Le bon usage des diagrammes Espace-Temps en Relativité restreinte

Charles-Michel Marle

Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris cedex 05, France

Résumé. Ce document est la suite de “La relativité restreinte expliquée aux enfants (de 7 à 107 ans)”. Afin d’illustrer les phénomènes tels que le caractère relatif de la simultanéité, la dilatation apparente des temps, la contraction apparente des longueurs, et de montrer comment les diagrammes espace-temps, bien utilisés, peuvent servir de guide au raisonnement, un exemple précis est exposé de manière détaillée. Au passage, l’auteur s’est efforcé d’illustrer la formule de composition des vitesses et d’expliquer ce que sont les transformations de Lorentz.

Keywords: Espace-temps de Minkowski, simultanéité, dilatation apparente des temps, contraction apparente des longueurs

Pour mon arrière-petite-fille Morgane

PROLOGUE

Imaginons qu’un jour un de mes descendants, vers l’âge de 15 ou 16 ans, cherche à comprendre la théorie de la Relativité restreinte. Fouillant dans mes papiers (ou dans mon ordinateur), il trouvera peut-être le présent document. J’espère qu’il le lira, et que mes explications lui permettront d’éviter les malentendus qui affligent si souvent les personnes qui s’intéressent à cette théorie.

QU’ALLONS-NOUS ÉTUDIER ?

Deux vaisseaux spatiaux identiques viennent à la rencontre l’un de l’autre. Pour fixer les idées, nous dirons que le vaisseau A va de gauche à droite et le vaisseau B de droite à gauche. Bien entendu, parler de droite et de gauche est une pure convention, qui dépend du point de vue choisi par l’observateur et de la manière dont cet observateur représentera sur un diagramme les position successives de ces deux vaisseux.

Nous supposons que les référentiels attachés à ces vaisseaux sont tous deux galiléens. Ainsi dans l’Espace-Temps de Minkowski, les lignes d’univers de tous les points matériels dont chaque vaisseau est constitué sont des droites parallèles. Les expériences de physique que peuvent faire les occupants de chacun de ces vaisseaux ne mettent en évidence aucune force, en partuculier aucune force centrifuge : les vaisseaux ne tournent pas sur eux-mêmes, chacun d’eux garde une orientation fixe par rapport aux étoiles lointaines.

Nous supposons encore que la vitesse relative à laquelle ces deux vaisseaux se rapprochent l’un de l’autre est égale à V. Pour les figures illustrant ce document, nous choisirons, par exemple, $V = 1/2$, la vitesse de la lumière étant prise pour unité.

Nous appellerons L la longueur de chacun de ces vaisseaux, telle qu’elle est mesurée par les occupants du vaisseau, c’est-à-dire dans le référentiel relativement auquel ce vaisseau est immobile. Pour les figures illustrant le présent document, nous choisirons, par exemple, $L = 1$, l’unité de temps étant l’année, et l’unité de longueur l’année-lumière. Ces vaisseux spatiaux peuvent sembler vraiment très spacieux, comme l’a remarqué l’ami Paul. Leur construction est clairement hors de portée de nos techniques actuelles, mais qu’importe ! Nous pourrons ainsi apprécier la fameuse contraction apparente des longueurs, si souvent mal comprise.

Nous supposerons encore que les deux vaisseaux se font face, vont entrer en collision proue contre proue, et que chacun d'eux est allongé dans la direction de leur mouvement relatif. Nous pourrons ainsi étudier le phénomène comme s'il n'y avait qu'une seule dimension d'espace.

L'ESPACE-TEMPS ET SES REPRÉSENTATIONS

Certains vulgarisateurs parlent parfois d'Espace-Temps attaché à tel ou tel référentiel, et font intervenir plusieurs Espace-Temps. C'est une grave erreur : il n'y a qu'un seul Espace-Temps, le vrai, celui dans lequel nous vivons.

On parle cependant d'Espace-Temps de Newton, de Leibniz, de Minkowski, de Schwarschild, …. Ces termes désignent divers modèles mathématiques de l'Espace-Temps vrai, employés par les physiciens pour l'étude des phénomènes qui s'y déroulent. Dans le présent document, je me place dans le cadre de la Relativité restreinte ; j'utilise donc le modèle mathématique d'Espace-Temps qui lui correspond : l'Espace-Temps de Minkowski. De plus, comme le phénomène auquel je m'intéresse ne met en jeu qu'une seule dimension d'espace et une dimension de temps, je ferai comme si l'Espace-Temps était de dimension 2, avec une dimension d'espace et une de temps. Cette simplification est sans conséquence sur la validité des résultats, car on peut toujours supposer que les deux autres dimensions d'espace existent, mais sont "en dehors du plan de la figure". Ceci fait, l'Espace-Temps que je considère, modèle mathématique schématique du vrai, doit être considéré comme unique : c'est le cadre dans lequel se déroule le phénomène de collision de deux vaisseaux spatiaux, que je vais étudier. Pas question donc de parler de plusieurs Espaces-Temps, dépendant de l'observateur, ou du référentiel utilisé : ce serait une grave erreur !

