Colloque “La mécanique analytique de Lagrange et son héritage”, Paris, 27 au 29 septembre 1988

Variables actions-angles : leur détermination et leurs singularités

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

Introduction

Depuis quelques années, les systèmes hamiltoniens complètement intégrables donnent lieu à de très actives recherches. Le Professeur P. Van Moerbeke et d'autres orateurs exposeront à ce colloque les raisons de cet intérêt renouvelé, et décriront les importants progrès accomplis dans ce domaine. Nous nous proposons d'exposer ici quelques notions qui s'y rattachent, relatives aux variables actions-angles et à leurs généralisations.

Les paragraphes 1 et 2 exposent, en donnant des démonstrations à peu près complètes, mais élémentaires, les résultats classiques concernant les variables actions-angles, tout d'abord au voisinage d'un point, puis au voisinage d'un tore lagrangien sur lequel les intégrales premières deux à deux en involution du système hamiltonien considéré prennent des valeurs constantes. La construction explicite des actions est illustrée sur l'exemple du pendule sphérique. La partie 3 décrit une généralisation de la complète intégrabilité, due à Mishchenko et Fomenko. La partie 4 traite des aspects globaux des actions-angles, et décrit notamment la notion de monodromie introduite par Duistermaat. Certaines généralisations, dues notamment à Dazord et Delzant, sont brièvement exposées dans la partie 5. Enfin la partie 6 indique quelques résultats sur les singularités des familles de n fonctions deux à deux en involution sur une variété symplectique de dimension $2n$. Les exemples du pendule sphérique et du problème d'Euler-Lagrange, étudiés très en détail par Cushman et Knörrer, sont brièvement décrits.

1. Étude locale au voisinage d'un point

1.1. Hypothèses générales et notations. Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $H : M \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable, appelée hamiltonien. On note ${}^\sharp dH$ le champ de vecteurs tel que

$$i({}^\sharp dH)\Omega = -dH\,.$$

On suppose qu'il existe, sur un ouvert U de M, n fonctions différentiables $f_1, \ldots, f_n$, deux à deux en involution,

$$\{f_i, f_j\} = 0\,, \qquad 1 \leq i, j \leq n\,,$$

dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur U, et telles que dH appartienne, en tout point de U, au sous-espace vectoriel de l'espace cotangent à M en ce point engendré par les valeurs en ce point de $df_1, \ldots, df_n$. Alors localement, H est de la forme

$$H = \hat{H} \circ f\,, \quad \text{avec} \quad f = (f_1, \ldots, f_n)\,,$$

où $\hat{H}$ est une fonction différentiable définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

1.2. Théorème (Jacobi-Lie-Carathéodory [1]). *Au voisinage de chaque point de U, il existe n autres fonctions différentiables $g_1, \ldots, g_n$, telles que l'expression locale de la forme symplectique Ω soit*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dg_i\,.$$

La détermination locale des fonctions $g_1 \ldots, g_n$ se fait par des calculs utilisant exclusivement des quadratures, des dérivations partielles et des éliminations.

Démonstration. Supposons connu, au voisinage du point considéré, un système de coordonnées locales canoniques de M, noté $(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)$. On a donc

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy_i\,.$$

Supposons également qu'au voisinage du point considéré, les différentielles des fonctions $f_1, \ldots, f_n, x^1, \ldots, x^n$ soient linéairement indépendantes. Un lemme d'algèbre symplectique (Arnold [2], paragraphe 41, page 222) montre d'ailleurs qu'on peut toujours, par une permutation canonique des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n$, se ramener à ce cas. On peut alors prendre pour coordonnées locales $f_1, \ldots, f_n, x^1, \ldots, x^n$, et exprimer localement Ω sous la forme

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \wedge df_i\,,$$

où $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sont des 1-formes appartenant à l'idéal engendré par $dx^1, \ldots, dx^n$. Cela résulte en effet du fait que les fonctions f_i $(1 \leq i \leq n)$ sont deux à deux en involution. On a donc

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x, f)\, dx^k\,.$$

Moyennant l'introduction de constantes, on peut aussi supposer qu'au point considéré, les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ sont nulles.

On note Ψ_t la famille à un paramètre $t \in [0,1]$ d'applications

$$\Psi_t : \big(x^1, \ldots, x^n, f_1, \ldots, f_n\big) \mapsto \big((1-t)x^1, \ldots, (1-t)x^n, f_1, \ldots, f_n\big)\,.$$

On a

$$\Psi_0 = \mathrm{id}\,, \qquad \Psi_1(x^1, \ldots, x^n, f_1, \ldots, f_n) = (0, \ldots, 0, f_1, \ldots, f_n)\,.$$

L'image réciproque de la forme symplectique Ω par l'application Ψ_t a pour expression

$$\Psi_t^*\Omega = \sum_{i,k}(1-t)\alpha_{ik}\big((1-t)x, f\big)dx^k \wedge df_i\,.$$

En dérivant par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Psi_t^*\Omega = -\sum_{i,k}\alpha_{ik}\big((1-t)x, f\big)\,dx^k \wedge df_i - \sum_{i,k,l}(1-t)x^l\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x^l}\big((1-t)x, f\big)\,dx^k \wedge df_i\,.$$

En exprimant que Ω est fermée, on obtient

$$0 = d\Omega = -\sum_{i,k,l}\frac{\partial\alpha_{ik}(x,f)}{\partial x^l}\,dx^l \wedge dx^k \wedge df_i + \sum_{i,k,l}\frac{\partial\alpha_{ik}(x,f)}{\partial f_l}\,df_l \wedge dx^k \wedge df_i\,,$$

d'où

$$\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial\alpha_{il}}{\partial x^k} = 0\,, \qquad \frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial f_l} - \frac{\partial\alpha_{lk}}{\partial f_i} = 0\,. \tag{$*$}$$

On peut donc écrire

$$\frac{d}{dt}\Psi_t^*\Omega = -\sum_{i,k}\alpha_{ik}\big((1-t)x, f\big)\,dx^k \wedge df_i - \sum_{i,k,l}(1-t)x^l\frac{\partial\alpha_{il}}{\partial x^k}\big((1-t)x, f\big)\,dx^k \wedge df_i\,.$$

Compte tenu de $\Psi_0^*\Omega = \Omega$ et de $\Psi_1^*\Omega = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Omega &= -\int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\Psi_t^*\Omega\right)\,dt\\ &= \sum_{i,k}\left[\int_0^1 \alpha_{ik}\big((1-t)x, f\big)\,dt\right]\,dx^k \wedge df_i\\ &\quad + \sum_{i,k,l}\left[\int_0^1 (1-t)x^l\frac{\partial\alpha_{il}}{\partial x^k}\big((1-t)x, f\big)\,dt\right]\,dx^k \wedge df_i\,.\end{aligned}$$

Posons

$$g_i = -\sum_l\left[\int_0^1 x^l\alpha_{il}\big((1-t)x, f\big)\,dt\right]\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} dg_i = &-\sum_l \left[\int_0^1 \alpha_{il}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] dx^l \\ &-\sum_{k,l} \left[\int_0^1 (1-t)x^l \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial x^k}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] dx^k \\ &-\sum_{k,l} \left[\int_0^1 x^l \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial f_k}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] df_k\,. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_i df_i \wedge dg_i = &\sum_{i,l} \left[\int_0^1 \alpha_{il}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] dx^l \wedge df_i \\ &+\sum_{i,k,l} \left[\int_0^1 (1-t)x^l \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial x^k}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] dx^k \wedge df_i \\ &+\sum_{i,k,l} \left[\int_0^1 x^l \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial f_k}\big((1-t)x, f\big)\, dt\right] df_k \wedge df_i\,. \end{aligned}$$

