Les équations de Maxwell

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

2 décembre 2009

1 Introduction

Je vais dans ce document étudier comment les équations de Maxwell se transforment lors d'un changement de repère galiléen.

2 Les équations de Maxwell en Physique classique

2.1 Les grandeurs qui interviennent

2.1.1 L'Espace et le Temps en physique classique. En Physique classique l'Espace et le Temps sont deux concepts quasi-indépendants. Une fois choisis un référentiel galiléen et une unité de longueur, l'Espace est schématisé par un espace affine euclidien de dimension 3. Le Temps est schématisé par un espace affine de dimension 1, et une fois choisie une unité de temps, les durées, c'est-à-dire les intervalles de temps, peuvent être représentées par des nombres réels. Nous supposerons de plus que des orientations de l'Espace et du Temps ont été choisies. Usuellement, l'orientation choisie pour le Temps est celle qui va du passé vers le futur, et celle choisie pour l'Espace est celle pour laquelle un repère affine $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est d'orientation positive si lorsqu'on est allongé le long du vecteur $\overrightarrow{e_3}$, avec la tête du côté vers lequel pointe ce vecteur, on voit le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ pointer vers la gauche du vecteur $\overrightarrow{e_1}$.

2.1.2 Les grandeurs rencontrées en électromagnétisme. Les équations de Maxwell font intervenir les grandeurs suivantes :
- le champ électrique $\overrightarrow{E}$,
- l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$,
- la densité de flux électrique $\overrightarrow{D}$,
- le champ magnétique $\overrightarrow{H}$,
- la densité de courant électrique $\overrightarrow{j}$,
- la densité de charge électrique ρ.

Pour commencer[1] nous adopterons le point de vue des praticiens de la Physique qui considèrent $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{j}$ comme des champs de vecteurs de l'espace, pouvant varier au cours du temps, et ρ comme une grandeur scalaire dont la valeur peut varier en fonction du point de l'espace considéré et du temps.

2.2 Forme intégrale des équations de Maxwell Dans ce paragraphe, A est une surface régulière bornée, immobile dans le référentiel galiléen considéré, dont le bord est une courbe régulière fermée C ; Σ est une surface régulière fermée, formant le bord d'un volume borné V, lui aussi immobile dans le référentiel galiléen considéré.

Les deux premières équations de Maxwell, dites de *Maxwell-Faraday* et de *Maxwell-Thomson*, font intervenir les champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, tandis que les deux dernières, dites de *Maxwell-Ampère* et de *Maxwell-Gauss*, font intervenir $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{j}$ et ρ.

2.2.1 L'équation de Maxwell-Faraday. La forme intégrale de l'*équation de Maxwell-Faraday* exprime l'égalité de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ le long de la courbe C et de l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$ à travers la surface A :

$$\int_C \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{\sigma}\,.$$

Dans cette équation, $d\overrightarrow{l}$ est, en chaque point de C, le vecteur élément de longueur d'arc tangent en ce point à la courbe C, et $d\overrightarrow{\sigma}$ est, en chaque point de A, le vecteur élément d'aire normal en ce point à la surface A.

2.2.2 L'équation de Maxwell-Thomson. La forme intégrale de l'*équation de Maxwell-Thomson* exprime la nullité du flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$ à travers la surface fermée Σ :

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{\sigma} = 0\,.$$

Comme ci-dessus, $d\overrightarrow{\sigma}$ est, en chaque point de Σ, le vecteur élément d'aire normal en ce point à la surface Σ.

2.2.3 L'équation de Maxwell-Ampère. La forme intégrale de l'*équation de Maxwell-Ampère* exprime l'égalité de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{H}$ le long de la courbe C et du flux à travers A du champ de vecteurs $\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}$:

$$\int_C \overrightarrow{H}.d\overrightarrow{l} = \iint_A \left(\overrightarrow{j} + \frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}\right).d\overrightarrow{\sigma}\,.$$

[1]Nous verrons plus tard qu'il est préférable de considérer $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ comme des formes différentielles de degré 1, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{j}$ comme des formes différentielles de degré 2 sur l'Espace, pouvant dépendre aussi du temps.

2.2.4 *L'équation de Maxwell-Gauss.* La forme intégrale de l'*équation de Maxwell-Gauss* exprime l'égalité de de la charge électrique contenue dans le volume V et du flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{D}$ à travers Σ.

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{D}.d\overrightarrow{\sigma} = \iiint_{V} \rho\, dv\,,$$

où dv est l'élément de volume.

2.2.5 *Les relations phénoménologiques.* La densité de flux électrique $\overrightarrow{D}$ est généralement considérée comme fonction du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et des propriétés locales du milieu. Dans un milieu isotrope, on écrit souvent

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E}\,,$$

où le coefficient ε, appelé *permittivité diélectrique*, caractérise les propriétés diélectriques locales du milieu. En particulier, le vide est un milieu isotrope dont la permittivité électrique est notée ε_0.