Le risque de confusion sur lequel j'attire l'attention provient du fait qu'on représente souvent l'Espace-Temps sur une feuille de papier, en faisant ce qu'il est convenu d'appeler un *diagramme espace-temps*. Même lorsqu'on ne dessine pas de figure, on emploie souvent un repère pour représenter chaque élément de l'Espace-Temps par plusieurs nombres réels (deux pour l'Espace-Temps schématique de dimension 2 considéré dans la suite, 4 pour l'Espace-Temps "vrai" à trois dimensions d'espace et une de temps), les coordonnées de l'élément considéré dans le repère choisi. Ces représentations de l'Espace-Temps, que ce soit par une figure tracée sur une feuille de papier ou par des nombres réels associés à un système de coordonnées, ne sont évidemment pas uniques et dépendent des conventions faites. Elles ne méritent pas le nom d'*Espace-Temps*, et lorsqu'on les emploie, il importe de bien distinguer, parmi leurs propriétés, celles qui proviennent de l'Espace-Temps lui-même de celles qui proviennent du mode de représentation choisi. Bien sûr, seules celles qui proviennent de l'Espace-Temps lui-même doivent être cosidérées.

PETIT RAPPEL SUR LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE-TEMPS

Dans toute la suite, je supposerai que le phénomène étudié, la collision de deux vaisseaux spatiaux, a lieu dans l'Espace-Temps de Minkowski et ne met en jeu que deux dimensions : une d'espace et une de temps. C'est donc pour ce schéma simplifié qu'après avoir rappelé quelques propriétés géométriques de l'Espace-Temps, j'indiquerai ce que sont les référentiel, les repères et les systèmes de coordonnées. Le lecteur pourra se reporter au document "La Relativité restreinte expliquée aux enfants (de 7 à 107 ans)" [1] pour des explications plus détaillées, couvrant le cas de l'Espace-Temps 'vrai' à trois dimensions d'espace et une dimension temps.

Notre Espace-Temps (schématisé) est donc un plan affine, de dimension 2. Certaines notions de la géométrie élémentaire lui sont applicables (pas toutes) : les notions de droite, de parallélisme, conservent un sens, et les théorèmes qui relèvent de la géométrie affine, comme par exemple le théorème de Thalès, sont applicables. Par contre les notions métriques, celles qui font intervenir la distance ou la durée, sont très différentes de celles auxquelles la géométrie plane euclidienne nous a habitués. La mesure des angles, la notion d'orthogonalité euclidienne, le théorème de Pythagore, n'existent pas dans l'Espace-Temps.

Par convention, les éléments de l'Espace-Temps seront appelés *événements*, plutôt que points.

Dans l'Espace-Temps, trois types de droites doivent être distingués :

- les *droites de genre temps*, qui peuvent être les lignes d'univers d'un point matériel libre ;
- les *droites de genre espace*, qui peuvent être les isochrones d'un référentiel (ensemble des événements ayant lieu à un même instant, le temps étant évalué par un observateur lié à un référentiel particulier, comme je l'explique plus loin) ;
- et les *droites de genre lumière*, qui peuvent être les lignes d'univers de sigaux lumineux.

Plus généralement, une courbe tracée dans l'Espace-Temps, assez régulière pour admettre une tangente en chacun de ses éléments, est dite *de genre temps* si toutes ses tangentes sont des droites de genre temps, et *de genre espace* si toutes ses tangentes sont des droites de genre espace.

Les droites de genre lumière sont des cas limites, à la fois, de droites de genre temps et de droites de genre espace. Lorsqu'on ne considère que deux dimensions (une d'espace et une de temps), il existe seulement deux directions de droites de lumière, donc deux familles de droites de lumière, toutes parallèless entre elles à l'intérieur de chaque famille. Par convention j'appellerai ces deux familles de droites de lumière celles qui *vont vers la droite* et celles qui *vont vers la gauche*. Cette distinction n'existe plus lorsque les trois dimensions d'espace sont considérées, car les droites de genre lumière passant par un élémeent de l'Espace-Temps, au lieu de n'être que deux, sont en nombre infini et forment un cône de dimension 3 ayant cet élément pour sommet.

Les droites de genre temps et de genre lumière possèdent une orientation naturelle, du passé vers le futur. Cette orientation est une propriété de l'Espace-Temps qui possède une signification physique. Quant aux droites de genre espace, on peut aussi les orienter, vers la droite ou vers la gauche, mais cette notion n'est pas une propriété de l'Espace-Temps vrai ; elle n'existe que parce que le schéma simplifié d'Espace-Temps que j'utilise ici n'a qu'une seule dimension d'espace et une de temps ; elle disparaît lorsque toutes les dimensions d'espace sont prises en considération.

Paragraphe à compléter : il faut ajouter ce qui concerne le produit scalaire pseudo-euclidien dont est muni l'Espace-Temps de Minkowski, une fois une unité de temps choisie.