Mais le troisième terme est nul, compte tenu de la seconde relation $(*)$ ci-dessus. On a donc bien

$$\Omega = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dg_i\,. \qquad \square$$

1.3. Remarque. Dans les hypothèses du théorème de Jacobi-Lie-Carathéodory, la famille de fonctions $(g_1, \ldots, g_n, f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées locales sur M. On peut appeler les f_i *pré-actions* et les g_i *pré-angles*. Dans ce système, les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{dg_i}{dt} = \dfrac{\partial \hat H}{\partial f_i}\,, \\ \dfrac{df_i}{dt} = 0\,. \end{cases}$$

Ces équations s'intègrent immédiatement, et conduisent à

$$\begin{cases} g_i(t) = g_i(t_0) + (t - t_0)\dfrac{\partial \hat H}{\partial f_i}\big(f(t_0)\big)\,, \\ f_i(t) = f_i(t_0)\,. \end{cases}$$

Localement, on a intégré le système hamiltonien (M, Ω, H), en le linéarisant.

2. Le voisinage d'une fibre

2.1. Les hypothèses et notations étant celles de 1.1, on suppose en outre $N = f^{-1}(a)$ connexe et compact. On peut d'ailleurs se ramener à ce cas lorsque N n'est pas connexe mais a une composante connexe compacte, en remplaçant U par un ouvert plus petit. Le théorème de Liouville permet alors d'affirmer que N est difféomorphe à un tore, et qu'il existe un voisinage de N dans M symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de T^*N. On peut même énoncer :

2.2. Théorème (Liouville-Arnold-Avez [3]). *Il existe, sur un voisinage ouvert W de la fibre N dans M, n fonctions différentiables $I_1, \ldots, I_n$, chaque I_i n'étant fonction que de $(f, \ldots, f_n)$, dont les différentielles $dI_1, \ldots, dI_n$ sont linéairement indépendantes, telles que les flots des champs de vecteurs $\sharp dI_i$ soient périodiques, de période 2π. Il existe également sur W des variables angulaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, définies modulo 2π, telles que*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\gamma_i \, .$$

L'ouvert W de M s'identifie à un voisinage de la section nulle du fibré cotangent au tore de dimension n, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ étant les variables angulaires sur ce tore, $I_1, \ldots, I_n$ les coordonnées conjuguées sur les fibres cotangentes.

Démonstration. Puisque N est connexe et compact, c'est un tore lagrangien. D'après un théorème de Weinstein [23], il existe un voisinage W de N dans M difféomorphe, par un difféomorphisme symplectique, à un voisinage de la section nulle de T^*N. On peut donc définir une projection $q : W \to N$ correspondant à la projection canonique de T^*N sur N. En restreignant éventuellement W, on peut faire en sorte que (q, f) soit un difféomorphisme de W sur le produit de N et d'un voisinage ouvert $f(W)$ de a dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout $z \in f(W)$, $f^{-1}(z)$ est une sous-variété lagrangienne qui rencontre chaque fibre de $q : W \to N$ en un point unique. On peut donc identifier cette sous-variété au graphe d'une 1-forme fermée η_z, paramétrée par z. Soit $\rho : \mathbf{R}^n \to N$ le revêtement universel du tore N. Pour tout $z \in f(W)$, il existe une fonction différentiable S_z, définie sur $\mathbf{R}^n$, telle que

$$\rho^* \eta_z = dS_z \, .$$

Chaque fonction S_z est d'ailleurs déterminée à une constante additive arbitraire près. En choisissant convenablement ces constantes, on peut faire en sorte que la fonction $S : \mathbf{R}^n \times f(W) \to \mathbf{R}$, définie par

$$S(\beta, z) = S_z(\beta) \, , \qquad \beta \in \mathbf{R}^n \, , \quad z \in f(W) \, ,$$

soit différentiable. On a

$$\rho^* \eta_z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \beta^i}(\beta, z) \, d\beta^i \, .$$

De plus, les dérivées partielles $\dfrac{\partial S}{\partial \beta^i}$ sont périodiques de période 2π en chacune des variables $\beta^1, \ldots, \beta^n$. Posons, pour tout $z \in f(W)$,

$$I_i(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \beta^i}(\beta^1, \ldots, \beta^n, z) \, d\beta^i \, .$$

Les fonctions I_i ainsi définies ne dépendent que de z, non de β, et vérifient $I_i(a) = 0$, puisque $f^{-1}(a)$ s'identifie à la section nulle de T^*N.

Lorsqu'on considère les β^i, $1 \leq i \leq n$, comme des coordonnées angulaires, définies modulo 2π, sur le tore N, et qu'on identifie W à un ouvert de T^*N avec, sur les fibres, les coordonnées $p_1, \ldots, p_n$, conjuguées des coordonnées angulaires $\beta_1, \ldots, \beta_n$, le difféomorphisme $(q, f)^{-1} : N \times f(W) \to W$ s'exprime par

$$(\beta, z) \mapsto \left(\beta, p_1 = \frac{\partial S(\beta, z)}{\partial \beta^1}, \ldots, p_n = \frac{\partial S(\beta, z)}{\partial \beta^n}\right) .$$

Le jacobien

$$\det \left(\frac{\partial^2 S(\beta, z)}{\partial \beta^i \partial z_j} \right)$$

ne s'annule donc en aucun point. Un lemme élémentaire ([15], page 175) permet d'en déduire que le déterminant

$$\det \left(\frac{\partial I_i}{\partial z_j} \right)$$

ne s'annule en aucun point z de $f(W)$. En restreignant éventuellement W, on peut donc faire en sorte que (β, I), avec $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^n)$ et $I = (I_1, \ldots, I_n)$, soit un système de coordonnées sur W, les β^i étant des coordonnées angulaires, définies modulo 2π. On notera $\widehat{S}(\beta, I)$ l'expression de la fonction S au moyen de ces nouvelles coordonnées. On a

$$\frac{\partial \widehat{S}(\beta, I)}{\partial \beta^i} = \frac{\partial S(\beta, z)}{\partial \beta^i} , \qquad 1 \leq i \leq n ,$$

car les nouvelles coordonnées I ne sont fonctions que des coordonnées z, non des β. La 1-forme de Liouville α de T^*N, considérée grâce aux identifications faites comme une 1-forme sur W, a donc pour expression

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\beta^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widehat{S}(\beta, I)}{\partial \beta^i} \, d\beta^i .$$

Par suite, compte tenu de la symétrie des dérivées partielles secondes de $\widehat{S}$ par rapport aux variables β^i et β^j,

$$\Omega = d\alpha = \sum_{(i,j)} \frac{\partial^2 \widehat{S}(\beta, I)}{\partial \beta^i \partial I_j} \, dI_j \wedge d\beta^i .$$

