satisfaite aussi lorsque h est le produit d'un nombre fini d'éléments de G de la forme $\exp(t_iX_i)$, où les t_i sont des réels et les X_i des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. Mais le groupe G étant connexe, tout élément h de G peut s'exprimer ainsi. La propriété (i) est donc satisfaite.

On montre de même que (i) implique (v) et que réciproquement, lorsque G est connexe, (v) implique (i). $\square$

3.3. Corollaire. *Soit G un groupe de Lie, P et $Q \in A(G)$ deux champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur G. Si Q est multiplicatif et P invariant à gauche* *(resp., à droite), le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,Q]$ est invariant à gauche (resp., à droite).*

Démonstration. Lorsque P est un champ de vecteurs, $[P,Q]=\mathcal{L}(P)Q$, et il suffit d'utiliser les propriétés (iv) et (v) de la proposition précédente. Dans le cas général, on remarque qu'un champ de tenseurs invariant à gauche (resp., à droite) est somme d'un nombre fini de produits extérieurs de champs de vecteurs invariants à gauche (resp., à droite); il suffit alors d'utiliser la distributivité graduée du crochet de Schouten-Nijenhuis relativement aux produits extérieurs. $\square$

3.4. Proposition. *Soit G un groupe de Lie connexe.*

1. *Si deux champs de tenseurs P et Q sur E sont multiplicatifs, leur crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,Q]$ est multiplicatif.*

2. *Un champ de tenseurs multiplicatif P sur G dont la dérivée intrinsèque d_eP à l'élément neutre est nulle, est identiquement nul.*

Démonstration. Soient P et Q deux champs de tenseurs multiplicatifs sur G, de degrés respectifs p et q.

1. Les champs P et Q étant tous deux nuls au point e, leur crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,Q]$ l'est aussi. Pour montrer que $[P,Q]$ est multiplicatif il suffit, d'après la proposition 3.2, de montrer que pour tout champ de vecteurs invariant à gauche X, $\mathcal{L}(X)\bigl([P,Q]\bigr)$ est invariant à gauche. D'après l'identité de Jacobi graduée vérifiée par le crochet de Schouten-Nijenhuis,

$$\mathcal{L}(X)\bigl([P,Q]\bigr)=\bigl[X,[P,Q]\bigr]=-\bigl[P,[Q,X]\bigr]-(-1)^{(p-1)(q-1)}\bigl[Q,[X,P]\bigr]\,.$$

La proposition 3.2 montre que $[Q,X]$ et $[X,P]$ sont invariants à gauche, et le corollaire 3.3 que $\bigl[P,[Q,X]\bigr]$ et $\bigl[Q,[X,P]\bigr]$ le sont aussi.

2. Supposons que la dérivée intrinsèque d_eP soit nulle. Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G. On a $\mathcal{L}(X)P(e)=d_eP\bigl(X(e)\bigr)=0$. Comme P est multiplicatif, $\mathcal{L}(X)P$ est invariant à gauche; étant nul à l'élément neutre, il est identiquement nul. Mais G étant connexe et la dérivée de Lie de P selon tout champ de vecteurs invariant à gauche étant nulle, P est invariant à droite. Comme $P(e)=0$, P est identiquement nul. $\square$

3.5. Définition. Un *groupe de Lie-Poisson* (G,P) est un groupe de Lie G, muni d'une structure de Poisson de tenseur de Poisson P, tel que la multiplication $m:G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto m(g,h)=gh$, soit une application de Poisson, le produit $G\times G$ étant muni de la structure de Poisson produit.

3.6. Proposition. *Un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si son tenseur de Poisson est multiplicatif.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson, et P son tenseur de Poisson. La multiplication $m:G\times G\to G$ est une application de Poison si et seulement si, pour tous g et $h\in G$ et tous α et $\beta\in T^*_{gh}G$,

$$P_{G\times G}(g,h)\bigl({}^tT_{(g,h)}m\alpha,\ {}^tT_{(g,h)}m\beta\bigr)=P(gh)(\alpha,\beta)\,,$$

où $P_{G\times G}$ désigne le tenseur de Poisson de $G\times G$, pour la structure de Poisson produit. Pour tout $(u,v)\in T_{(g,h)}(G\times G)=T_gG\times T_hG$, on a

$$T_{(g,h)}m(u,v)=TR_hu+TL_gv\,.$$

On en déduit, par transposition,

$${}^tT_{(g,h)}m\alpha=(\,{}^tTR_h\alpha,\,{}^tTL_g\alpha)\,,\qquad {}^tT_{(g,h)}m\beta=(\,{}^tTR_h\beta,\,{}^tTL_g\beta)\,.$$

Compte tenu de l'expression de $P_{G\times G}$, on obtient

$$\begin{aligned}P_{G\times G}(g,h)(\,{}^tT_{(g,h)}m\alpha,\,{}^tT_{(g,h)}m\beta)&=P(g)(\,{}^tTR_h\alpha,\,{}^tTR_h\beta)+P(h)(\,{}^tTL_g\alpha,\,{}^tTL_g\beta)\\&=\Big(TR_h\big(P(g)\big)+TL_g\big(P(h)\big)\Big)(\alpha,\beta)\,.\end{aligned}$$

On conclut que le produit m est une application de Poisson si et seulement si, pour tous g et $h\in G$, $P(gh)=TR_h\big(P(g)\big)+TL_g\big(P(h)\big)$, c'est-à-dire si et seulement si le tenseur de Poisson P est multiplicatif. □

4. Groupes de Lie-Poisson et cocycles d'algèbres de Lie

Nous allons voir dans ce paragraphe que la dérivée intrinsèque en l'élément neutre d'un champ de 2-tenseurs multiplicatif sur un groupe de Lie est un cocycle d'algèbre de Lie. Puis nous établirons des conditions nécessaires et suffisantes pour que ce champ soit de Poisson.