RÉFÉRENTIELS

Qu'est-ce qu'un référentiel ? C'est un moyen de repérer (en les distinguant les uns des autres, les éléments de l'espace-temps. J'appellerai cela "cartographier" l'espace-temps, car l'opération que je vais décrire est assez analogue à celle qui consiste à tracerpar la pensée, sur la surface de la Terre, deux familles de lignes, les parallèles et les méridiens, dont les intersections déterminent les différents lieux qu'on peut considérer sur cette surface. La donnée d'un méridien (demi-grand cercle joignant les deux pôles) et d'un parallèle (intersection de la sphère terrestre avec un plan parallèle au plan de l'équateur) détermine un lieu unique sur la surface de la Terre, l'intersection de ce méridien et de ce parallèle. Les pôles, laissés de côté, doivent être repérés par d'autres procédés.

Dans notre espace-temps schématique de dimension 2, choisir un référentiel, c'est tracer par la pensée, dans l'espace-temps, deux familles de lignes :

– une famille de lignes de genre temps, appelées les *isochores* du référentiel,
– et une famille de lignes de genre espace, appelées les *isochrones* du référentiel,

de manière telle que par chaque élément de l'espace-temps passe une unique isochrone et une unique isochore, et que réciproquement, toute couple de lignes formé d'une isochrone et d'une isochore ait un unique point d'intersection, donc détermine un élément unique de l'Espace-Temps.

L'interprétation physique de cette construction est la suivante. Un référentiel étant choisi, chaque ligne isochrone est l'ensemble de événements qui ont lieu au même instant, le Temps étant évalué dans le référentiel considéré. Chaque isochrone correspond à un instant (toujours pour le Temps du référentiel considéré), deux isochrones distinctes correspondant à deux instants distincts de ce Temps. De même, chaque ligne isochore est l'ensemble de événements qui se produisent en un même lieu de l'Espace associé au référentiel considéré. Chaque isochore correspond à un lieu de cet Espace, deux isochores distinctes correspondant à deux lieux distincts.

Le choix d'un référentiel apparaît donc comme un moyen de décomposer l'Espace-Temps en un produit d'un Espace et d'un Temps, puisqu'il permet d'associer, à chaque événement de l'Espace-Temps, un couple formé par un lieu (l'isochore passant par cet événement) et un instant (l'isochrone passant par cet événement) [1].

On peut imaginer toutes sortes de référentiels, plus ou moins biscornus. La Dynamique (en particulier, le fameux Principe de l'inertie, découvert par Galilée) a conduit à distinguer un e classe particulière de référentiels aux propriétés remarquables : les *référentiels galiléens*, que je vais maintenant décrire.

---

[1] Dans l'Espace-Temps "vrai", de dimension 4, c'est presque la même chose : les isochores sont toujours des lignes de genre temps ; mais les isochrones, au lieu d'être des lignes, sont des hypersurfaces de dimension 3, de genre espace. Chaque couple formé d'une isochrone et d'une isochore détermine encore un événement unique, l'unique élément de l'Espace-Temps où cette ligne isochore et cette hypersurface isochrone se coupent.

Dans l'Espace-Temps schématique de dimension 2 que j'utilise ici, les isochrones et les isochores d'un référentiel galiléen sont des droites. Plus précisément, les isochores sont des droites de genre temps, toutes parallèles entre elles, qui peuvent être considérées comme les lignes s'univers des différents points matériels d'un corps rigide hypothétique qui remplirait tout l'espace et existerait pour l'éternité, qui se déplacerait selon un mouvement niforme, en gardant une orientation fixe. Les isochrones sont des droites de genre espace, toutes parallèles entre elles. Leur direction n'est pas quelconque : la donnée de la direction des droites isochores détermine automatiquement celle des droites isochrones (et réciproquement). Une construction géométrique très simple permet de trouver cette direction : il suffit de construire par la pensée un parallélogramme dont les côtés sont portés par des droites de genre lumière et dont une des diagonales est portée par une droite parallèle aux isochores. La direction de la droite qui porte l'autre diagonale de ce parallélogramme est alors celle des isochrones.

Pour les lecteurs qui, aux constructions géométriques, préfèrent les formules et les calculs de l'Algèbre ou de l'Analyse mathématique, je donne une autre interprétation de la construction qui, à la direction des isochores, associe celle des isochrones. Comme je l'ai indiqué ci-dessus, le choix d'une unité de temps détermine un produit scalaire pseudo-euclidien qui, à chaque couple $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de vecteurs de l'espace-temps, associe un nombre réel $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$. La direction des isochrones n'est autre que la direction orthogonale (relativement à ce produit scalaire) à celle des isochores.

REPÈRES ET SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Choisir un *repère* dans l'Espace-Temps, c'est,

- d'abord, choisir un référentiel,
- puis choisir une isochore particulière qui servira d'origine pour l'Espace de notre référentiel, et une isochrone particulière qui servira d'origine de Temps pour notre référentiel ; l'événement unique intersection de cette isochore et de cettte isochrone sera, par convention, l'origine de l'Espace-Temps, l'événement dont toutes les coordonnées sont nulles ;
- et enfin "graduer" l'ensemble des isochrones et l'ensemble des isochores, c'est-à-dire associer, à chaque isochrone, un nombre réel représentant sa distance algébrique (affectée d'un signe) à l'isochrone de référence (ce nombre sera la coordonnée temporelle de tous les événements qui consituent cette isochrone), et à chaque isochore, un autre nombre réel représentant sa distance algébrique à l'isochore de référence (ce nombre sera l'abscissse, c'est-à-dire la coordonnée spatiale, de tous les événements qui constituent cette isochore.