Posons

$$\gamma^j(\beta, I) = \frac{\partial \widehat{S}(\beta, I)}{\partial I_j} .$$

On peut alors écrire

$$d\widehat{S} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \beta^i} \, d\beta^i + \frac{\partial \widehat{S}}{\partial I_i} \, dI_i \right) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \gamma^i \, dI_i ,$$

d'où
$$\Omega = d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\gamma^i \,.$$
Par suite, l'application $(\beta, I) \mapsto (\gamma, I)$ est un difféomorphisme local. D'autre part, les fonctions $\gamma^j(\beta, I)$ vérifient
$$\gamma^j(\beta^1, \ldots, \beta^k + 2\pi, \ldots, \beta^n, I) - \gamma^j(\beta^1, \ldots, \beta^n, I) = 2\pi \frac{\partial I_k}{\partial I_j} = 2\pi \delta^j_k \,.$$
Elles sont donc de la forme
$$\gamma^j(\beta, I) = \beta^j + \widetilde{\gamma}^j(\beta, I) \,,$$
où les fonctions $\widetilde{\gamma}^j$ sont périodiques de période 2π en chacune des variables $\beta^1, \ldots, \beta^n$. Par suite, la classe modulo 2π de chaque $\gamma^j(\beta, I)$ ne dépend que de I et des classes modulo 2π de chacune des variables $\beta^1, \ldots, \beta^n$. En d'autres termes, lorsqu'on les considère comme des fonctions à valeurs angulaires (définies modulo 2π), les γ^j peuvent être considérées comme définies sur l'ouvert W de M. Pour chaque valeur fixée de I, l'application $\beta \mapsto \gamma(\beta, I)$ est une application étale du tore de dimension n sur lui-même, donc une application de revêtement. Mais
$$(\beta, s) \mapsto \beta + s\widetilde{\gamma}(\beta, I) \,, \qquad 0 \leq s \leq 1 \,,$$
est une homotopie différentiable de cette application de revêtement sur l'application identique du tore de dimension n. Donc pour chaque valeur fixée de I, $\beta \mapsto \gamma(\beta, I)$ est un difféomorphisme du tore sur lui-même. Par suite, (I, γ) est un système de coordonnées sur l'ouvert W de M, les n coordonnées $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ étant à valeurs angulaires (définies modulo 2π). C'est le système de coordonnées actions-angles cherché. $\square$

2.3. Remarque. La détermination des coordonnées actions-angles $I_1, \ldots, I_n, \gamma^1, \ldots, \gamma^n$ utilise seulement des quadratures, des éliminations et des dérivations partielles. On a cependant, au cours de la démonstration, utilisé l'identification de l'ouvert W de M à un voisinage de la section nulle du fibré cotangent au tore et supposé connues la 1-forme de Liouville α, la projection canonique $q : W \to N$, et un système de coordonnées angulaires $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sur N. Ainsi qu'on va le voir, la détermination effective de coordonnées actions-angles est possible, par quadratures, éliminations et dérivations partielles, même lorsqu'on ne connaît pas explicitement α, q et β. Il suffit de connaître, sur un voisinage de N, une 1-forme η telle que
$$d\eta = \Omega$$
et, pour chaque élément z d'un voisinage de a dans $\mathbf{R}^n$, une famille de n courbes fermées $c_1(z), \ldots, c_n(z)$, contenues dans $f^{-1}(z)$ et dépendant différentiablement de z, engendrant l'homologie du tore $f^{-1}(z)$. Les coordonnées d'action I_i peuvent alors être définies par les formules
$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{c_i} \eta \,.$$
En utilisant la formule de Stokes et en remarquant que les sous-variétés $f^{-1}(z)$ sont lagrangiennes, on vérifie en effet que les I_i ainsi définies ne sont fonctions que de z et ne diffèrent des I_i introduites dans la démonstration que par l'addition éventuelle de

constantes. En procédant comme dans la démonstration de 1.2, on peut alors, sur un voisinage dans M de chaque point de N, déterminer les coordonnées angulaires γ_i, à des constantes additives arbitraires près. Compte tenu de la compacité de N, on peut enfin choisir ces constantes arbitraires afin d'avoir des coordonnées angulaires globales.

2.4. Exemple: les actions-angles du pendule sphérique. On considère un point matériel de masse m, mobile sur une sphère de rayon R. On note $\overrightarrow{x}$ le vecteur représentant la position de ce point, $\overrightarrow{v}$ sa vitesse et $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ son impulsion. Les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{p}$ doivent vérifier

$$\|\overrightarrow{x}\|^2 = R^2 \,, \qquad \overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} = 0 \,.$$

L'espace des phases, formé par les couples de vecteurs $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$ vérifiant les conditions ci-dessus, est de dimension 4: il s'identifie au fibré cotangent à la sphère S^2. On a sur cet espace deux intégrales premières du système, en involution,

– le hamiltonien H, qui a pour expression

$$H = \frac{1}{2\|\overrightarrow{p}\|^2} - m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{x} \,,$$

où $\overrightarrow{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur;

– la composante verticale K du moment cinétique, qui a pour expression

$$K = (\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \,,$$

produit mixte de $\overrightarrow{e}_3$ (vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut), $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{p}$.

On pose

$$\overrightarrow{g}.\overrightarrow{e}_3 = -g \,.$$

Les valeurs critiques de (H, K) sont:

– celles correspondant aux positions d'équilibre du système,

$$(-mgR, 0) \quad \text{et} \quad (+mgR, 0) \,;$$

– celles correspondant aux mouvements périodiques du système étudiés par Huygens, dans lesquels le point matériel parcourt, à vitesse constante, un cercle intersection de la sphère de rayon R avec un plan horizontal passant au dessous du centre de la sphère; ces valeurs critiques $\big(h_c(\lambda), k_c(\lambda)\big)$ de (H, K) sont données, en fonction du paramètre λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$, par

$$h_c(\lambda) = mgR\left(\frac{(1-\lambda^2)(1+3\lambda^2)}{2\lambda^2} - 1\right) \,,$$

$$k_c(\lambda) = \pm m g^{1/2} R^{3/2} \frac{1-\lambda^4}{\lambda} \,.$$

L'image de l'application (H, K) est l'ensemble des $(h, k) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$h \geq h_c(\lambda) \,, \quad k = k_c(\lambda) \,, \quad \text{avec} \quad 0 < \lambda \leq 1 \,.$$

Elle est représentée sur la figure 1.

Figure 1.

Pour toute valeur régulière (h,k) de (H,K) appartenant à l'image de cette application, $(H,K)^{-1}(h,k)$ est connexe, donc est un tore de dimension 2. On obtient un premier générateur c_1 de l'homologie de ce tore en considérant une orbite de l'action du groupe des rotations autour de l'axe vertical passant par le centre de la sphère. L'action correspondante I_1 est donnée par

$$I_1(h,k) = \frac{1}{2\pi}\int_{c_1} \alpha\,,$$

la 1-forme de Liouville α ayant pour expression

$$\alpha = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3\,.$$

On a noté x_1, x_2, x_3 et p_1, p_2, p_3 les composantes des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{p}$ dans un repère orthonormé $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, avec $\overrightarrow{e}_3$ vertical dirigé vers le haut. Mais lorsqu'on parcourt le cycle c_1, paramétré au moyen d'un angle φ variant de 0 à 2π, les différentielles de x_1, x_2 et x_3 vérifient

$$dx_1 = -x_2\,d\varphi\,, \qquad dx_2 = x_1\,d\varphi\,, \qquad dx_3 = 0\,.$$

On obtient donc

$$I_1(h,k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-p_1x_2 + p_2x_1)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k\,d\varphi = k\,.$$

On voit donc que la première variable d'action I_1 est simplement

$$I_1 = K\,.$$

Un second générateur de l'homologie du tore $(H,K)^{-1}(h,k)$ est obtenu en fixant $x_2 = 0$, et en faisant varier x_3 entre ses deux valeurs extrêmes possibles. On est amené à traiter séparément les cas où $k \neq 0$, et où $k = 0$.