De même, le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ est généralement considéré comme fonction de l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ et des propriétés locales du milieu. Dans un milieu isotrope, on écrit généralement[2]

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H}\,,$$

où le coefficient μ, appelé *perméabilité magnétique*, caractérise les propriétés magnétiques locales du milieu. En particulier, le vide est un milieu isotrope dont la perméabilité magnétique est notée μ_0.

2.3 Forme locale des équations de Maxwell. Les théorèmes de Gauss et d'Ostrogradsky montrent que les formes intégrales des équations de Maxwell indiquées ci-dessus sont équivalentes aux équations aux dérivées partielles suivantes. Les deux premières, qui font intervenir $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, s'écrivent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\,, & \text{(équation de Maxwell-Faraday),} \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \quad \text{(équation de Maxwell-Thomson).} \end{cases}$$

Les deux dernières équations de Maxwell, qui font intervenir $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{j}$ et ρ, s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \dfrac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}\,, & \text{(équation de Maxwell-Ampère),} \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{D} = \rho\,, \quad \text{(équation de Maxwell-Gauss).} \end{cases}$$

[2]Assez curieusement, pour des raisons historiques, on exprime $\overrightarrow{B}$ en fonction de $\overrightarrow{H}$. Il eût été plus naturel d'exprimer $\overrightarrow{H}$ en fonction de $\overrightarrow{B}$ qui a, me semble-t-il, un caractère plus fondamental.

2.4 Les équations de Maxwell dans le vide et l'équation des ondes. Dans le vide $\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H} = (1/\mu_0)\overrightarrow{B}$, tandis que $\overrightarrow{j}$ et ρ sont nuls. On peut donc exprimer les équations de Maxwell en ne faisant intervenir que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0\,. \end{cases}$$

Rappelons la formule, applicable à tout champ de vecteurs suffisamment régulier $\overrightarrow{W}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\overrightarrow{W}) - \Delta\overrightarrow{W}\,,$$

où Δ est l'opérateur laplacien. En prenant le rotationnel des deux membre de la première et de la troisième équation de Maxwell, en remarquant que les opérateurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ commutent, et en tenant compte de la seconde et de la quatrième équation de Maxwell, on obtient

$$\begin{cases} \Delta\overrightarrow{E} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\,, \\ \Delta\overrightarrow{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}\,. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que dans le vide $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ obéissent à une même équation aux dérivées partielles du second ordre, qui n'est autre que l'*équation des ondes*. On pose

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2\,.$$

L'expérience montre que la constante c ainsi définie, homogène à une vitesse, n'est autre que la vitesse de la lumière dans le vide.

Les propriétés mathématiques de l'équation des ondes montrent qu'une petite perturbation de $\overrightarrow{E}$ ou de $\overrightarrow{B}$, qui aurait lieu en un point particulier de l'espace et à un instant particulier, se propage, dans toutes les directions, à une vitesse (relativement au repère dans lequel $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ obéissent aux équations ci-dessus) dont le module est égal à c.

2.5 Effet d'un changement de référentiel galiléen. Notons $\mathcal{R}$ le référentiel galiléen dans lequel les équations de Maxwell sont valides, et soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel galiléen, dont la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ est $\overrightarrow{u}$. Choisissons de manière quelconque une origine du temps. Soit $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ un repère affine orthonormé d'orientation positive attaché au référentiel $\mathcal{R}$, et $(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le repère affine orthonormé attaché au référentiel $\mathcal{R}'$ dont les vecteurs de base sont équipollents à ceux de $\mathcal{R}$ et dont l'origine O' coïncide avec l'origine O de $\mathcal{R}$ à l'intant $t = 0$. Notons (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées d'espace, repectivement dans le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et dans le repère $(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Les formules de changement de coordonnées d'espace et de temps 's'écrivent

$$x' = x - u_x t\,, \quad y' = y - u_y t\,, \quad z' = z - u_z t\,, \quad t' = t\,,$$

où u_x, u_y, u_z sont les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

En utilisant ces formules on vérifie aisément que les opérateurs gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$, divergence div, rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}$, et plus généralement tous les opérateurs différentiels ne faisant intervenir que les dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace, sont les mêmes dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Par contre l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ de dérivation partielle par rapport au temps n'est pas le même dans ces deux référentiels : dans le référentiel $\mathcal{R}$, cette dérivée partielle doit être prise à (x,y,z) constants, tandis que dans $\mathcal{R}'$ elle doit être prise à (x',y',z') constants. Convenons de noter $\dfrac{\partial}{\partial t}$ l'opérateur de dérivation partielle par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$, et $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)'$ l'opérateur de dérivation partielle par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La relation entre ces deux opérateurs, lorsqu'ils sont appliqués à une fonction scalaire f, est

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)' f = \frac{\partial}{\partial t} f + \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}} f\,.$$

De même, lorsque ces opérateurs sont appliqués à un champ de vecteurs $\overrightarrow{W}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)' (\overrightarrow{W}) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{W}) + \overrightarrow{u}\,.\,\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}\,.$$