Le choix d'un repère permet donc d'associer à chaque événement (élément de notre Espace-Temps schématique, de dimension 2, un couple (t,x) de deux nombres réels, l'instant t et l'abscisse x de cet événement. La correspondance ainsi obtenue, qui à chaque événement associe un couple (t,x) de nombres réels, est appelée *système de coordonnées* associé au repère considéré [2].

En pratique, je n'utiliserai dans ce qui suit que des *repères galiléens*, construits en choisissant :

- un référentiel galiléen,
- une droite isochore particulière P_0 qui sera l'origine pour l'Espace, et une droite isochrone particulière T_0 qui sera l'origine de Temps pour notre référentiel,
- une unité de Temps, ce qui automatiquement détermine un produit scalaire pseudo-euclidien $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mapsto(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ dans notre Espace-Temps.

Le produit scalaire pseudo-euclidien, résultant due choix de l'unité de temps, permet en effet de déterminer très simplement les graduations dont doivent être munis les ensembles des isochores et des isochrones. Voici comment. Soit O l'événement intersection de l'isochrone de référence T_0 et de l'isochore de référence P_O que nous avons choisies, $\overrightarrow{e_0}$ le vecteur, orienté vers le futur, parallèle aux droites isochores et vérifiant

$$(\overrightarrow{e_0}|\overrightarrow{e_0}) = 1$$

[2] Pour l'espace-temps de Minkowski "vrai" de dimension 4, c'est presque pareil ; un seul nombre réel (une seule coordonnée temporelle) suffit pour repérer la position d'une isochrone par rapport à l'isochrone de référence servant d'origine du Temps. Mais il faut maintenant trois nombres réels (trois coordonnées spatiales) au lieu d'un, pour représenter la position de chaque isochore par rapport à l'isochore de référence, servant d'origine de l'Espace de notre référentiel.

et $\overrightarrow{e_1}$ un des deux vecteurs parallèles aux droites isochrones et vérifiant

$$(\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}) = -1$$

(il y a en effet exactement deux vecteurs, opposés l'un de l'autre, vérifiant ces propriétés). Puisque la direction des isochrones est orthogonale à celle des isochores (pour le produit scalaire pseudo-euclidien dont est muni l'Espace-Temps), nous avons

$$(\overrightarrow{e_0}|\overrightarrow{e_1}) = 0\,.$$

Le triplet $(O, \overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ est un repère affine de l'Espace-Temps. Pour chaque événement M, il existe donc deux nombres réels t et x, parfaitement déterminés, tels que

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{e_0} + x\overrightarrow{e_1}\,..$$

Les nombres t et x sont les coordonnées, respectivement temporelle et spatiale, de l'événement M dans le repère considéré. La coordonnée temporelle t d'un événement ne dépend que de l'isochrone, et la coordonnée spatiale x que de l'isochore, qui contiennent cet événement. La construction décrite conduit donc bien à la graduation des ensembles des isochrones et des isochores nécessaires pour déterminer un repère.

Le produit scalaire pseudo-euclidien dont est muni l'Espace-Temps s'exprime de manière très simple au moyen des coordonnées associées à un repère galiléen. Si M_1 et M_2 sont deux événements dont les coordonnées sont (t_1, x_1) et (t_2, x_2), on a en effet

$$(\overrightarrow{OM_1}|\overrightarrow{OM_2}) = t_1 t_2 - x_1 x_2\,.$$

CONSTRUCTION D'UN DIAGRAMME ESPACE-TEMPS

Je reviens maintenant aux deux vaisseaux spatiaux qui vont entrer en collision. J'utiliserai trois repères galiléens pour étudier leur mouvement, ayant tous trois pour origine l'événement correspondant à la collision des proues de ces deux vaisseaux :

– un repère associé au référentiel dans lequel le vaisseau “de gauche” est au repos, par rapport auquel l'autre vaisseau se déplace, de la droite vers la gauche, à la vitesse $V = 1/2$ (la vitesse de la lumière étant prise pour unité), jusqu'à la collision ; les coordonnées associées à ce repère seront notées (t', x') ;
– un repère associé au référentiel dans lequel le vaisseau “de droite” est au repos, par rapport auquel l'autre vaisseau se déplace, de la gauche vers la droite, à la vitesse $V = 1/2$, jusqu'à la collision ; les coordonnées associées à ce repère seront notées (t'', x'') ;
– un repère associé à un référentiel intermédiaire, dans lequel les deux vaisseaux ont des vitesses égales en module mais de signes opposés, le vaisseau de gauche allant de la gauche vers la droite et le vaisseau de droite de la droite vers la gauche, jusqu'à collision ; je noterai (t,x) lers coordonnées associées à ce repère.