Lorsque $k \neq 0$, x_3 reste compris dans un intervalle $[x_{3\,\min}, x_{3\,\max}]$, avec $-R < x_{3\,\min} < x_{3\,\max} < +R$. Puisqu'on a fixé $x_2 = 0$, et que la valeur k de K est imposée, les autres variables x_1, p_1, p_2, p_3 sont liées à x_3 par les relations

$$x_1^2 = R^2 - x_3^2 \,, \qquad p_1 x_1 + p_3 x_3 = 0 \,, \qquad p_2 x_1 = k \,,$$

ce qui montre que x_1 ne s'annule pas, et conduit à l'expression de la forme de Liouville

$$\alpha = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3 = \frac{R^2}{R^2 - x_3^2}\,p_3\,dx_3 \,.$$

Mais en exprimant que la valeur h de H est fixée, et en utilisant les relations précédentes, on voit que p_3 doit vérifier

$$p_3^2 = \frac{2m}{R^2}(R^2 - x_3^2)(h - mgx_3) - \frac{k^2}{R^2} \,.$$

L'intervalle $[x_{3\,\min}, x_{3\,\max}]$ des valeurs possibles de x_3 est déterminé en exprimant que le membre de droite de l'égalité ci-dessus doit être ≥ 0. On voit que pour chaque valeur de x_3 appartenant à cet intervalle, il y a deux valeurs possibles de p_3, opposées l'une de l'autre. On parcourt le générateur c_2 de l'homologie du tore en faisant d'abord croître x_3 de $x_{3\,\min}$ à $x_{3\,\max}$ et en prenant pour p_3 la valeur possible ≥ 0, puis en faisant décroître x_3 de $x_{3\,\max}$ à $x_{3\,\min}$, et en prenant pour p_3 la valeur possible ≤ 0. Afin de simplifier l'écriture, on introduit les variables réduites

$$u = \frac{x_3}{R} \,, \qquad h^* = \frac{h}{mgR} \,, \qquad k^* = \frac{k}{\sqrt{R^3 m^2 g}} \,.$$

On obtient

$$I_2(h,k) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m R^{3/2} g^{1/2} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{1}{1-u^2} \sqrt{(h^* - u)(1-u^2) - {k^*}^2/2}\,du \,.$$

Lorsque $k = 0$, x_3 peut varier dans l'intervalle $[-R, R\inf(h^*, 1)]$. Un calcul semblable au précédent conduit à

$$I_2(h,0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m R^{3/2} g^{1/2} \int_{-1}^{\inf(h^*,1)} \frac{1}{1-u^2} \sqrt{(h^* - u)(1-u^2)}\,du \,.$$

2.5. Autres exemples. Le lecteur trouvera d'autres exemples de calculs explicites d'actions-angles, notamment pour le problème de Kowalevska, dans les publications de J.-P. Françoise [12, 13].

3. La complète intégrabilité non commutative

3.1. Le théorème de Liouville-Arnold-Avez permet l'intégration, par quadratures, éliminations et dérivations partielles, d'un système hamiltonien, sur une variété symplectique de dimension $2n$, lorsqu'on en connaît n intégrales premières deux à deux en involution. Mishchenko et Fomenko [19] ont étudié une situation plus générale, qu'ils ont appelé complète intégrabilité non commutative, que nous allons maintenant décrire. Pour les notions utilisées ici concernant l'action d'un groupe de Lie ou d'une algèbre de Lie sur une variété symplectique, on pourra se reporter à [15], chapitre IV.

Soit (M,Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $f=(f_1,\ldots,f_p)$ une famille de fonctions différentiables, définies sur M et à valeurs réelles, formant une base d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension p (la loi de composition de cette algèbre de Lie étant le crochet de Poisson). On peut aussi considérer f comme une application de M dans le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, en précisant que f est un morphisme de Poisson (lorsqu'on munit $\mathcal{G}^*$ de sa structure de Lie-Poisson canonique). En associant, à tout élément X de $\mathcal{G}$, le champ de vecteurs hamiltonien ${}^\sharp d\langle f,X\rangle$, on définit une action infinitésimale de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur la variété M. On supposera pour simplifier que cette action s'intègre en une action fortement hamiltonienne d'un groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, sur la variété M. On supposera de plus cette action localement libre sur un ouvert dense U de M. On sait qu'en tout point x de M, le noyau de T_xf est l'orthogonal symplectique de l'espace tangent en x à l'orbite de ce point. L'orbite de tout point $x\in U$ étant de dimension p, le noyau de T_xf est de dimension $n-p$, et par suite f est, en tout point de U, une submersion.

Soit d'autre part $H:M\to\mathbf{R}$ un hamiltonien différentiable. On suppose les fonctions f_i intégrales premières de ${}^\sharp dH$, c'est-à-dire $\{H,f_i\}=0$ pour $1\le i\le n$.

3.2. Définition (Mishchenko et Fomenko). On dit qu'un point $a\in\mathcal{G}^*$ satisfait les *conditions de complète intégrabilité non commutative* si

(i) a est valeur régulière de f, *i.e.*, f est une submersion en tout point de $f^{-1}(a)$,

(ii) la dimension du groupe d'isotropie G_a du point a, pour l'action coadjointe de G sur $\mathcal{G}^*$, vérifie

$$\dim G_a+\dim G=\dim M\,,\qquad \text{ou}\quad \dim G_a+p=2n\,.$$

3.3. Remarques.

1. On sait que G_a agit sur $f^{-1}(a)$, et que pour tout point x de $f^{-1}(a)$, l'espace tangent en x à l'orbite de l'action de G_a est l'intersection de l'espace tangent en x à $f^{-1}(a)$, qui n'est autre que le noyau de T_xf, et de son orthogonal symplectique. Lorsque la condition (i) ci-dessus est satisfaite, cette action est localement libre, puisque dans ce cas l'action de G est elle-même localement libre en tout point de $f^{-1}(a)$. Lorsque la condition (ii) de complète intégrabilité non commutative est également satisfaite, l'action de G_a sur $f^{-1}(a)$ est localement transitive, puisque les dimensions de G_a et de $f^{-1}(a)$ sont égales. L'espace tangent à $f^{-1}(a)$ en chacun de ses points est contenu dans son orthogonal symplectique, ce qui exprime que $f^{-1}(a)$ est une sous-variété isotrope de M. Tout point x de $f^{-1}(a)$ a, sous l'action du groupe G, une orbite coisotrope, puisque l'espace tangent en x à cette orbite est l'orthogonal symplectique du noyau de T_xf.