Nous avons noté $\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}$ le champ de tenseurs euclidiens de rang 2, gradient du champ de vecteurs $\overrightarrow{W}$. Rappelons que ses composantes sont

$$\left(\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}\right)_{ij} = \frac{\partial W_j}{\partial x_i}\,, \quad \text{avec} \quad 1 \leq i,j \leq 3\,,$$

en convenant que l'indice 1 correspond à x, 2 à y et 3 à z. La notation $\overrightarrow{u}\,.\,\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}$ désigne le produit contracté du champ de vecteurs (constant) $\overrightarrow{u}$ avec le champ de tenseurs $\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}$; rappelons que c'est un champ de vecteurs dont la j-ème composante est

$$\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overline{\overline{\text{Grad}}}\overrightarrow{W}\right)_j = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i}\,.$$

Avec les notations précisées ci-dessus, les équations de Maxwell prennent, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la forme

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)' \overrightarrow{B} + \overrightarrow{u}\,.\,\overline{\overline{\text{Grad}}}\,\overrightarrow{B}\,, \\ \text{div}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \varepsilon_0\mu_0\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)' \overrightarrow{E} - \overrightarrow{u}\,.\,\overline{\overline{\text{Grad}}}\,\overrightarrow{E}\right)\,, \\ \text{div}\,\overrightarrow{E} = 0\,. \end{cases}$$

Manifestement, écrites dans le référentiel $\mathcal{R}'$, ces équations n'ont pas la même forme que dans le référentiel $\mathcal{R}$. Cela n'a rien de surprenant puisque $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, ainsi que toute combinaison linéaire à coefficients constants de ces deux champs de vecteurs, vérifient, dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'équation des ondes, qui prévoit la propagation des perturbations à une vitesse (par rapport au référentiel $\mathcal{R}$) de module c, dans toutes les directions. Écrite dans le référentiel $\mathcal{R}'$, en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport à $\mathcal{R}$, cette équation ne saurait garder la même forme que dans le référentiel $\mathcal{R}$ puisqu'elle prévoit la propagation des perturbations à une vitesse (par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$) fonction de la direction : par exemple $c - \|\overrightarrow{u}\|$ dans la direction de $\overrightarrow{u}$ et $c + \|\overrightarrow{u}\|$ dans la direction opposée.

2.5.1 Le courant de déplacement. On appelle ainsi le terme

$$\frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{ou, dans le vide,} \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

présent au membre de droite de l'équation de Maxwell-Ampère. Ce terme, dû à une intuition géniale de Maxwell, est très important pour assurer la cohérence de la théorie électromagnétique. On vérifie par exemple que si on le néglige, et si la densité de courant électrique $\overrightarrow{j}$ et la densité de charge électrique ρ ne sont pas identiquement nuls, les équations ainsi simplifiées n'assurent pas la conservation de la charge électrique, ce qui est physiquement inadmissible.

Cependant les équations de Maxwell dans le vide simplifiées en négligeant ce terme ont une propriété intéressante : en Physique classique, elles gardent la même forme dant tous les référentiels galiléens, si toutefois on accepte de considérer le champ électique $\overrightarrow{E}$ comme dépendant du référentiel utilisé. Ces équations simplifiées s'écrivent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, ces équations deviennent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)'\overrightarrow{B} + \overrightarrow{u}\,.\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{B}\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = 0\,, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0\,. \end{cases} \tag{$**$}$$

La première équation comporte, au membre de droite, le terme $\overrightarrow{u}\,.\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{B}$, que nous allons faire passer dans le membre de gauche et grouper avec le terme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$. La force qui s'exerce sur une particule de charge q, en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, donc immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$, en présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'une induction magnétique $\overrightarrow{B}$, appelée *force de Lorentz*, a pour expression

$$q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B})\,,$$

où le signe $\times$ désigne le produit vectoriel. Cette expression permet de penser que le champ électrique perçu par la charge q, immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$, est non pas $\overrightarrow{E}$, mais $\overrightarrow{E} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}$. Posons donc

$$\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}\,, \quad \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}\,. \tag{$***$}$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}' = \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = 0$$

puisque $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}$ sont nuls, et que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} + \left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}\,.\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{u}\,.\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\,\overrightarrow{B}$$

puisque div $\overrightarrow{B}$ est nul. Tout ceci prouvent que dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les équations $(**)$ ci-dessus s'écrivent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\,' = -\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)'\overrightarrow{B}\,', \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}\,' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\,' = 0, \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\,' = 0. \end{cases} \tag{$****$}$$

On voit qu'elles ont exactement la même forme que les équations $(*)$, $\overrightarrow{E}$ étant remplacé par $\overrightarrow{E}\,'$, $\overrightarrow{B}$ par $\overrightarrow{B}\,'$ et l'opérateur de dérivation partielle par rapport au temps $\dfrac{\partial}{\partial t}$ du référentiel $\mathcal{R}$ par l'opérateur correspondant $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)'$ du référentiel $\mathcal{R}'$. Les équations de Maxwell dans le vide, simplifiés par l'abandon du courant de déplacement, sont donc invariantes par changement de référentiel galiléen, si l'on admet que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ dépend du référentiel considéré comme indiqué dans les équations $(***)$ tandis que l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ n'en dépend pas. Mais insistons encore sur le fait que le courant de déplacement est un des ingrédients essentiels des équations de Maxwell. C'est pourquoi la portée réelle de cette invariance galiléenne des équations simplifiées me paraît très limitée.