4.1. Proposition. *Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie.*

1. *Soit $P\in A^2(G)$ un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques sur G. On suppose P multiplicatif. La dérivée intrinsèque $\pi=d_eP$ de P en l'élément neutre est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, à valeurs dans $\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$, pour la représentation adjointe. Cela signifie que pour tous X et $Y\in\mathcal{G}$,*

$$\pi\big([X,Y]\big)=\mathrm{ad}_X\big(\pi(Y)\big)-\mathrm{ad}_Y\big(\pi(X)\big)\,.$$

2. *Réciproquement, soit $\pi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$ un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, à valeurs dans $\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$, pour la représentation adjointe. On suppose le groupe de Lie G connexe et simplement connexe. Alors il existe un unique champ de tenseurs multiplicatif $P\in A^2(G)$ tel que $d_eP=\pi$.*

Démonstration.

1. Posons, pour tout $g\in G$, $P_r(g)=TR_{g^{-1}}\big(P(g)\big)$. D'après la proposition 3.2, P_r vérifie, pour tous g et $h\in G$,

$$P_r(gh)=\mathrm{Ad}_g\,P_r(h)+P_r(g)\,,$$

ce qui exprime que P_r est un 1-cocycle du groupe de Lie G, à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, pour la représentation adjointe. Soient $X \in T_eG = \mathcal{G}$, α et $\beta \in T_e^*G = \mathcal{G}^*$. On prolonge X en un champ de vecteurs $\widetilde{X}$, invariant à gauche, α et β en des formes de Pfaff $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$, invariantes à droite, sur le groupe G. On a

$$d_eP(X)(\alpha,\beta) = \bigl\langle d\bigl(P(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\bigr)(e), X\bigr\rangle\,.$$

Mais puisque $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont invariantes à droite,

$$P(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})(g) = TR_{g^{-1}}\bigl(P(g)\bigr)\bigl(\widetilde{\alpha}(e),\widetilde{\beta}(e)\bigr) = P_r(g)(\alpha,\beta)\,,$$

et par suite,

$$d_eP(X)(\alpha,\beta) = \frac{d}{dt}\,P_r\bigl(\exp(tX)\bigr)\Big|_{t=0}(\alpha,\beta) = T_eP_r(X)(\alpha,\beta)\,.$$

Nous voyons ainsi que $\pi = d_eP = T_eP_r$ est déduit du 1-cocycle P_r du groupe de Lie G par différentiation à l'élément neutre. Les relations bien connues entre les cocycles d'un groupe de Lie et les cocycles de son algèbre de Lie montrent que $\pi = d_eP$ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

2. Puisque G est connexe et simplement connexe, il existe un 1-cocycle unique P_r de G, à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, pour la représentation adjointe, tel que $T_eP_r = \pi$. Posons, pour tout $g \in G$, $P(g) = TR_g\bigl(P_r(g)\bigr)$. On voit aisément que P est un champ de tenseurs multiplicatif sur G, et que $d_eP = \pi$. $\square$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un 2-tenseur multiplicatif sur un groupe de Lie soit un tenseur de Poisson. Il montre aussi que si (G,P) est un groupe de Lie-Poisson, la donnée de la structure de Poisson P détermine, de manière naturelle, une structure d'algèbre de Lie sur le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G.

4.2. Théorème. *Soit G un groupe de Lie et $P \in A^2(G)$ un champ de 2-tenseurs multiplicatif sur G. On pose, pour tous $X \in T_eG = \mathcal{G}$, α et $\beta \in T_e^*G = \mathcal{G}^*$,*

$$\bigl\langle [\alpha,\beta]_P, X\bigr\rangle = d_eP(X)(\alpha,\beta)\,.$$

La loi de composition interne $(\alpha,\beta) \mapsto [\alpha,\beta]_P$ ainsi définie sur $\mathcal{G}^*$ est bilinéaire et antisymétrique. Si, de plus, (G,P) est un groupe de Lie-Poisson, c'est-à-dire si P est un tenseur de Poisson, cette loi de composition satisfait l'identité de Jacobi, et fait de $\mathcal{G}^*$ une algèbre de Lie.

Réciproquement, si G est connexe et si la loi de composition $(\alpha,\beta) \mapsto [\alpha,\beta]_P$ satisfait l'identité de Jacobi, P est un tenseur de Poisson, et (G,P) un groupe de Lie-Poisson.