2. Toujours dans le cas où les conditions de complète intégrabilité non commutative sont satisfaites, la variété symplectique réduite associée au point a de $\mathcal{G}^*$, au sens de Marsden et Weinstein [18], c'est-à-dire la variété quotient de $f^{-1}(a)$ par l'action de G_a, est discrète, puisque G_a agit transitivement sur chaque composante connexe de $f^{-1}(a)$. On supposera pour simplifier $f^{-1}(a)$ connexe. La variété symplectique réduite associée au point a est alors réduite à un point.

3. Supposons les conditions de complète intégrabilité non commutative satisfaites en a, et ce point élément de l'ouvert de $\mathcal{G}$ réunion des orbites coadjointes de dimension maximale. Les conditions de complète intégrabilité non commutative sont alors satisfaites en tout point d'un voisinage de a. La sous-variété $f^{-1}(a)$ possède un voisinage ouvert dans M réunion d'orbites coisotropes de l'action de G sur M. D'après un théorème de M. Duflo et M. Vergne [8], on sait de plus que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_a$ de G_a est abélienne. Par suite, si $f^{-1}(a)$ est compact, c'est un tore de dimension $2n-p$, sur lequel la composante neutre de G_a agit de manière transitive et localement libre. Sur ce tore, le flot du champ de vecteurs hamiltonien $\sharp dH$ se linéarise, exactement comme dans le cas de complète intégrabilité usuelle. Prenons en effet une base $(X_1, \ldots, X_p)$ de $\mathcal{G}$ telle que $(X_1, \ldots, X_q)$ soit une base de $\mathcal{G}_a$, avec $q = 2n - p \leq p$. Contrairement au cas de complète intégrabilité commutative usuelle, on ne peut pas dire ici que H est fonction seulement de $f_1, \ldots, f_p$. Mais puisque $\sharp dH$ est tangent à $f^{-1}(a)$, sa restriction à $f^{-1}(a)$ est combinaison linéaire des champs de vecteurs $\sharp df_i$, avec $1 \leq i \leq q$. De plus, puisque $\{H, f_i\} = 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq p$, les coefficients de cette combinaison linéaire sont constants sur $f^{-1}(a)$. Comme les flots des champs de vecteurs $\sharp df_i$, $1 \leq i \leq q$, commutent deux à deux sur $f^{-1}(a)$, le flot de $\sharp dH$ se linéarise sur ce tore, exactement comme dans le cas de complète intégrabilité commutative classique.

3.4. Exemple: le mouvement d'Euler-Poinsot. On considère le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe, en l'absence de pesanteur. L'espace de configuration est le groupe $G_1 = SO(3)$. Le hamiltonien du système a pour expression

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right),$$

où M_1, M_2, M_3 sont les trois composantes du moment cinétique $\overrightarrow{M}$ dans un repère principal d'inertie lié au corps solide, I_1, I_2, I_3 les moments d'inertie correspondants. Le moment cinétique $\overrightarrow{m}$ dans un repère fixe est une intégrale première du système, à valeurs vectorielles. Il est lié à $\overrightarrow{M}$ et à l'élément φ de G_1 qui représente la position du corps solide, par la relation

$$\overrightarrow{m} = \varphi(\overrightarrow{M}).$$

On peut considérer $(\overrightarrow{m}, H)$ comme une intégrale première du système à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe $G = G_1 \times \mathbf{R}$ (produit direct), de dimension 4. Les orbites régulières de l'action coadjointe de ce groupe étant de dimension 2, et l'espace des phases (fibré cotangent à G_1) de dimension 6, la condition de complète intégrabilité non commutative est bien vérifiée, en tout point régulier du dual de l'algèbre de Lie de G.

On sait d'ailleurs que ce système est aussi complètement intégrable, au sens usuel de l'intégrabilité commutative; le hamiltonien H, une des composantes du moment cinétique $\overrightarrow{m}$ dans un repère orthonormé fixe, par exemple m_3, et le carré du module du moment cinétique, ${m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_3}^2$, est un système de trois intégrales premières deux à deux en involution. Cette circonstance n'est pas exceptionnelle: Mishchenko et Fomenko [19] on montré que sous des hypothèses assez générales, les systèmes satisfaisant les conditions de complète intégrabilité non commutative étaient aussi complètement intégrables au sens usuel.

3.5. Fibrations isotropes symplectiquement complètes.

Plus généralement, Dazord et Delzant [6] ont considéré un morphisme de Poisson $f : M \to P$ d'une variété symplectique (M, Ω) de dimension $2n$ dans une variété de Poisson P de dimension p, qui est aussi une submersion, et dont les fibres sont des sous-variétés isotropes de M. On sait alors (Libermann [14]) que l'orthogonal symplectique du fibré tangent aux fibres est complètement intégrable. Le cas étudié par Mishchenko et Fomenko est celui où P est le dual $\mathcal{G}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, muni de sa structure de Lie-Poisson canonique.

On remarquera que le rang du tenseur de Poisson de P, c'est-à-dire la dimension des feuilles symplectiques de P, est constant, égal à $2 \dim P - \dim M = 2(p - n)$. C'est la forme que prend ici la condition de complète intégrabilité non commutative.

Dazord et Delzant ont notamment montré qu'une fibre compacte de f possède un voisinage qui s'identifie, par un difféomorphisme symplectique, à un ouvert du produit du fibré cotangent à un tore de dimension $k = 2n - p$ par $\mathbf{C}^r$, avec $r = n - k$, la fibre considérée s'identifiant au produit de la section nulle du fibré cotangent au tore par l'origine de $\mathbf{C}^r$. On décrira plus loin (paragraphe 5) les aspects plus globaux de leur étude.

4. Étude globale. La monodromie

4.1. Les paragraphes qui précèdent concernent l'existence de variables actions-angles, soit au voisinage d'un point, soit au voisinage d'une fibre de l'application f. Duistermaat [9] a étudié l'existence globale de variables actions-angles, et mis en évidence de très intéressantes notions qu'on va brièvement décrire.

On considère une variété symplectique (M, Ω) de dimension $2n$, et une submersion surjective $f : M \to P$ de M sur une variété P, de dimension n, dont les fibres sont des sous-variétés lagrangiennes connexes et compactes de M. Le théorème de Liouville-Arnold-Avez montre que ces fibres sont des tores lagrangiens, et que chacune d'elles possède un voisinage sur lequel existent des variables actions-angles permettant d'identifier ce voisinage à un ouvert d'un fibré cotangent au tore de dimension n, les fibres voisines de la fibre considérée s'identifiant aux graphes de 1-formes constantes sur le tore.

Soit b un point de P, et $N_b = f^{-1}(b)$. Pour tout $\eta \in T_b^* P$, $f^* \eta$ est une section de $T_{N_b}^* M$, donc $\sharp(f^* \eta)$ est une section de $T_{N_b} M$. En utilisant le fait que N_b est lagrangienne, on montre aisément que $\sharp(f^* \eta)$ est tangent à N_b, donc est un champ de vecteurs sur N_b. On vérifie que $\eta \mapsto \sharp(f^* \eta)$ est un isomorphisme de $T_b^* P$ sur un espace vectoriel de champs de vecteurs sur N_b. Dans cet espace vectoriel (de dimension n), les champs de vecteurs dont le flot est périodique de période 2π forment un réseau de rang n. Les éléments correspondants de $T_b^* P$ forment aussi un réseau de rang n, dans l'espace vectoriel $T_b^* P$ de dimension n.