Il serait vain de chercher à rendre les équations de Maxwell dans le vide complètes, sans rien négliger, invariantes par changement de référentiel galiléen, par exemple en supposant que comme le champ électrique $\overrightarrow{E}$, l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ dépend du référentiel. Une telle tentative est vouée à l'échec puisque l'équation des ondes, conséquence des équations de Maxwell dans le vide, n'est manifestement pas invariante par changement de référentiel galiléen.

2.6 Nature mathématique des grandeurs intervenant en électromagnétisme. Jusqu'à présent nous avons considéré $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{j}$ comme des champs de vecteurs, et ρ comme un scalaire dépendant de la position d'espace et du temps. C'est ce que font les ingénieurs praticiens, sans doute parce que l'enseignement qu'ils ont reçu ne les a pas familiarisés avec le calcul différentiel extérieur. Nous allons voir qu'il est bien plus naturel de remplacer tous ces champs de vecteurs par des formes différentielles. La nouvelle formulation des équations de l'électromagnétisme que nous obtiendrons, parfaitement équivalente à celle utilisant des champs de vecteurs, a l'avantage de faciliter considérablement l'étude de l'invariance de ces équations par des transformation autres que les changements de référentiels galiléens. Nous pourrons ensuite revenir à la formulation utilisant des champs de vecteurs et voir comment ceux-ci se transforment.

Dans les équations de Maxwell sous forme intégrale, les champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{j}$ interviennent de deux façons très différentes :

- le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{H}$ apparaissent sous forme de produit scalaire avec un vecteur élément de longueur $\overrightarrow{l}$, ce produit étant intégré le long d'une courbe ;
- l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$, la densité de flux électrique $\overrightarrow{D}$ et la densité de courant électrique $\overrightarrow{j}$ interviennent sous forme de produit scalaire avec un vecteur élément d'aire $\overrightarrow{d\sigma}$, normal à une surface à bord A ou fermée Σ, ce produit scalaire étant intégré sur ladite surface.

Quant à densité de charge électrique ρ, elle intervient sous forme de produit avec un élément de volume dv, ce produit étant intégré dans un volume borné V.

Ces observations conduisent à considérer les formes différentielles de degré 1 $\widetilde{E} = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$ et $\widetilde{H} = \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl}$, et les formes différentielles de degré 2 $\widetilde{B} = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\sigma}$, $\widetilde{D} = \overrightarrow{D}.\overrightarrow{d\sigma}$, $\widetilde{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{d\sigma}$ comme les objets mathématiques les mieux adaptés pour décrire les champs rencontrés en électromagnétisme. Ainsi, le produit scalaire (qui fait intervenir la structure métrique de l'espace, qui n'a aucune raison de jouer un rôle dans la définition des grandeurs électromagnétiques) n'intervient plus dans ces définitions. De même il semble plus naturel d'utiliser la forme différentielle de degré 3 $\widetilde{\rho} = \rho dv$ plutôt que la grandeur scalaire ρ pour décrire la densité de charge électrique.

Dans un repère orthonormé attaché au référentiel considéré, les coordonnées correspondantes étant notées x, y et z, l'expression de ces formes différentielles est, pour les formes de degré 0 et 1,

$$\begin{cases} \widetilde{\rho} = \rho\, dv = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz\,, \\ \widetilde{E} = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz\,, \\ \widetilde{H} = \overrightarrow{H}.\overrightarrow{dl} = H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz\,. \end{cases}$$

Pour les formes de degré 2

$$\begin{cases} \widetilde{B} = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{d\sigma} = B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy\,, \\ \widetilde{D} = \overrightarrow{D}.\overrightarrow{d\sigma} = D_x\, dy \wedge dz + D_y\, dz \wedge dx + D_z\, dx \wedge dy\,, \\ \widetilde{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{d\sigma} = j_x\, dy \wedge dz + j_y\, dz \wedge dx + j_z\, dx \wedge dy\,. \end{cases}$$

Nous avons noté E_x, E_y et E_z les composantes de $\overrightarrow{E}$ sur les vecteurs de base $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$ et $\overrightarrow{e}_z$, et fait de même pour les autres champs de vecteurs.

Puisque les coefficients qui figurent dans les expressions ci-dessus dépendent à la fois des coordonnées d'espace x, y, z et du temps t, nous devons considérer $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{H}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{D}$ et $\widetilde{j}$ comme des formes différentielles sur l'espace-temps. Remarquons que ces formes ne contiennent pas de terme en dt.