Pour commencer, je calcule le module W de la vitesse relative des deux vaisseaux par rapport au référentiel moyen, celui dans lequel leurs vitesses relatives sont égales en module et se signes opposés. Erreur à ne pas commetre : ce module n'est pas $V/2 = 1/4$. Il faut, pour le calculer, utiliser la formule de composition des vitesses en Relativité. Posons

$$V = \frac{1}{2} = \tanh(2\eta) = \frac{\exp(2\eta) - \exp(-2\eta)}{\exp(2\eta) + \exp(-2\eta)}\,.$$

Le calcul donne :

$$\exp(2\eta) = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}} = \sqrt{3}\,, \quad \exp\eta = \sqrt{\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}} = \sqrt{\sqrt{3}}.$$

Le module que nous cherchons est alors

$$W = \tanh\eta = \frac{\sqrt{1+V} - \sqrt{1-V}}{\sqrt{1+V} + \sqrt{1-V}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 0,26794\ldots.$$

Au passage, je calcule $\cosh(2\eta)$, $\sinh(2\eta)$, $\cosh\eta$ et $\sinh\eta$ dont j'aurai bientôt besoin :

$$\cosh(2\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547\ldots, \quad \sinh(2\eta) = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735\ldots.$$

$$\cosh\eta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}}+\sqrt{\sqrt{\frac{1-V}{1+V}}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{\sqrt{3}}} = 1,0380\ldots\,,$$
$$\sinh\eta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}}-\sqrt{\sqrt{\frac{1-V}{1+V}}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{\sqrt{3}}} = 0,27812\ldots\,.$$

Les formules de changement de coordonnées entre (t,x) et (t',x') sont :

$$t' = cosh\eta t - \sinh\eta x\,,\qquad x' = -\sinh\eta t + \cosh\eta x\,,$$

qui s'inversent en

$$t = cosh\eta t' + \sinh\eta x'\,,\qquad x = \sinh\eta t' + \cosh\eta x'\,.$$

De même, les formules de changement de coordonnées entre (t'',x'') et (t,x), et leurs inverses, s'écrivent :

$$t = cosh\eta t'' - \sinh\eta x''\,,\qquad x = -\sinh\eta t'' + \cosh\eta x''\,,$$

qui s'inversent en

$$t'' = cosh\eta t + \sinh\eta x\,,\qquad x'' = \sinh\eta t + \cosh\eta x\,.$$

De même pour les formules de changement de coordonnées entre $(t',x'))$ et (t'',x'') et leurs inverses, η étant bien entendu remplacé par 2η :

$$t'' = cosh(2\eta)t' + \sinh(2\eta)x'\,,\qquad x'' = \sinh(2\eta)t' + \cosh(2\eta)x'\,,$$

qui s'inversent en

$$t' = cosh(2\eta)t'' - \sinh(2\eta)x''\,,\qquad x' = \sinh(2\eta)t'' + \cosh(2\eta)x''\,.$$

J'appelle A la proue et B la poupe du vaisseau de gauche, C la proue et D la poupe du vaisseau de droite. Quelles sont leur nature ? Ce ne sont pas des événements. Dans la schématisation employée, où l'Espace-Temps a deux dimenions, ce sont des “points matériels”, qui existent dans la durée, jusqu'à la collision (suivie, je suppose, de la destruction des deux vaisseaux). Dans l'Espace-Temps, A et B sont des parties de droites isochores du référentiel dans lequel le vaisseau de gauche est au repos : ce sont les lignes d'univers, respectivement, de la proue et de la poupe de ce vaisseau. De même, C et D sont des parties de droites isochores du référentiel dans lequel le vaisseau de droite est au repos : ce sont les lignes d'univers, respectivement, de la proue et de la poupe de ce vaisseau. Si l'on suppose les deux vaisseaux détruits par la collision, il faut bien entendu interrompre A et C à l'événement collision, où elles se coupent, qui a été choisi pour origine O. Quant aux lignes d'univers B et D des poupes des deux vaisseaux, il convient de les interrompre un peu plus tard : je supposerai que la catastrophe se propage dans chaque vaisseau de la proue vers la poupe à la vitesse de la lumière, j'interromprai donc les lignes B et D en l'évènement où elles coupent le signal lumineux parti de O se propageant vers le futur, respectivement vers la gauche et vers la droite.

Les équations qui déterminent les lignes d'univers A et B ont leur expression la plus simple dans le système de coordonnées (t',x'). Elles s'écrivent, respectivement,

$$\text{pour } A\,,\ x' = 0\,,\quad \text{et pour } B\,,\ x' = -L\,.$$

Les formules de changement de coordonnées indiquées ci-dessus permettent d'en déduire l'expression de ces équations dans les deux autre systèmes de coordonnées employés. Dans le système de coordonnées (t,x)

$$\text{pour } A\,,\ x\cosh\eta - t\sinh\eta = 0\,,\quad \text{et pour } B\,,\ x\cosh\eta - t\sinh\eta = -L\,,$$

et dans le système de coordonnées (t'',x'') :

$$\text{pour } A\,,\ x''\cosh(2\eta) - t''\sinh(2\eta) = 0\,,\quad \text{et pour } B\,,\ x''\cosh(2\eta) - t''\sinh(2\eta) = -L\,.$$