En effectuant cette construction pour tout point b de P, on obtient une sous-variété R de T^*P, constituant, pour la projection canonique $T^*P \to P$, un revêtement de P, et dont la fibre au dessus de chaque point $b \in P$ est un réseau de rang n de T_b^*P. On montre aisément que R est une sous-variété lagrangienne de T^*P, muni de sa structure symplectique canonique.

D'autre part, à tout $b \in P$ et tout $\eta \in T_b^*P$, on associe la transformation de la fibre $f^{-1}(b)$ obtenue en prenant le flot intégral du champ de vecteurs $\sharp(f^*\eta)$ pour la valeur 2π du paramètre. On obtient ainsi une action fibrée de T^*P sur M. On remarque qu'à chaque élément de la sous-variété R de T^*P correspond la transformation identique de la fibre associée de M.

Le quotient $\widetilde{M} = T^*P/R$ est une variété fibrée au dessus de P, dont les fibres sont des tores de dimension n. Cette variété agit, fibre par fibre, sur la variété M, par une action libre et transitive sur chaque fibre $\Phi : \widetilde{M} \times_P M \to M$. La forme symplectique canonique de T^*P passe au quotient, et détermine sur $\widetilde{M}$ une forme symplectique $\widetilde{\Omega}$. On remarquera que les fibres de $(\widetilde{M}, \widetilde{\Omega})$, pour la fibration définie par la projection canonique $q : \widetilde{M} \to P$, sont des tores lagrangiens, tout comme les fibres de (M, Ω) pour la submersion $f : M \to P$.

Le choix d'une section locale $s : U \to M$ de $f : M \to P$, au dessus d'un ouvert U de P, permet de définir, grâce à l'action fibrée de $\widetilde{M}$ sur M, un difféomorphisme $\Psi : z \mapsto \Phi\bigl(z, s \circ q(z)\bigr)$de l'ouvert $q^{-1}(U)$ de $\widetilde{M}$ sur l'ouvert $f^{-1}(U)$ de M. Ce difféomorphisme est symplectique si et seulement si la section s est lagrangienne.

Considérons alors une famille de sections locales lagrangiennes $s_i : U_i \to M$ de f, $i \in I$, ensemble d'indices, telle que les U_i forment un recouvrement ouvert de P. Pour chaque $i \in I$ on définit comme ci-dessus un difféomorphisme symplectique $\Psi_i : q^{-1}(U_i) \to f^{-1}(U_i)$. Pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que $U_i \cap U_j$ soit non vide, il existe une section lagrangienne unique $\chi_{ji} : U_i \cap U_j \to \widetilde{M}$ de q telle que, pour tout z_i et $z_j \in q^{-1}(U_i \cap U_j)$, on ait $\Psi_j(z_j) = \Psi_i(z_i)$ si et seulement si $z_i = z_j + \chi_{ji} \circ q(z_j)$. La variété symplectique (M, Ω) s'identifie alors au quotient de la réunion disjointe des ouverts $q^{-1}(U_i)$ de $\widetilde{M}$ par la relation d'équivalence selon laquelle $z_i \in q^{-1}(U_i)$ et $z_j \in q^{-1}(U_j)$ sont équivalents si et seulement si $z_i = z_j + \chi_{ji} \circ q(z_j)$. On peut donc reconstruire (M, Ω) à partir de $(\widetilde{M}, \widetilde{\Omega})$ et de la famille de sections locales lagrangiennes $\chi_{ji} : U_i \cap U_j \to \widetilde{M}$ de $q : \widetilde{M} \to P$. On vérifie d'ailleurs qu'à un difféomorphisme symplectique fibré au dessus de P près, la construction ainsi effectuée ne dépend que de la classe de cohomologie $[\mu] \in H^1\bigl(P, \Lambda(\widetilde{M})\bigr)$ définie par la famille de sections $\mu = (\chi_{ji})$, $(j, i) \in I^2$. On a noté $\Lambda(\widetilde{M})$ l'ensemble des sections lagrangiennes locales de $q : \widetilde{M} \to P$.

À partir de la suite exacte

$$0 \to R \to \Lambda(T^*P) \to \Lambda(\widetilde{M}) \,,$$

on peut définir un opérateur

$$\delta : H^1\bigl(P, \Lambda(\widetilde{M})\bigr) \to H^2(P, R) \,.$$

L'image $\delta\bigl([\mu]\bigr)$ de la classe de cohomologie $[\mu]$ par cet opérateur est appelée *classe de Chern* de la fibration $f : M \to P$. Duistermaat [9] a prouvé les résultats suivants.

4.2. Théorème (Duistermaat). *Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

1. *En tant que variété différentiable fibrée sur P, M est isomorphe à $\widetilde{M} = T^*P/R$.*

2. *Il existe une section globale (pas nécessairement lagrangienne) de $f : M \to P$.*

3. *La classe de Chern $\delta\big([\mu]\big)$ est triviale.*

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, $s : P \to M$ étant une section globale de f, on montre que la classe de cohomologie $[\mu]$ s'identifie à la classe $[s^*\Omega]$ (pour la cohomologie de De Rham). Duistermaat en a déduit le théorème suivant.

4.3. Théorème (Duistermaat). *Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

1. *En tant que variété symplectique fibrée sur P, (M, Ω) est isomorphe et symplectomorphe à $(\widetilde{M} = T^*P/R, \widetilde{\Omega})$.*

2. *Il existe une section globale lagrangienne de $f : M \to P$.*

3. *La classe de Chern $\delta\big([\mu]\big)$ est triviale, et il existe une section globale $s : P \to M$ de f telle que $s^*\Omega$ soit une 2-forme exacte sur P*

4.4. La monodromie. Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on voit aisément que pour toute section globale $s' : P \to M$ de f, ${s'}^*\Omega$ est une 2-forme fermée sur P. La fibration lagrangienne $f : M \to P$ est alors isomorphe et symplectomorphe à $q : \widetilde{M} = T^*P/R \to P$. Mais il existe encore une obstruction à sa trivialité, la *monodromie* du revêtement en réseau R de P.

Considérons en effet un lacet (courbe fermée) γ dans P, ayant pour origine et extrémité un point $b \in P$. La fibre R_x de R au dessus de chaque point x de γ est un réseau de rang n de T^*_xP. En faisant parcourir le lacet γ par le point x, et en suivant par continuité le réseau R_x, on définit un automorphisme du réseau R_b. On vérifie que cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ. On définit ainsi un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(P, b)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(R_b)$ des automorphismes de R_b. Moyennant le choix d'une base du réseau R_b, on peut considérer cet automorphisme comme à valeurs dans $GL(n, \mathbf{Z})$. On l'appelle *monodromie* de la fibration lagrangienne $f : M \to P$.

En substituant à M et à P des revêtements convenablement choisis, on peut toujours se ramener au cas où la monodromie est triviale.

Lorsque la monodromie est triviale, il existe n 1-formes fermées η_i, $(1 \leq i \leq n)$, sur P, dont les valeurs en chaque point $b \in P$ forment une base du réseau R_b. Lorsqu'on peut choisir ces 1-formes de manière telle qu'elles soient exactes, on peut définir sur P n fonctions I_i vérifiant $dI_i = \eta_i$, $1 \leq i \leq n$. C'est notamment le cas lorsque Ω est exacte (d'après la formule intégrale donnée au paragraphe 2.3 permettant le calcul des actions). Les I_i sont des variables actions globalement définies.