2.7 Une nouvelle écriture des équations de Maxwell

2.7.1 Équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Thomson La différentielle extérieure de la 1-forme $\widetilde{E}$ a pour expression

$$\begin{aligned} d\widetilde{E} = & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ & + \frac{\partial E_x}{\partial t} dt \wedge dx + \frac{\partial E_y}{\partial t} dt \wedge dy + \frac{\partial E_z}{\partial t} dt \wedge dz\,. \end{aligned}$$

Quant à la différentielle extérieure de la 2-forme $\widetilde{B}$, elle a pour expression

$$\begin{aligned} d\widetilde{B} = & \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ & + \frac{\partial B_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial B_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy\,. \end{aligned}$$

Ces différentielles extérieures peuvent, avec des conventions évidentes concernant les notations, s'écrire

$$d\widetilde{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}.d\overrightarrow{\sigma} + dt \wedge \left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.d\overrightarrow{l} \right),$$

$$d\widetilde{B} = (div\,\overrightarrow{B})\,dv + dt \wedge \left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}.d\overrightarrow{\sigma} \right).$$

Nous en déduisons (en tenant compte de $dt \wedge dt = 0$ et de $d\overrightarrow{\sigma} \wedge dt = dt \wedge d\overrightarrow{\sigma}$)

$$d(\widetilde{E} \wedge dt + \widetilde{B}) = \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \right).d\overrightarrow{\sigma} \wedge dt + \left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} \right) dv.$$

Posons donc

$$\widetilde{F} = \widetilde{E} \wedge dt + \widetilde{B}.$$

Nous voyons que $d\widetilde{F} = 0$ si et seulement si on a simultanément $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} + \dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0$ et $\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0$. Ainsi, les deux premières équations de Maxwell, c'est-à-dire l'équation de Maxwell-Faraday et l'équation de Maxwell-Thomson, lorsqu'on les formule au moyen de $\widetilde{F}$, se regroupent pour s'écrire tout simplement

$$d\widetilde{F} = 0.$$

2.7.2 Équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Gauss De même, nous avons

$$d\widetilde{H} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{H}.d\overrightarrow{\sigma} + dt \wedge \left(\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t}.d\overrightarrow{l} \right),$$

$$d\widetilde{D} = (div\,\overrightarrow{D})\,dv + dt \wedge \left(\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}.d\overrightarrow{\sigma} \right).$$

Par suite

$$d(\widetilde{D} - \widetilde{H} \wedge dt) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{H} - \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \right).d\overrightarrow{\sigma} \wedge dt + \left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{D} \right) dv.$$

Posons donc

$$\widetilde{G} = \widetilde{D} - \widetilde{H} \wedge dt.$$

Nous voyons que les deux dernières équations de Maxwell, c'est-à-dire l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Gauss, formulées au moyen de $\widetilde{G}$, $\widetilde{\rho}$ et $\widetilde{j}$, se regroupent pour s'écrire tout simplement

$$d\widetilde{G} = \widetilde{\rho} - \widetilde{j} \wedge dt.$$

2.7.3 Équations phénoménologique Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 2.2, on admet généralement que $\overrightarrow{D}$ est fonction de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ fonction de $\overrightarrow{H}$. Si nous utilisons les formes différentielles $\widetilde{E}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{D}$ et $\widetilde{H}$ à la place des champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{H}$, nous sommes amenés à considérer que $\widetilde{D}$ est fonction de $\widetilde{E}$ et $\widetilde{B}$ fonction de $\widetilde{H}$.

Nous nous contenterons d'écrire ces relations pour un champ électromagnétique dans le vide. Dans le paragraphe 2.4, nous avions écrit de simples relations de proportionnalité

$\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$. Avec des formes différentielles au lieu de champs de vecteurs, les choses se compliquent un peu parce que $\widetilde{E}$ et $\widetilde{D}$ ne sont pas de même nature : la première est une forme de degré 1, la seconde une forme de degré 2 ; écrire que l'une est le produit de l'autre par un scalaire n'aurait pas de sens. La même difficulté se rencontre pour $\widetilde{B}$ et $\widetilde{H}$.

En traduisant en termes de formes différentielles ce qui a été fait pour les champs de vecteurs, nous sommes amenés à établir une correspondance, notée $*$, entre les formes de degré 1 et les formes de degré 2, sur l'espace physique de dimension 3. Cette correspondance est donnée par les formules, dans lesquelles x, y et z sont les fonctions coordonnées dans un repère orthonormé d'orientation positive,

$$*dx = dy \wedge dz\,, \quad *dy = dz \wedge dx\,, \quad *dz = dx \wedge dy\,.$$

Cette correspondance, qui suppose l'espace muni d'une structure riemannienne et d'une orientation, est connue en mathématiques sous le nom d'*opérateur de Hodge*, en hommage au mathématicien écossais W.V.D. Hodge (1903–1975).