Les coordonnées du point où A s'interromp en raison de la collision, dans les trois systèmes de coordonnées empoyés, sont :

$$(x' = 0,\ t' = 0)\,,\quad (x = 0,\ t = 0)\,,\quad (x'' = 0,\ t'' = 0)\,.$$

Les coordonnées de l'événement où B s'interromp sont celles de l'intersection de la droite qui porte B avec la droite de lumière issue de l'origine O, se propageant vers la gauche. L'équation de cette droite de lumière, dans les trois systèmes de coordonnées, est

$$t' + x' = 0\,, \quad t + x = 0\,, \quad t'' + x'' = 0\,.$$

On obtient donc, pour les coordonnées de cet événement dans le trois systèmes,

$$t' = -x' = L,\,, \quad t = -x = L(\cosh\eta - \sinh\eta)\,, \quad t'' = -x'' = L(\cosh(2\eta) - \sinh(2\eta))\,.$$

J'ai tenu compte de l'identité

$$\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1\,, \qquad \text{qui s'écrit aussi} \qquad \frac{1}{\cosh\eta + \sinh\eta} = \cosh\eta - \sinh\eta\,.$$

De même, les équations qui déterminent les lignes d'univers C et D ont leur expression la plus simple dans le système de coordonnées (t'', x''). Elles s'écrivent, respectivement,

$$\text{pour } C\,,\ x'' = 0\,, \quad \text{et pour } D\,,\ x'' = L\,.$$

Les formules de changement de coordonnées indiquées ci-dessus permettent d'en déduire l'expression de ces équations dans les deux autre systèmes de coordonnées employés. Dans le système de coordonnées (t, x)

$$\text{pour } C\,,\ x\cosh\eta + t\sinh\eta = 0\,, \quad \text{et pour } D\,,\ x\cosh\eta + t\sinh\eta = -L\,,$$

et dans le système de coordonnées (t', x') :

$$\text{pour } C\,,\ x'\cosh(2\eta) + t'\sinh(2\eta) = 0\,, \quad \text{et pour } D\,,\ x'\cosh(2\eta) + t'\sinh(2\eta) = L\,.$$

Comme A, C s'interromp à l'origine en raison de la collision. Les coordonnées de cet événement, dans les trois systèmes de coordonnées empoyés, sont :

$$(x' = 0,\ t' = 0)\,, \quad (x = 0,\ t = 0)\,, \quad (x'' = 0,\ t'' = 0)\,.$$

Les coordonnées de l'événement où D s'interromp sont celles de l'intersection de la droite qui porte D avec la droite de lumière issue de l'origine O, se propageant vers la droite. L'équation de cette droite de lumière, dans les trois systèmes de coordonnées, est

$$t' - x' = 0\,, \quad t - x = 0\,, \quad t'' - x'' = 0\,.$$

On obtient donc, pour les coordonnées de cet événement dans le trois systèmes,

$$t = x = L(\cosh\eta - \sinh\eta)\,, \quad t' = x' = L(\cosh(2\eta) - \sinh(2\eta))\,, \quad t'' = x'' = L,\,.$$

J'ai maintenant tout ce qu'il faut pour tracer un diagramme espace-temps. Sur les figures qui suivent, je l'ai fait de trois manières différentes, en privilégiant successivement chacun des trois systèmes de coordonnées employées. Outre les lignes d'univers de A, B, C et D, j'ai aussi tracé l'isochrone 0 de chacun des trois systèmes, c'est-à-dire les axes de coordonnées Ox, Ox' et Ox''. L'axe Ot' coïncide avec la ligne d'univers de A, et l'axe Ot'' avec la ligne d'univers de C. J'ai aussi tracé l'axe Ox. De plus, j'ai tracé en rouge les positions du vaisseau de gauche et en bleu celles du vaisseau de droite, pour quelques valeurs du temps. Il s'agit, bien sûr, du temps propre de chaque vaisseau ; les segments de droite rouges, représentant les positions du vaissreau de gauche à divers instants, sont donc parallèles à l'axe Ox' et les segments de droite bleus, qui représentent les positions du vaisseau de droite, parallèles à l'axe Ox''. Enfin, j'ai tracé en vert les lignes d'univers de signaux lumineux passant par l'origine.

À première vue, sur la figure 1, les deux vaisseaux semblent jouer des rôles différents. Mais ce n'est qu'une illusion due à la représentation choisie, puisque sur cette figure, les axes Ox' et Ot' sont orthogonaux (au sens usuel), alors que les axes Ox'' et Ot'' ne le sont pas. L'orthogonalité euclidienne est une propriété de la feuille de papier sur laquelle sont dessinées les figures (ou de l'écran d'ordinateur sur lequel elles sont affichées) et non une propriété de l'Espace-Temps. D'ailleurs, dans la figure 3 où c'est le référentiel du vaisseau de droite qui est privilégié, ce sont les axes Ox'' et Ot'' qui sont orthogonaux, alors que Ox' et Ot' ne le sont pas, et la figure 2 montre clairement que les deux vaisseaux jouent des rôles symétriques.

Il importe de bien comprendre que les figures 1, 2 et 3 sont identiques pour tout ce qui concerne les propriétés de l'Espace-Temps,car elles représentent le même phénomène se déroulant dans l'Espace-Temps. Leurs différences apparentes ne proviennent quer des conventions différentes faites pour les dessiner. Elles se déduisent l'une de l'autre par une transformation affine. Je rappelle que les transformations affines conservent la notion de droite, le parallélisme et les rapports de longueurs de segments de droite portés par des droites parallèles. Par contre le rapport de longueurs de deux segments de droite portés par des droites non parallèles, qui est une notion de géométrie euclidienne usuelle, n'est évidemment pas conservé.