Démonstration. Supposons P de Poisson, et notons $(f,g) \mapsto \{f,g\}$ le crochet de Poisson correspondant. Soient $\mathcal{M}_e$ le sous-espace vectoriel de $A^0(G) = C^\infty(G,\mathbf{R})$ formé par les fonctions qui s'annulent en l'élément neutre e, et $\mathcal{M}_e^2$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions qui sont le produit de deux éléments de $\mathcal{M}_e$. Si deux fonctions f et g s'annulent en e, leur crochet de Poisson $\{f,g\}$ s'annule aussi en e; donc $\mathcal{M}_e$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(G,\mathbf{R})$ pour le crochet de Poisson. La formule de Leibniz $\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$ montre que $\mathcal{M}_e^2$ est un idéal de l'algèbre de Lie $C^\infty(G,\mathbf{R})$. Comme de plus $\mathcal{M}_e^2\subset\mathcal{M}_e$, l'espace quotient $\mathcal{M}_e/\mathcal{M}_e^2$ est une algèbre de Lie. Or ce quotient s'identifie, de manière naturelle, à $\mathcal{G}^*=T_e^*G$, si l'on convient d'associer, à un élément α de $\mathcal{G}^*$, la classe modulo $\mathcal{M}_e^2$ des fonctions f qui vérifient $f(e)=0$ et $df(e)=\alpha$. Vérifions que le crochet $(\alpha,\beta)\mapsto[\alpha,\beta]$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{M}_e/\mathcal{M}_e^2$, ainsi identifiée à $\mathcal{G}^*$, coïncide avec le crochet $(\alpha,\beta)\mapsto[\alpha,\beta]_P$ de l'énoncé. Soient donc α et β deux éléments de T_e^*G, f et g deux fonctions vérifiant $f(e)=g(e)=0$, $df(e)=\alpha$, $dg(e)=\beta$. Nous avons, pour tout $X\in T_eG=\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\big\langle[\alpha,\beta],X\big\rangle&=\big\langle d\{f,g\}(e),X\big\rangle=\frac{d}{dt}\Big(\{f,g\}\big(\exp(tX)\big)\Big)\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\Big(P(df,dg)\big(\exp(tX)\big)\Big)\Big|_{t=0}=d_eP(X)(\alpha,\beta)\\&=\big\langle[\alpha,\beta]_P,X\big\rangle\,.\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que la loi de composition $(\alpha,\beta)\mapsto[\alpha,\beta]_P$ vérifie l'identité de Jacobi, et que le groupe de Lie G soit connexe. Pour tout triplet (f,g,h) de fonctions différentiables sur G nous avons, d'après les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis,

$$[P,P](df,dg,dh)=-2S(f,g,h)\,,$$

avec

$$\begin{aligned}S(f,g,h)&=\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}\\&=P\Big(df,d\big(P(dg,dh)\big)\Big)+P\Big(dg,d\big(P(dh,df)\big)\Big)+P\Big(dh,d\big(P(df,dg)\big)\Big)\,.\end{aligned}$$

Posons $\alpha=df(e)$, $\beta=dg(e)$, $\gamma=dh(e)$, et notons X un élément de $\mathcal{G}$. Puisque P est multiplicatif, $[P,P]$ l'est aussi (proposition 3.4), donc s'annule à l'élément neutre. Pour calculer $d_e[P,P](X)(\alpha,\beta,\gamma)$, il suffit de prendre la valeur de $[P,P](df,dg,dh)$ au point $\exp(tX)$, de dériver par rapport à t et de faire $t=0$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}d_e[P,P](X)(\alpha,\beta,\gamma)&=-2\frac{d}{dt}\Big(S(f,g,h)\big(\exp(tX)\big)\Big)\Big|_{t=0}\\&=-2\Big\langle\big[\alpha,[\beta,\gamma]_P\big]_P+\big[\beta,[\gamma,\alpha]_P\big]_P+\big[\gamma,[\alpha,\beta]_P\big]_P,X\Big\rangle\\&=0\,,\end{aligned}$$

puisque par hypothèse la loi de composition $(\alpha,\beta)\mapsto[\alpha,\beta]_P$ satisfait l'identité de Jacobi. Nous avons prouvé que la dérivée intrinsèque $d_e[P,P]$ de $[P,P]$ à l'élément neurtre est nulle. Comme $[P,P]$ est multiplicatif, la proposition 3.4 montre qu'il est identiquement nul, donc que P est un tenseur de Poisson. □

4.3. Remarques. Soit (G,P) un groupe de Lie-Poisson. D'après le théorème précédent, le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est muni d'une structure d'algèbre de Lie de crochet noté $(\alpha,\beta)\mapsto[\alpha,\beta]_P$, déterminée par P. Cette structure n'est autre que celle associée à la linéarisation, en l'élément neutre, de la structure de Poisson P (voir par exemple [36] ou [9]). D'autre part, on sait (voir [1], [16] et, pour une généralisation, [10]) que l'espace vectoriel gradué des formes différentielles sur une variété de Poisson possède une structure d'algèbre de Lie graduée, le sous-espace des 1-formes étant stable par crochet, donc formant une algèbre de Lie. La structure de Poisson P détermine donc sur l'espace $\Omega(G)$ des formes différentielles sur G une structure d'algèbre de Lie graduée, et sur l'espace $\Omega^1(G)$ des formes différentielles de degré 1 sur G, une structure d'algèbre de Lie. Nous noterons $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \mapsto [\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}]$ le crochet correspondant. L'espace $\mathcal{G}^*$ peut, de deux manières différentes, toutes deux naturelles, être identifié à un sous-espace vectoriel de $\Omega^1(M)$; on peut en effet faire correspondre à un élément α (resp., β) de $\mathcal{G}^* = T^*_eG$, soit la 1-forme $\widetilde{\alpha}_R$ (resp., $\widetilde{\beta}_R$) invariante à droite sur G vérifiant $\widetilde{\alpha}_R(e) = \alpha$ (resp., $\widetilde{\beta}_R(e) = \beta$), soit la 1-forme $\widetilde{\alpha}_L$ (resp., $\widetilde{\beta}_L$) invariante à gauche sur G vérifiant $\widetilde{\alpha}_L(e) = \alpha$ (resp., $\widetilde{\beta}_L(e) = \beta$). On peut, assez aisément, établir les résultats suivants:

— la 1-forme $[\widetilde{\alpha}_R,\widetilde{\beta}_R]$ est invariante à droite, et la 1-forme $[\widetilde{\alpha}_L,\widetilde{\beta}_L]$ invariante à gauche;

— on a

$$[\alpha,\beta]_P = [\widetilde{\alpha}_R,\widetilde{\beta}_R](e) = -[\widetilde{\alpha}_L,\widetilde{\beta}_L](e)\,.$$

La proposition suivante montre que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie-Poisson (G,P) et son espace dual $\mathcal{G}^*$, muni de la structure d'algèbre de Lie définie dans le théorème 4.2, jouent des rôles symétriques. Elle montre aussi que cette symétrie s'étend, sous certaines réserves, au niveau des groupes eux-mêmes.

4.4. Proposition. *Soit (G,P) un groupe de Lie-Poisson. On note $\pi = d_eP$ la dérivée intrinsèque de P en l'élément neutre, et on munit le dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ de la structure d'algèbre de Lie définie par le crochet $(\alpha,\beta) \mapsto [\alpha,\beta]_P$ introduit dans le théorème 4.2. Soit $\varpi : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*\wedge\mathcal{G}^*$ l'application linéaire donnée par l'expression, dans laquelle $\alpha \in \mathcal{G}^*$, X et $Y \in \mathcal{G}$,*

$$\varpi(\alpha)(X,Y) = \bigl\langle \alpha, [X,Y]\bigr\rangle\,.$$

1. *L'application π est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, à valeurs dans $\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$, pour la représentation adjointe, et l'application ϖ un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}^*$, à valeurs dans $\mathcal{G}^*\wedge\mathcal{G}^*$, pour la représentation adjointe.*

2. *Soit G^* le groupe de Lie connexe et simplement connexe ayant $\mathcal{G}^*$ pour algèbre de Lie. Il existe un tenseur de Poisson multiplicatif unique P^* sur G^*, faisant de (G^*,P^*) un groupe de Lie-Poisson, dont la dérivée intrinsèque d_eP^* en l'élément neutre est égale à ϖ. On dit que (G^*,P^*) est le groupe de Lie-Poisson dual de (G,P).*

Démonstration. Pour tous α et $\beta \in \mathcal{G}^*$ et tous X et $Y \in \mathcal{G}$, on a

$$\pi\bigl([X,Y]\bigr)(\alpha,\beta) = \bigl\langle [\alpha,\beta]_P, [X,Y]\bigr\rangle = \varpi\bigl([\alpha,\beta]_P\bigr)(X,Y)\,.$$

On sait déjà (proposition 4.1) que $\pi = d_eP$ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\pi\big([X,Y]\big)(\alpha,\beta) &= \big(\mathrm{ad}_X \pi(Y) - \mathrm{ad}_Y \pi(X)\big)(\alpha,\beta)\\
&= \pi(Y)(-\mathrm{ad}^*_X \alpha,\beta) + \pi(Y)(\alpha,-\mathrm{ad}^*_X \beta)\\
&\quad - \pi(X)(-\mathrm{ad}^*_Y \alpha,\beta) - \pi(X)(\alpha,-\mathrm{ad}^*_Y \beta)\\
&= -\big\langle [\mathrm{ad}^*_X \alpha,\beta]_P, Y\big\rangle - \big\langle [\alpha,\mathrm{ad}^*_X \beta]_P, Y\big\rangle\\
&\quad + \big\langle [\mathrm{ad}^*_Y \alpha,\beta]_P, X\big\rangle + \big\langle [\alpha,\mathrm{ad}^*_Y \beta]_P, X\big\rangle\\
&= -\langle \mathrm{ad}^*_X \alpha, \mathrm{ad}^*_\beta Y\rangle + \langle \mathrm{ad}^*_X \beta, \mathrm{ad}^*_\alpha Y\rangle\\
&\quad + \langle \mathrm{ad}^*_Y \alpha, \mathrm{ad}^*_\beta X\rangle - \langle \mathrm{ad}^*_Y \beta, \mathrm{ad}^*_\alpha X\rangle\\
&= \big\langle \alpha, [X, \mathrm{ad}^*_\beta Y]\big\rangle - \big\langle \beta, [X, \mathrm{ad}^*_\alpha Y]\big\rangle\\
&\quad - \big\langle \alpha, [Y, \mathrm{ad}^*_\beta X]\big\rangle + \big\langle \beta, [Y, \mathrm{ad}^*_\alpha X]\big\rangle\\
&= \varpi(\alpha)(X, \mathrm{ad}^*_\beta Y) - \varpi(\beta)(X, \mathrm{ad}^*_\alpha Y)\\
&\quad - \varpi(\alpha)(Y, \mathrm{ad}^*_\beta X) + \varpi(\beta)(Y, \mathrm{ad}^*_\alpha X)\\
&= \big(-\mathrm{ad}^*_\beta \varpi(\alpha) + \mathrm{ad}^*_\alpha \varpi(\beta)\big)(X,Y)\,.
\end{aligned}$$

En définitive, on a obtenu

$$\varpi\big([\alpha,\beta]_P\big)(X,Y) = \big(\mathrm{ad}_\alpha \varpi(\beta) - \mathrm{ad}_\beta \varpi(\alpha)\big)(X,Y)\,,$$

qui exprime que ϖ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}^*$, à valeurs dans $\mathcal{G}^* \wedge \mathcal{G}^*$, pour la représentation coadjointe.