Nous écrirons donc

$$\widetilde{D} = \varepsilon_0 * \widetilde{E}\,, \quad \widetilde{B} = \mu_0 * \widetilde{H}\,.$$

3 Les équations de Maxwell en Physique relativiste

3.1 L'Espace et le Temps en Physique relativiste En Physique relativiste l'Espace et le Temps ne sont plus deux concepts séparés, ils se fondent en un Espace-temps de dimension 4, muni (une fois choisie l'unité de temps, ou l'unité de longueur) d'une métrique pseudo-riemannienne de signature $(+,-,-,-)$. Il n'y a pas lieu de choisir séparément l'unité de temps T et l'unité de longueur L, car l'une détermine l'autre : si par exemple l'unité de temps est l'année, cela détermine l'année-lumière comme unité de longueur. Cependant, pour respecter l'usage établi, nous supposerons les unités de temps et de longueur choisies indépendamment l'une de l'autre, et nous introduirons la constante universelle $c = L/T$, vitesse de la lumière dans le vide.

3.2 Les équations de Maxwell Ainsi que nous l'avons dit au paragraphe 2.6, les formes différentielles que nous avons utilisées pour représenter les grandeurs intervenant en électromagnétisme sont des formes différentielles sur l'espace-temps. C'est pourquoi les équations de Maxwell, exprimées au moyen de ces formes différentielles, sont valables aussi bien en Physique relativiste qu'en Physique classique, puisqu'elles ne font pas d'hypothèse sur la structure de l'Espace-Temps. Rappelons qu'elles s'écrivent

$$d\widetilde{F} = 0\,, \quad \text{avec} \quad \widetilde{F} = \widetilde{E} \wedge dt + \widetilde{B}\,,$$

et

$$d\widetilde{G} = \widetilde{J}\,, \quad \text{avec} \quad \widetilde{G} = \widetilde{D} - \widetilde{H} \wedge dt \quad \text{et} \quad \widetilde{J} = \widetilde{\rho} - \widetilde{j} \wedge dt\,,.$$

Mais attention : la décomposition de $\widetilde{F}$ en somme de $\widetilde{E} \wedge dt$ et de $\widetilde{B}$, celle de $\widetilde{G}$ en somme de $\widetilde{D}$ et de $-\widetilde{H} \wedge dt$ et celle de $\widetilde{J}$ en somme de $\widetilde{\rho}$ et de $-\widetilde{j} \wedge dt$ dépendent du référentiel choisi, car elles font intervenir la décomposition de l'Espace-Temps en Espace et Temps.

Par ailleurs, les équations phénoménologiques écrites au paragraphe 2.7.3 doivent être adaptées, car elles ont été exprimées au moyen de l'opérateur de Hodge pour un espace euclidien de dimension 3 ; elles n'ont donc de sens qu'une fois choisi un référentiel. L'Espace-Temps de Minkowski, de dimension 4, possède aussi un opérateur de Hodge, qui d'ailleurs se généralise quasiment sans changement en Relativité générale. Nous le noterons $*^4$, pour le distinguer de l'opérateur de Hodge pour un espace euclidien de dimension 3, que nous noterons $*^3$. L'opérateur de Hodge de l'Espace-Temps de Minkowski établit une correspondance entre formes de degré 2. Si x, y, z et t sont les fonctions coordonnées dans l'Espace-Temps associées à un repère $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_t})$, dont les trois premiers vecteurs, de genre espace, forment un repère orthonormé d'orientation positive, le quatrième, de genre temps, étant unitaire (pour la métrique pseudo-riemannienne de l'Espace-Temps), orthogonal aux trois premiers et orienté vers le futur, on a

$$\begin{cases} *^4(dx\wedge dy) = -dz\wedge c\,dt\,, \\ *^4(dy\wedge dz) = -dx\wedge c\,dt\,, \\ *^4(dz\wedge dx) = -dy\wedge c\,dt\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} *^4(dx\wedge c\,dt) = dy\wedge dz\,, \\ *^4(dy\wedge c\,dt) = dz\wedge dx\,, \\ *^4(dz\wedge c\,dt) = dx\wedge dy\,. \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que les relations phénoménologiques du paragraphe 2.7.3 conduisent à la formule, qui exprime $\widetilde{G}$ en fonction de $\widetilde{F}$,

$$\widetilde{G} = \varepsilon_0\, c\big(*^4(\widetilde{F})\big)\,.$$

Les équations de Maxwell dans le vide, exprimées au moyen de $\widetilde{F}$, s'écrivent donc

$$d\widetilde{F} = 0\,, \qquad d(*^4\widetilde{F}) = 0\,.$$

Dans un milieu non vide (où la densité de charge électrique et la densité de courant électrique ne sont pas forcément nuls), mais dans lequel les relations phénoménologiques entre $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ sont les mêmes que dans le vide[3], les équations de Maxwell s'écrivent

$$d\widetilde{F} = 0\,, \qquad d(*^4\widetilde{F}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\widetilde{J}\,.$$

3.3 Effet d'un changement de référentiel Telles que nous les avons exprimées ci-dessus, les équations de Maxwell ne font pas du tout intervenir de choix d'un référentiel : elles sont parfaitement intrinsèques.