Plus précisément, les transformations qui font passer d'une de ces figures à une autre sont des transformations affines bien particulières, les *transformations de Lorentz*. On remarque d'ailleurs que dans ces trois figure, les droites de lumière (en vert) ont la même direction, elles sont inclinées à un angle $\pi/4$ par rapport à l'horizontale et la verticale de la feille de papier portant la figure. Je me propose de présenter ultérieurement une étude plus détaillée des transformations de Lorentz, dont la vraie nature (sont-elles des transformations de l'Espace-Temps ? ou des transformations entre divers systèmes de coordonnées dans l'espace-temps ? ou les deux ?) est souvent mal comprise.

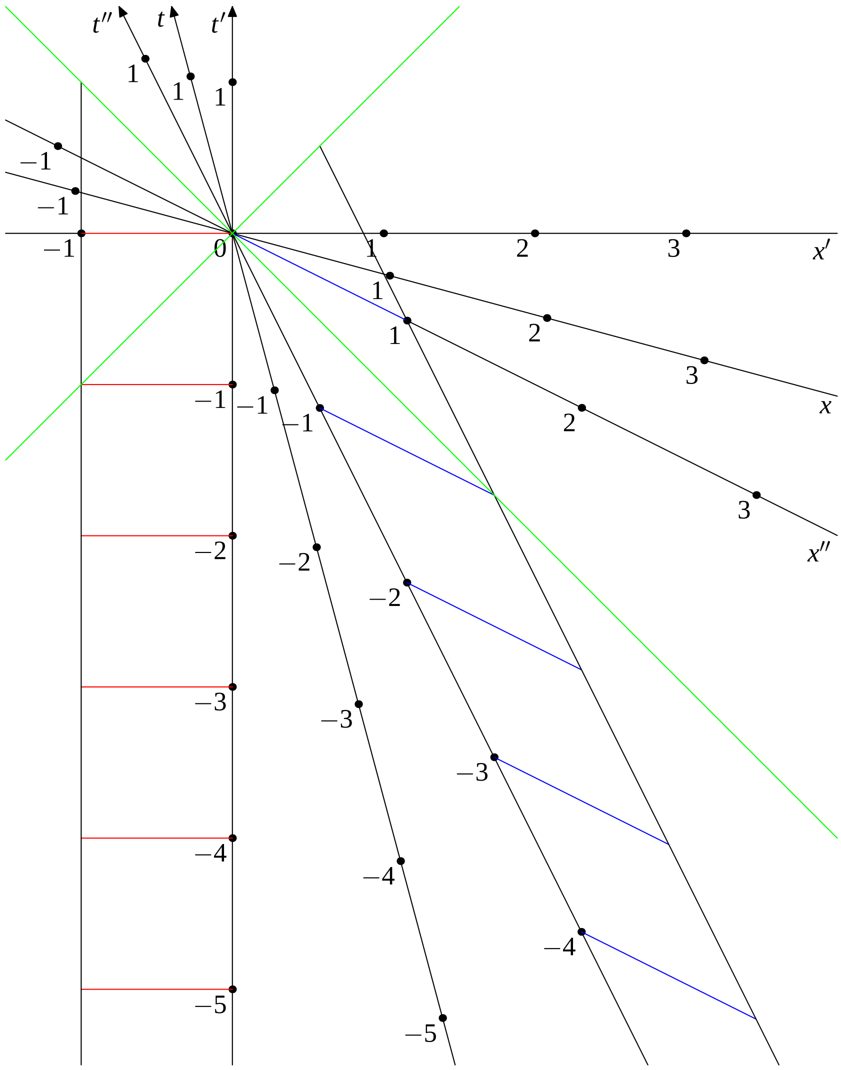

FIG. 1. Diagramme Espace-Temps privilégiant le référentiel du vaisseau de gauche.