2. La proposition 4.1 s'applique au groupe G^*, et prouve l'existence d'un champ de tenseurs multiplicatif $P^* \in A^2(G^*)$ tel que $d_e P^* = \varpi$. Appliquant alors à G^* le théorème 4.2 on définit sur $\mathcal{G}$, considéré comme espace dual de $\mathcal{G}^*$, une loi de composition en posant, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$, $\alpha \in \mathcal{G}^*$,

$$\big\langle [X,Y]_{P^*}, \alpha\big\rangle = d_e P^*(\alpha)(X,Y) = \varpi(\alpha)(X,Y) = \big\langle \alpha, [X,Y]\big\rangle\,.$$

On a donc $[X,Y]_{P^*} = [X,Y]$; la loi de composition définie sur $\mathcal{G}$ par P^* coïncide avec son crochet d'algèbre de Lie, donc vérifie l'identité de Jacobi. Le théorème 4.2 nous permet alors d'affirmer que P^* est un tenseur de Poisson, donc que (G^*, P^*) est un groupe de Lie-Poisson. $\square$

4.5. Remarque. Supposons G connexe, les autres hypothèses étant celles de la proposition précédente. Les rôles des groupes de Lie-Poisson (G,P) et (G^*,P^*) sont presque parfaitement symétriques : le second (G^*,P^*) est le dual du premier, et le dual du second est le groupe de Lie connexe et simplement connexe G^{**} ayant même algèbre de Lie que G, muni de la structure de Poisson image réciproque de P par l'application de revêtement $G^{**} \to G$. Si le groupe G est connexe et simplement connexe, la symétrie est tout à fait parfaite : chacun des deux groupes de Lie-Poisson (G,P) et (G^*,P^*) est le dual de l'autre.

La proposition suivante souligne la symétrie des rôles des algèbres de Lie $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$, et introduit la notion de bigèbre de Lie.

4.6. Proposition. *Soit $\mathcal{G}$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et $\mathcal{G}^*$ son dual. On suppose que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ sont tous deux munis d'une structure d'algèbre de Lie. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, définie, pour $X \in \mathcal{G}$, α et $\beta \in \mathcal{G}^*$, par*

$$\pi(X)(\alpha, \beta) = \bigl\langle [\alpha, \beta], X \bigr\rangle\,,$$

est un 1-cocycle de $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, pour la représentation adjointe;

(ii) *l'application $\varpi : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^* \wedge \mathcal{G}^*$, définie, pour $\alpha \in \mathcal{G}^*$, X et $Y \in \mathcal{G}$, par*

$$\varpi(\alpha)(X, Y) = \bigl\langle \alpha, [X, Y] \bigr\rangle\,,$$

est un 1-cocycle de $\mathcal{G}^*$ à valeurs dans $\mathcal{G}^* \wedge \mathcal{G}^*$, pour la représentation adjointe.

Lorsque ces deux propriétés sont satisfaites, on dit que $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ est une bigèbre de Lie.

Démonstration. Nous avons, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$, α et $\beta \in \mathcal{G}^*$,

$$\pi\bigl([X, Y]\bigr)(\alpha, \beta) = \bigl\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \bigr\rangle = \varpi\bigl([\alpha, \beta]\bigr)(X, Y)\,.$$

Lors de la démonstration de la proposition 4.4, nous avons prouvé que les propriétés (i) et (ii) étaient équivalentes, car chacune d'elles est vérifiée si et seulement si, pour tous X et $Y \in \mathcal{G}$ et tous α et $\beta \in \mathcal{G}^*$, on a l'égalité, dans laquelle les éléments de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}^*$ jouent des rôles parfaitement symétriques,

$$\begin{aligned}\bigl\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \bigr\rangle = &-\langle \operatorname{ad}^*_X \alpha, \operatorname{ad}^*_\beta Y \rangle + \langle \operatorname{ad}^*_X \beta, \operatorname{ad}^*_\alpha Y \rangle \\ &+ \langle \operatorname{ad}^*_Y \alpha, \operatorname{ad}^*_\beta X \rangle - \langle \operatorname{ad}^*_Y \beta, \operatorname{ad}^*_\alpha X \rangle\,.\end{aligned}$$ ∎

4.7 Théorème. *Soit $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ une bigèbre de Lie. Sur l'espace somme directe $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, on définit une loi de composition interne en posant, pour tous $(X+\alpha)$ et $(Y+\beta) \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$,*

$$\bigl[(X+\alpha), (Y+\beta)\bigr] = \bigl([X, Y] + \operatorname{ad}^*_\alpha Y - \operatorname{ad}^*_\beta X\bigr) + \bigl([\alpha, \beta] + \operatorname{ad}^*_X \beta - \operatorname{ad}^*_Y \alpha\bigr)\,.$$

Muni de cette loi de composition, $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ est une algèbre de Lie, dont $\mathcal{G}$ (identifié à $\mathcal{G} \oplus \{0\}$) et $\mathcal{G}^*$ (identifié à $\{0\} \oplus \mathcal{G}^*$) sont des sous-algèbres de Lie. De plus, posons

$$\bigl((X+\alpha) \bigm| (Y+\beta)\bigr) = \langle \alpha, X \rangle + \langle \beta, Y \rangle\,.$$

On définit ainsi un produit scalaire pseudo-euclidien non dégénéré sur $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$, invariant par la représentation adjointe. Les sous-espaces $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ sont supplémentaires et isotropes pour ce produit scalaire.