5. Généralisations

Le problème étudié par Duistermaat est celui de la structure globale d'une fibration $f : M \to P$ d'une variété symplectique (M, Ω) de dimension $2n$, à fibres connexes et compactes, dans le cas où ces fibres sont des sous-variétés lagrangiennes de M. Plus généralement, on peut considérer le cas où ces fibres ne sont pas nécessairement lagrangiennes, mais où la variété P est munie d'une structure de Poisson, définie par un 2-tenseur Λ, et où la submersion f est un morphisme de Poisson. Le cas traité par Duistermaat est celui où la variété P, de dimension n, est munie de la structure de Poisson triviale.

5.1. Cas commutatif. Dazord et Delzant [6] ont étudié le cas où les fibres de f sont isotropes, connexes et compactes. Ce sont alors des tores de dimension $k \leq n$. Le rang de Λ est constant, égal à $2 \dim P - \dim M$. En suivant le raisonnement de Duistermaat exposé dans le paragraphe précédent, on peut définir une action fibrée, non plus de T^*P, mais du noyau $\ker \Lambda$ du tenseur de Poisson Λ (considéré comme un morphisme antisymétrique de T^*P dans TP), sur la variété M. Soit en effet $b \in P$, $N_b = f^{-1}(b)$ et $\eta \in T_b^*P$. La section $\sharp(f^*\eta)$ de $T_{N_b}M$ est un champ de vecteurs sur N_b si et seulement si $f^*\eta$ appartient à l'annulateur de l'orthogonal symplectique de TN_b. Mais puisque f est un morphisme de Poisson, l'image par Tf de l'orthogonal symplectique de TN_b est l'espace tangent en b à la feuille symplectique de P qui passe par ce point, c'est-à-dire l'image de Λ_b. Par suite, $\sharp(f^*\eta)$ est un champ de vecteurs sur N_b si et seulement si η appartient à $\ker \Lambda_b$.

Comme dans le paragraphe précédent, l'ensemble des éléments η de $\ker \Lambda$ dont l'action sur la fibre correspondante de M est l'identité est un revêtement R de P, dont la fibre au dessus de chaque point b de P est un réseau de rang k de $\ker \Lambda_b$. Le quotient $\widetilde{M} = \ker \Lambda / R$ possède une structure de variété différentiable, de dimension $2n$, égale à celle de M, fibrée, par la projection canonique q, sur la variété de Poisson (P, Λ), les fibres étant des tores de dimension k. On montre que comme dans le cas étudié précédemment, $\widetilde{M}$ agit sur M par une action fibrée, libre et transitive sur chaque fibre. On peut encore définir la *classe de Chern* de la fibration $f : M \to P$, et sa *monodromie*. Il n'existe cependant pas, en général, de forme symplectique globale $\widetilde{\Omega}$ sur $\widetilde{M}$ pour laquelle $q : \widetilde{M} \to P$ soit une fibration à fibres isotropes et un morphisme de Poisson, parce qu'il n'existe pas nécessairement de 2-forme fermée globale sur la variété de Poisson (P, Λ) induisant sur chaque feuille symplectique la structure symplectique de cette feuille. Ce cas, dans lequel la variété de Poisson (P, Λ) est dite *à 2-forme fermée* (Lichnerowicz [16]), se rencontre notamment lorsque la classe de Chern et la monodromie sont triviales, (M, Ω) étant alors symplectomorphe à $(\widetilde{M}, \widetilde{\Omega})$.

5.2. Cas non commutatif. Lorsqu'on ne suppose plus les fibres de f isotropes, le rang du tenseur de Poisson Λ n'est plus nécessairement constant et, pour chaque point $b \in P$, $\ker \Lambda_b$ possède une structure naturelle d'algèbre de Lie, duale de la linéarisée de la structure de Poisson transverse à la feuille symplectique de P passant par b. On peut encore construire une action de cette algèbre de Lie sur $f^{-1}(b)$. Delzant [7] a considéré le cas où $L = f^{-1}(b)$ est lagrangienne, connexe et compacte. Moyennant certaines hypothèses (notamment en supposant la structure de Poisson transverse à la feuille symplectique passant par b linéarisable), il a montré qu'il existe un groupe de Lie compact $\overline{G}$ agissant, par une action hamiltonienne, sur un ouvert de M contenant L, et que ce voisinage s'identifie, par un difféomorphisme symplectique, à un voisinage de la section nulle de $T^*\overline{G}$, L s'identifiant à cette section nulle et $\overline{G}$ agissant sur son fibré cotangent par le relèvement canonique de son action sur lui-même par translation à gauche.

On trouvera d'autre part dans [17] et [20] des modèles locaux du voisinage d'une orbite d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact, pas nécessairement abélien, sur une variété symplectique, et dans [7] d'intéressants résultats globaux sur les actions hamiltoniennes d'un tore de dimension n sur une variété symplectique de dimension $2n$.

6. Singularités des variables actions-angles

6.1. Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n fonctions numériques, définies sur M, deux à deux en involution. Les différentielles de ces n fonctions ne sont en général pas indépendantes en tout point de M. Pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on note U_k l'ensemble des points de M où $(df_1, \dots, df_n)$ est de rang k. Les U_k sont deux à deux disjoints, et ont pour réunion M. On voit aisément que U_n est un ouvert de M, qu'on supposera dense dans M. On dira que $\bigcup_{k=0}^{n-1} U_k$ est *l'ensemble singulier* de f, et pour chaque entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$, on appellera U_k *strate de rang* k de cet ensemble.

Pour des raisons topologiques, l'ensemble singulier de f est en général non vide. Si par exemple M est compacte, la différentielle de chacune des fonctions f_i s'annule en deux points au moins. L'étude de la structure de cet ensemble singulier est intéressante, et peut avoir d'importantes applications à l'analyse des propriétés globales des courbes intégrables d'un système hamiltonien (M, Ω, H) complètement intégrable admettant $f_1, \dots, f_n$ comme intégrales premières. Il est facile de montrer que le rang de $(df_1, \dots, df_n)$ est constant le long de chaque courbe intégrale d'un tel système, donc que cette courbe intégrale est entièrement contenue, soit dans l'ouvert dense U_n sur lequel f est de rang n, soit dans une strate U_k $(0 \leq k \leq n-1)$ de l'ensemble singulier de f. Dans tous les exemples classiques, on constate que la détermination explicite de cette courbe intégrale est plus facile lorsqu'elle est contenue dans l'ensemble singulier de f que lorsqu'elle est contenue dans U_n, et que cette facilité est d'autant plus grande que le rang de la strate contenant cette courbe intégrale est plus petit.

Eliasson [10] a établi d'importants résultats sur la structure locale de l'ensemble singulier, et notamment, a étendu au cas singulier le théorème d'existence de variables actions-angles. Fomenko [11] a étudié certaines propriétés topologiques globales de l'ensemble singulier. Plus précisément, il a étudié la manière dont varie la topologie de l'image réciproque $f^{-1}(a)$ d'un point $a \in \mathbf{R}^n$, lorsque a varie, et traverse l'ensemble des valeurs singulières de f. Nous n'exposerons pas ici en détail les travaux de ces deux auteurs. Nous nous limiterons à quelques remarques simples et à l'étude de quelques exemples.