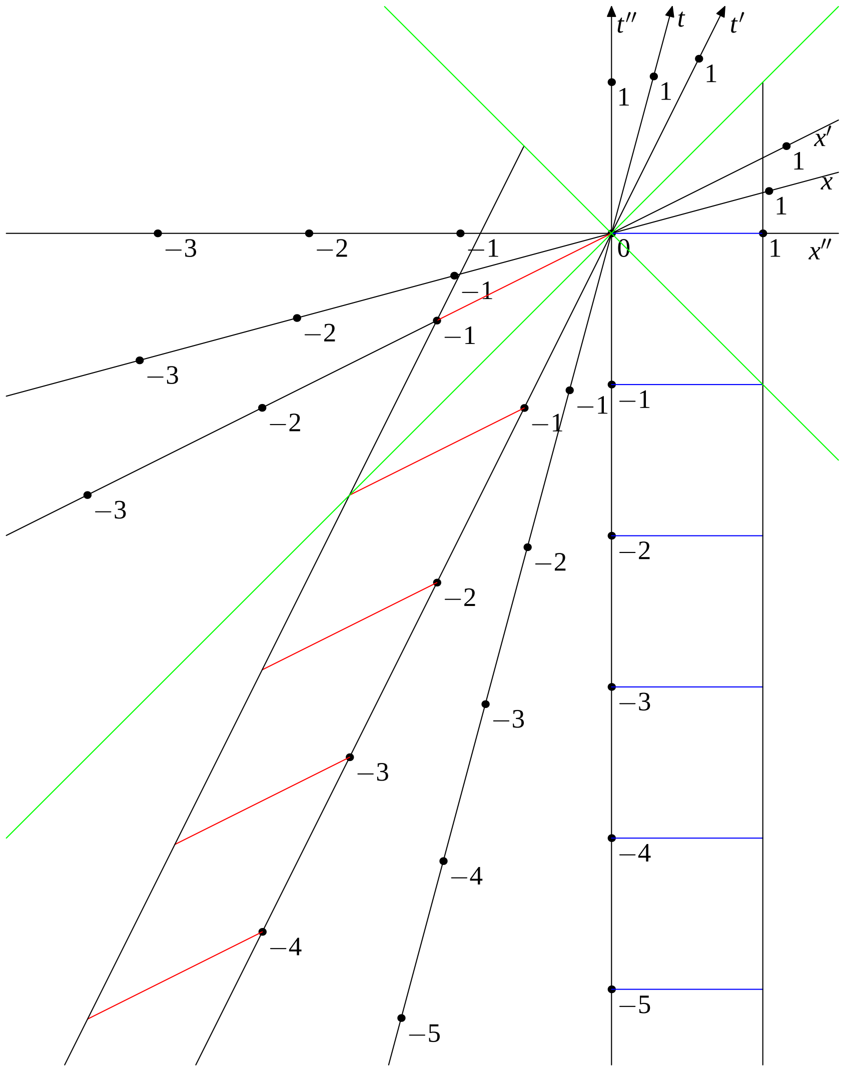

FIG. 2. Diagramme Espace-Temps privilégiant le référentiel du vaisseau de droite.

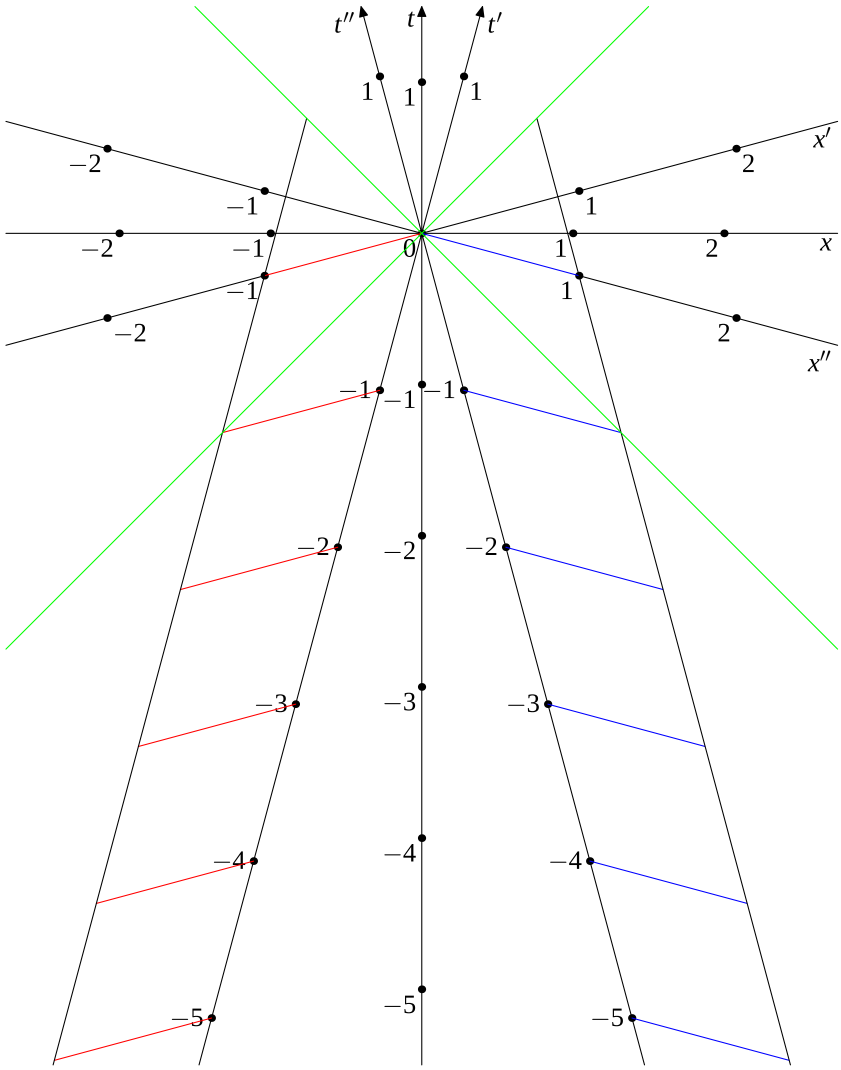

FIG. 3. Diagramme Espace-Temps privilégiant le référentiel dans lequel les deux vaisseaux ont des vitesses opposées.

RÉFÉRENCES

1. Marle, Charles-Michel, *La Relativité restreinte expliquée aux enfants (de 7 à 107 ans)*.