Démonstration. Les propriétés indiquées se vérifient sans difficulté, moyennant quelques calculs. ∎

Le théorème qui suit est une réciproque du théorème précédent.

4.8. Théorème (Manin). *Soit $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-)$ un triplet d'algèbres de Lie de dimensions finies ayant les propriétés suivantes :*

— *les algèbres de Lie $\mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^-$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G}$, et en tant qu'espace vectoriel, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \oplus \mathcal{G}^-$;*

— *il existe sur $\mathcal{G}$ un produit scalaire pseudo-euclidien non dégénéré, invariant par la représentation adjointe, pour lequel $\mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^-$ sont des sous-espaces isotropes.*

Alors $(\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-)$ est une bigèbre de Lie; le crochet sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \oplus \mathcal{G}^-$ s'exprime, au moyen des crochets sur $\mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^-$ et de leurs représentations coadjointes, comme indiqué dans le théorème 4.7, ($\mathcal{G}$ étant remplacé par $\mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^*$ par $\mathcal{G}^-$). On dit que $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-)$ est un triplet de Manin.

Démonstration. Ces propriétés se vérifient sans difficulté, moyennant quelques calculs. ▯

5. Groupes de Lie-Poisson et matrices R

5.1. Cocycles et cobords d'un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie, et $P \in A^2(G)$ un champ de 2-tenseurs multiplicatif sur G. D'après 3.2, l'application $P_R : G \to \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, $P_R(g) = TR_{g^{-1}}\big(P(g)\big)$, vérifie, pour tous g et $h \in G$,

$$P_R(gh) = \mathrm{Ad}_g\, P_R(h) + P_R(g)\,.$$

On dit que P_R est un 1-cocycle du groupe G, à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, pour la représentation adjointe. Nous avons d'ailleurs utilisé cette propriété lors de la démonstration de 4.1.

Parmi les 1-cocycles du groupe G, les plus faciles à trouver sont les 1-cobords. Rappelons qu'une 0-cochaîne de G à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ est tout simplement un élément R de $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, et que le cobord de cette cochaîne est l'application $\partial R : G \to \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$,

$$\partial R(g) = \mathrm{Ad}_g\, R - R\,.$$

L'application ∂R ainsi définie est automatiquement un 1-cocycle de G. Le lemme de Whitehead permet même d'affirmer que si le groupe G est semi-simple, tous les 1-cocycles de G à valeurs dans $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ sont de la forme ∂R, pour un certain élément R de $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$. Il est donc naturel de s'intéresser aux champs de 2-tenseurs multiplicatifs P sur G, de la forme

$$P(g) = TR_g(\mathrm{Ad}_g\, R - R) = TL_g R - TR_g R\,,$$

où R est un élément de $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$, souvent appelé *matrice R* [32].

Le théorème suivant indique des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de 2-tenseurs P de cette forme, sur le groupe de Lie G, soit de Poisson, et par suite, pour que (G, P) soit un groupe de Lie-Poisson.

5.2. Théorème de Drinfel'd [7] [8]. *Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et R un élément de $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$. On note R^L et R^R les champs de 2-tenseurs sur G, invariants, respectivement à gauche et à droite, dont la valeur en l'élément neutre est R, et on pose $P = R^L - R^R$:*

$$R^L(g) = TL_g R\,, \quad R^R(g) = TR_g R\,, \quad P(g) = TL_g R - TR_g R\,.$$

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *le champ de tenseurs P est de Poisson, donc (G,P) est un groupe de Lie-Poisson;*

(ii) *le crochet de Schouten-Nijenhuis $[R^L,R^L]$, qui est automatiquement invariant à gauche, est aussi invariant à droite;*

(iii) *le crochet de Schouten-Nijenhuis $[R^R,R^R]$, qui est automatiquement invariant à droite, est aussi invariant à gauche.*

Lorsqu'elles sont vérifiées, ces trois propriétés équivalentes impliquent :

(iv) *pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche sur G, $\mathcal{L}(X)[R^L,R^L]=0$;*

(v) *pour tout champ de vecteurs Y invariant à droite sur G, $\mathcal{L}(Y)[R^R,R^R]=0$.*

Enfin, lorsque le groupe G est connexe, chacune des propriétés (iv) *ou* (v) *implique les propriétés* (i), (ii) *et* (iii).

Démonstration. Nous avons

$$[P,P]=[R^L-R^R,R^L-R^R]=[R^L,R^L]+[R^R,R^R]\,,$$

car le crochet de Schouten-Nijenhuis d'un champ de tenseurs invariant à gauche (comme R^L) et d'un champ de tenseurs invariant à droite (comme R^R) est identiquement nul. On sait que P est multiplicatif, donc (proposition 3.4) $[P,P]$ l'est aussi, et par suite, s'annule en l'élément neutre. De plus, $[R^L,R^L]$ est invariant à gauche et $[R^R,R^R]$ invariant à droite.