Le choix d'un référentiel a une influence seulement sur la manière dont les formes différentielles de degré 2 $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ s'expriment au moyen des champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$, car ces champs, eux, dépendent du référentiel choisi.

Considérons donc deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, galiléens (au sens relativiste). Attachons au premier un repère affine $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_t})$, les trois premiers vecteurs, de genre espace, formant un trièdre orthonormé d'orientation positive et le quatrième, de genre temps, étant unitaire, orthogonal aux trois premiers, orienté vers le futur. De plus nous choisissons $\overrightarrow{e_x}$ de manière telle qu'il soit dirigé parallèlement à la vitesse du second référentiel par rapport au premier. Attachons au second référentiel un repère affine de même origine $(O, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e'_t})$. Compte tenu du choix de $\overrightarrow{e_x}$ nous avons pu choisir les vecteurs de base $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ de manière qu'ils soient communs aux deux repères. On a

$$\overrightarrow{e'_x} = \operatorname{ch}\eta\,\overrightarrow{e_x} + \operatorname{sh}\eta\,\overrightarrow{e_t}\,, \quad \overrightarrow{e'_t} = \operatorname{sh}\eta\,\overrightarrow{e_x} + \operatorname{ch}\eta\,\overrightarrow{e_t}\,,$$

[3]Une telle hypothèse serait, par exemple, légitime pour un plasma de faible densité ; mais peut-être pas pour l'intérieur des étoiles.

où η est lié à la vitesse (au sens de la mécanique classique) u du second référentiel par rapport au premier par la formule

$$\frac{u}{c} = \frac{sh\eta}{\mathrm{ch}\,\eta}\,, \quad \text{d'où on déduit} \quad \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\eta} = 1 - \frac{u^2}{c^2}\,.$$

Les relations entre les coordonnées (x,y,z,t) et (x',y',z',t') dans les deux repères sont

$$x' = \mathrm{ch}\,\eta x - \mathrm{sh}\,\eta ct\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad ct' = -\,\mathrm{sh}\,\eta x + \mathrm{ch}\,\eta ct\,,$$

ou inversement

$$x = \mathrm{ch}\,\eta x' + \mathrm{sh}\,\eta ct'\,, \quad y = y'\,, \quad z = z'\,, \quad ct = \mathrm{sh}\,\eta x' + \mathrm{ch}\,\eta ct'\,.$$

Les expressions de $\widetilde{F}$, de $\widetilde{G}$ et de $\widetilde{J}$ au moyen des différentielles des fonctions coordonnées dans le premier repère sont

$$\begin{aligned}
\widetilde{F} = \widetilde{E}\wedge dt + \widetilde{B} &= E_x\,dx\wedge dt + E_y\,dy\wedge dt + E_z\,dz\wedge dt\\
&\quad + B_x\,dy\wedge dz + B_y\,dz\wedge dx + B_z\,dx\wedge dy\,,\\
\widetilde{G} = \widetilde{D} - \widetilde{H}\wedge dt &= -H_x\,dx\wedge dt - H_y\,dy\wedge dt - H_z\,dz\wedge dt\\
&\quad + D_x\,dy\wedge dz + D_y\,dz\wedge dx + D_z\,dx\wedge dy\,,\\
\widetilde{J} = \widetilde{\rho} - \widetilde{j}\wedge dt &= \rho\,dx\wedge dy\wedge dz - j_x\,dy\wedge dz\wedge dt - j_y\,dz\wedge dx\wedge dt - j_z\,dx\wedge dy\wedge dt\,.
\end{aligned}$$

Mais en différentiant les formules de changement de coordonnées, on obtient

$$dx = \mathrm{ch}\,\eta\,dx' + \mathrm{sh}\,\eta\,c\,dt'\,, \quad dy = dy'\,, \quad dz = dz'\,, \quad c\,dt = \mathrm{sh}\,\eta\,dx' + \mathrm{ch}\,\eta\,c\,dt'\,.$$

En remplaçant, dans les expressions de $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ et $\widetilde{J}$, dx, dy, dz, dt par leurs expressions en fonction de dx', dy', dz' et dt', on trouve