Si P est de Poisson, $[P,P]$ est identiquement nul, donc invariant à droite, donc $[R^L,R^L]=[P,P]-[R^R,R^R]$ est invariant à droite. Réciproquement, si $[R^L,R^L]$ est invariant à droite, $[P,P]=[R^L,R^L]+[R^R,R^R]$ l'est aussi, et comme il est nul en l'élément neutre, il est identiquement nul, et P est de Poisson. Nous avons prouvé que (i) et (ii) sont équivalentes. On montre de même que (i) et (iii) sont équivalentes.

Supposons les propriétés (i), (ii) et (iii) satisfaites. Le flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche X est le groupe à un paramètre de translations à droite $R_{\exp(tX)}$, $t\in\mathbf{R}$. Comme $[R^L,R^L]$ est invariant à droite, sa dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)[R^L,R^L]$ est nulle. La propriété (iv) est donc vérifiée. On montre de même que la propriété (v) est vérifiée.

Supposons le groupe G connexe et la propriété (iv) vérifiée. Alors $[R^L,R^L]$ est invariant par les translations à droite de la forme $R_{\exp(tX)}$, avec $t\in\mathbf{R}$ et $X\in\mathcal{G}$. Mais tout élément de G est produit d'un nombre fini d'éléments de la forme $\exp(t_iX_i)$, avec $t_i\in\mathbf{R}$, $X_i\in\mathcal{G}$. Donc $[R^L,R^L]$ est invariant à droite. Nous avons prouvé que la propriété (ii) est vérifiée. On montre de même que si G est connexe et si la propriété (v) est vérifiée, la propriété (iii) est vérifiée. ▯

5.3. Remarques.

1. Associons à l'élément R de $\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$ l'application linéaire $R^\sharp:\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}$ définie par

$$\langle\beta,R^\sharp\alpha\rangle=R(\alpha,\beta)\,,\qquad \alpha \text{ et } \beta\in\mathcal{G}^*\,.$$

Moyennant quelques calculs utilisant les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis, on peut exprimer les valeurs en l'élément neutre des crochets $[R^L,R^L]$ et $[R^R,R^R]$ en termes purement algébriques, ne faisant intervenir que $R^\sharp$ et le crochet de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. On trouve :

$$\begin{aligned}[R^L, R^L](e)(\alpha,\beta,\gamma) &= -[R^R, R^R](e)(\alpha,\beta,\gamma)\\ &= \bigl\langle \alpha, [R^\sharp\beta, R^\sharp\gamma]\bigr\rangle + \bigl\langle \beta, [R^\sharp\gamma, R^\sharp\alpha]\bigr\rangle + \bigl\langle \gamma, [R^\sharp\alpha, R^\sharp\beta]\bigr\rangle\,.\end{aligned}$$

Lorsque, pour tous α, β et $\gamma \in \mathcal{G}^*$, l'élément R de $\mathcal{G}\wedge\mathcal{G}$ satisfait l'équation, appelée *équation de Yang-Baxter classique*,

$$\bigl\langle \alpha, [R^\sharp\beta, R^\sharp\gamma]\bigr\rangle + \bigl\langle \beta, [R^\sharp\gamma, R^\sharp\alpha]\bigr\rangle + \bigl\langle \gamma, [R^\sharp\alpha, R^\sharp\beta]\bigr\rangle = 0\,,$$

les champs de tenseurs $[R^L, R^L]$ et $[R^R, R^R]$ sont nuls en l'élément neutre; comme ils sont invariants, respectivement à gauche et à droite, ils sont identiquement nuls. Les conditions d'application du théorème 5.2 sont donc satisfaites, et $(G, P = R^L - R^R)$ est un groupe de Lie-Poisson.

2. Soit $X \in T_eG = \mathcal{G}$, $Q \in \bigwedge^q \mathcal{G}$. Désignons par X^L et Q^L (resp., X^R et Q^R) les champs de vecteurs et de tenseurs sur le groupe de Lie G, invariants à gauche (resp., à droite), qui prennent en l'élément neutre les valeurs X et Q, respectivement. Il est facile de vérifier que $\mathcal{L}(X^L)Q^L$ et $\mathcal{L}(X^R)Q^R$ sont des champs de q-tenseurs invariants, respectivement à gauche et à droite, dont les valeurs en l'élément neutre sont, respectivement, $\mathrm{ad}_X Q$ et $-\mathrm{ad}_X Q$. En d'autres termes, on a

$$\mathcal{L}(X^L)Q^L = (\mathrm{ad}_X Q)^L\,, \qquad \mathcal{L}(X^R)Q^R = -(\mathrm{ad}_X Q)^R\,.$$

En appliquant cette remarque à $Q^L = [R^L, R^L]$, ou à $Q^R = -[R^R, R^R]$, nous voyons que les propriétés (iv) et (v) du théorème 5.2 peuvent s'exprimer sous la forme suivante, purement algébrique,

(iv') pour tout $X \in \mathcal{G}$, $\mathrm{ad}_X\bigl([R^L, R^L](e)\bigr) = 0$;

(v') pour tout $Y \in \mathcal{G}$, $\mathrm{ad}_Y\bigl([R^R, R^R](e)\bigr) = 0$.

Bibliographie

[1] Beltrán, J. V., and Monterde, J., Graded Poisson structures on the algebra of differential forms. *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), 383–402.

[2] Bhaskara, K. H., and Viswanath, K., Calculus on Poisson manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **20** (1988), 68–72.

[3] Bhaskara, K. H., and Viswanath, K., *Poisson Algebras and Poisson Manifolds*, Pitman Research Notes in Mathematics 174, Longman Sci., Harlow and New York, 1988.

[4] Cabras, A., and Vinogradov, A. M., Extensions of the Poisson bracket to differential forms and multi-vector fields. *J. Geom. Phys.* **9** (1992), 75–100.

[5] Cahen, M., Gutt, S., Ohn, C., and Parker, M., Lie-Poisson groups: remarks and examples. *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 343–353.

[6] Coste, A., Dazord, P., and Weinstein, A., Groupoïdes symplectiques. *Publ. du Département de Mathématiques de l'Université Claude Bernard (Lyon I)* **2/A** (1987), 1–65.

[7] Drinfel'd, V. G., Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet Math. Dokl.*, 27, 1, 1983, 68–71.

[8] Drinfel'd, V. G., Quantum groups. *Proc. ICM*, Berkeley, 1, 1986, 789–820.

[9] Dufour, J.-P., Linéarisation de certaines structures de Poisson. *J. Differential Geometry* **32** (1990), 415–428.

[10] Grabowski, J., **Z**-graded extensions of Poisson brackets. Preprint, Mathematical Institute, Polish Academy of Sciences, 1996.

[11] Huebschmann, J., Poisson cohomology and quantization. *J. Reine Angew. Math.* **408** (1990), 57–113.

[12] Kosmann-Schwarzbach, Y., Grand crochet, crochets de Schouten et cohomologies d'algèbres de Lie. *C. R. Acad. Sc. Paris, série I* **312** (1991), 123–126.

[13] Kosmann-Schwarzbach, Y., Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. *Acta Applicandae Math.* **41** (1995), 153–165.

[14] Kosmann-Schwarzbach, Y. and Magri, F., Poisson-Lie groups and complete integrability. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **49** (1988), 433–460.

[15] Kosmann-Schwarzbach, Y. and Magri, F., Poisson-Nijenhuis structures. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **53** (1990), 35–81.

[16] Koszul, J.-L., Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie. In *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*. Astérisque, numéro hors série (1985), 257-271.

[17] Lichnerowicz, A., Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Differential Geometry* **12** (1977), 253–300.

[18] Lichnerowicz, A., Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées. *J. Math. Pures et appl.* **57** (1978), 453–488.

[19] Liu, Z.-J., Weinstein, A., and Xu, P., Manin triples for Lie bialgebroids. Preprint, Penn. State University, 1995.

[20] Lu, J.-H., *Multiplicative and affine Poisson structures on Lie groups*. Thesis, Berkeley, 1990.

[21] Lu, J.-H., Momentum mappings and reduction of Poisson actions. *Symplectic geometry, groupoids and integrable systems* (P. Dazord and A. Weinstein, eds), Springer, 1991, pp. 209–226.

[22] Lu, J.-H., and Weinstein, A., Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions. *J. Differential Geometry* **31** (1990), 501–526.

[23] Mackenzie, K. C. H., *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry.* London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **124**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[24] Mackenzie, K. C. H. and Xu, P., Lie bialgebroids and Poisson groupoids. *Duke Math. J.* **73** (1994), 415–452.

[25] Magri, F. and Morosi, C., A geometrical characterization of integrable hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds. *Università degli studi di Milano Quaderno* **S 19** (1984).

[26] Michor, P. W., Remarks on the Schouten-Nijenhuis bracket. *Suppl. Rend. Circ. Mat. di Palermo, Serie II* **16** (1987), 207–215.

[27] Nijenhuis, A., Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields I, *Indagationes Math.* **17** (1955), 390–403.

[28] Ouzilou, R., Hamiltonian actions on Poisson manifolds, in *Symplectic geometry* (A. Crumeyrolle and J. Grifone, eds), Research notes in mathematics **80**, Pitman, Boston, 1983, 172–183.

[29] Roger, C., Algèbres de Lie graduées et quantification. In *Symplectic Geometry and Mathematical Physics* (P. Donato et al., eds), Progress in Math. 99, Birkhäuser, Boston, 1991 374–421.

[30] Schouten, J. A., Über Differentialkonkomitanten zweier kontravarianter Größen. *Indag. Math.* **2** (1940), 449–452.

[31] Schouten, J. A., On the differential operators of the first order in tensor calculus. In *Convegno Int. Geom. Diff. Italia*, 1953. Ed. Cremonese, Roma, 1954, 1–7.

[32] Semenov Tian Shansky, M. A., What is a classical r-matrix? *Funkt. Anal. Appl.*, 17, 1983, 259–272.

[33] Semenov Tian Shansky, M. A., Dressing transformations and Poisson Lie groups actions. *Publ. RIMS*, Kyoto University, 21, 1985, 1237–1260.

[34] Vaisman, I., Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **40** (1990), 951–963.

[35] Vaisman, I., *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Birkhäuser, Boston, 1994.

[36] Weinstein, A., The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geometry* **18** (1983), 523–557.

[37] Weinstein, A., Some remarks on dressing transformations. *J. Fac. Sci. Univ Tokyo*, Sect. 1A, Math 36, 1988, 163–167.

[38] Xu, P., Poisson cohomology of regular Poisson manifolds. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **42** (1992), 967–988.