$$\begin{aligned}
\widetilde{F} &= E_x\,dx'\wedge dt' + (\mathrm{ch}\,\eta\,E_y - c\,\mathrm{sh}\,\eta\,B_z)\,dy'\wedge dt' + (\mathrm{ch}\,\eta\,E_z + c\,\mathrm{sh}\,\eta\,B_y)\,dz'\wedge dt'\\
&\quad + B_x\,dy'\wedge dz' + (\mathrm{ch}\,\eta\,B_y + \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{c}\,E_z)\,dz'\wedge dx' + (\mathrm{ch}\,\eta\,B_z - \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{c}\,E_y)\,dx'\wedge dy'\\
\widetilde{G} &= -H_x\,dx'\wedge dt' - (\mathrm{ch}\,\eta\,H_y + c\,\mathrm{sh}\,\eta\,D_z)\,dy'\wedge dt' - (\mathrm{ch}\,\eta\,H_z - c\,\mathrm{sh}\,\eta\,D_y)\,dz'\wedge dt'\\
&\quad + D_x\,dy'\wedge dz' + (D_y\,\mathrm{ch}\,\eta - H_z\frac{1}{c}\,\mathrm{sh}\,\eta)\,dz'\wedge dx' + (D_z\,\mathrm{ch}\,\eta + \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{c}\,H_y)\,dx'\wedge dy'\,,\\
\widetilde{J} &= (\mathrm{ch}\,\eta\,\rho - \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{c}\,j_x)\,dx'\wedge dy'\wedge dz'\\
&\quad - (\mathrm{ch}\,\eta\,j_x - c\,\mathrm{sh}\,\eta\,\rho)\,dy'\wedge dz'\wedge dt' - j_y\,dz'\wedge dx'\wedge dt' - j_z\,dx'\wedge dy'\wedge dt'\,.
\end{aligned}$$

Mais $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ et $\widetilde{J}$ doivent s'exprimer, au moyen des composantes des champs $\overrightarrow{E}'$, $\overrightarrow{B}'$, $\overrightarrow{D}'$, $\overrightarrow{H}'$ et $\overrightarrow{j}'$ dans la base attachée au référentiel $\mathcal{R}'$, et de la densité de charge ρ' dans ce référentiel, par des formules identiques à celles qui les expriment au moyen des composantes des champs $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{j}$ dans la base attachée au référentiel $\mathcal{R}$ et de la densité de charge ρ dans ce même référentiel. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\widetilde{F} &= E'_x\,dx'\wedge dt' + E'_y\,dy'\wedge dt' + E'_z\,dz'\wedge dt'\\
&\quad + B'_x\,dy'\wedge dz' + B'_y\,dz'\wedge dx' + B'_z\,dx'\wedge dy'\,,\\
\widetilde{G} &= -H'_x\,dx'\wedge dt' - H'_y\,dy'\wedge dt' - H'_z\,dz'\wedge dt'\\
&\quad + D'_x\,dy'\wedge dz' + D'_y\,dz'\wedge dx' + D'_z\,dx'\wedge dy'\,,\\
\widetilde{J} &= \rho'\,dx'\wedge dy'\wedge dz' - j'_x\,dy'\wedge dz'\wedge dt' - j'_y\,dz'\wedge dx'\wedge dt' - j'_z\,dx'\wedge dy'\wedge dt'\,.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des mêmes éléments des bases des espaces des formes différentielles, nous obtenons les relations entre, d'une part, ρ' et les composantes de $\overrightarrow{E}'$, $\overrightarrow{B}'$, $\overrightarrow{D}'$, $\overrightarrow{H}'$ et $\overrightarrow{j}'$ et, d'autre part, ρ et les composantes de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{j}$:

$$\begin{cases} E'_x = E_x\,, \\ E'_y = \mathrm{ch}\,\eta\, E_y - c\,\mathrm{sh}\,\eta\, B_z\,, \\ E'_z = \mathrm{ch}\,\eta\, E_z + c\,\mathrm{sh}\,\eta\, B_y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = B_x\,, \\ B'_y = \mathrm{ch}\,\eta\, B_y + \dfrac{\mathrm{sh}\,\eta}{c} E_z\,, \\ B'_z = \mathrm{ch}\,\eta\, B_z - \dfrac{\mathrm{sh}\,\eta}{c} E_y\,. \end{cases}$$

De même

$$\begin{cases} D'_x = D_x\,, \\ D'_y = \mathrm{ch}\,\eta\, D_y - \dfrac{\mathrm{sh}\,\eta}{c} H_z)\,, \\ D'_z = \mathrm{ch}\,\eta\, D_z + \dfrac{\mathrm{sh}\,\eta}{c} H_y\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} H'_x = H_x\,, \\ H'_y = \mathrm{ch}\,\eta\, H_y + c\,\mathrm{sh}\,\eta\, D_z\,, \\ H'_z = \mathrm{ch}\,\eta\, H_z - c\,\mathrm{sh}\,\eta\, D_y\,. \end{cases}$$

Enfin

$$\rho' = \mathrm{ch}\,\eta\, \rho - \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{c} j_x\,, \qquad \begin{cases} j'_x = \mathrm{ch}\,\eta\, j_x - c\,\mathrm{sh}\,\eta\, \rho\,, \\ j'_y = j_y\,, \\ j'_z = j_z\,. \end{cases}$$

4 Conclusion

Les équations de Maxwell sont invariantes par les transformations du groupe de Lorentz, pas par celles du groupe de Galilée.

Références

[1] Les équations de Maxwell. Wikipédia, http ://fr.wikipedia.org/wiki/.

[2] Transformations de Lorentz du champ électromagnétique. Wikipédia, http ://fr.wikipedia.org/wiki/.

[3] V. Guillemin et S. Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984.