6.2. Remarque. On montre aisément que la famille de champs de vecteurs ${}^\sharp df_1, \dots, {}^\sharp df_n$ définit un champ de directions complètement intégrable sur M, au sens généralisé de Stefan [21] et Sussmann [22]. Les feuilles du feuilletage de Stefan définies par ce champ de directions sont des sous-variétés immergées isotropes de M, et pour chaque entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, U_k n'est autre que la réunion des feuilles de dimension k de ce feuilletage. Par conséquent, si U_k est une sous-variété de M, sa dimension est nécessairement supérieure ou égale à k. Chaque courbe intégrale de $^\sharp dH$, ou de l'un quelconque des champs de vecteurs $^\sharp df_i$ $(1 \leq i \leq n)$, est entièrement contenue dans une feuille de ce feuilletage.

6.3. Exemple: l'oscillateur harmonique. Dans ce cas $M = \mathbf{R}^{2n}$ (coordonnées $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$), identifié éventuellement à $\mathbf{C}^n$ (coordonnées $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$), muni de la forme symplectique

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} dy_k \wedge dx_k \,.$$

Le hamiltonien du système est

$$H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \,, \qquad \text{avec} \quad f_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) \,,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des constantes.

Le système (M, Ω, H) est complètement intégrable, car il admet $f = (f_1, \ldots, f_n)$ comme famille d'intégrales premières deux à deux en involution.

L'ensemble U_n des points réguliers de f est l'ouvert dense des $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que pour tout l $(1 \leq l \leq n)$, $|z_l| \neq 0$.

Plus généralement, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, U_k est l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que l'on ait $|z_l| = 0$ pour exactement $n - k$ valeurs distinctes de l'indice l, $1 \leq l \leq n$. On remarque que U_k est réunion d'un nombre fini $C_n^k = n!/k!(n-k)!$ de sous-variétés symplectiques de M, deux à deux disjointes, toutes de dimension $2k$, dont les frontières ont pour réunion $\displaystyle\bigcup_{r=0}^{k-1} U_r$. En particulier U_0 est réduit à un point, l'origine.

Le feuilletage de Stefan de M défini par $(^\sharp df_1, \ldots, ^\sharp df_n)$ a pour feuilles des tores de diverses dimensions k, $0 \leq k \leq n$, la réunion des feuilles de dimension k étant la sous-variété symplectique U_k de M, de dimension $2k$.

L'étude des courbes intégrales de $^\sharp dH$ contenues dans U_k se ramène à l'étude d'un oscillateur harmonique à k degrés de liberté, dans un espace des phases de dimension $2k$.

Le lemme et la proposition qui suivent montrent que certaines observations faites sur l'exemple de l'oscillateur harmonique ont une portée générale. Mais donnons d'abord une définition.

6.4. Définition. Deux familles $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ de fonctions numériques différentiables définies sur M sont dites *équivalentes* sur un ouvert V de M si, en tout point x de V, $\big(df_1(x), \ldots, df_n(x)\big)$ et $\big(dg_1(x), \ldots, dg_n(x)\big)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de T_x^*M.

6.5. Lemme. *Tout point de la strate U_{n-1} de rang $n-1$ de l'ensemble singulier de f, possède un voisinage ouvert V dans M sur lequel existent des coordonnées locales canoniques $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, telles que l'on ait sur V*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i$$

et, pour une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_{\sigma(i)} = y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1\,, \qquad f_{\sigma(n)} = f_{\sigma(n)}(x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)\,.$$

Démonstration. En chaque point de U_{n-1}, $(df_1, \ldots, df_n)$ est de rang $n-1$. Il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $df_{\sigma(1)}, \ldots, df_{\sigma(n-1)}$ soient linéairement indépendantes, et que $df_{\sigma(n)}$ soit, en ce point, combinaison linéaire de $df_{\sigma(1)}, \ldots, df_{\sigma(n-1)}$. D'après une généralisation due à Cartan du théorème de Jacobi-Lie-Carathéodory ([15], page 136) il existe, sur un voisinage ouvert V du point considéré dans M, des coordonnées canoniques $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ telles que, sur V,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i \qquad \text{et} \qquad f_{\sigma(i)} = y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1\,.$$

En écrivant que $\{f_{\sigma(i)}, f_{\sigma(n)}\} = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$, on obtient

$$\frac{\partial f_{\sigma(n)}}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n-1\,.$$

Sur V, la fonction $f_{\sigma(n)}$ ne dépend donc, éventuellement, que des coordonnées locales $x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$. $\square$

6.6. Remarques.

1. Réciproquement d'ailleurs, étant donné un système de coordonnées locales canoniques $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ sur un ouvert V de la variété symplectique (M, Ω), en posant $f_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et en prenant pour f_n une fonction différentiable quelconque des seules coordonnées locales $x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$, on obtient un système $(f_1, \ldots, f_n)$ de fonctions deux à deux en involution, dont les différentielles forment, sur V, un système partout de rang $\geq n-1$.

2. Dans les hypothèses et avec les notations du lemme, l'ensemble des points de V appartenant à la strate U_{n-1} est défini, en coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, par les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{\sigma(n)}}{\partial x_n}(x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0\,, \\[2mm] \dfrac{\partial f_{\sigma(n)}}{\partial y_n}(x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0\,. \end{cases}$$

En étudiant la possibilité de résoudre ce système en déterminant x_n et y_n en fonction de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, on est conduit à la définition suivante.

6.7. Définition. On dit que f est *transversalement non dégénérée* en un point x de la strate U_{n-1} si, dans les hypothèses et avec les notations du lemme, on a en ce point

$$\left(\frac{\partial^2 f_{\sigma(n)}}{\partial x_n^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f_{\sigma(n)}}{\partial y_n^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f_{\sigma(n)}}{\partial x_n \partial y_n}\right)^2 \neq 0\,.$$

Plus précisément, on dit que f est *elliptique* (resp., *hyperbolique*) au point x si le membre de gauche de l'expression ci-dessus est strictement positif (resp., strictement négatif) en ce point.

On vérifie que les notions introduites dans cette définition sont intrinsèques: bien qu'elles soient formulées grâce au système de coordonnées locales canoniques (non unique) dont on a prouvé l'existence dans le lemme 6.5, elles ne dépendent pas du choix de ce système.

6.8. Proposition. *On suppose f transversalement non dégénérée en un point x de la strate U_{n-1}. Il existe alors un voisinage ouvert V de x dans M tel que $V \cap U_{n-1}$ soit une sous-variété symplectique de M de dimension $2n-2$. De plus, il existe une famille $g = (g_1, \dots, g_n)$ de fonctions numériques différentiables définies sur V deux à deux en involution, équivalente à f (au sens de la définition 6.4), telle que $dg_1 \dots, dg_{n-1}$ soient linéairement indépendantes sur $V \cap U_{n-1}$ et que g_n et dg_n soient nulles sur $V \cap U_{n-1}$.*

Démonstration. Compte tenu de la remarque 6.6.2, et avec les mêmes notations, le théorème des fonctions implicites montre que le système d'équations qui définit $V \cap U_{n-1}$ peut être résolu sous la forme

$$x_n = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})\,, \qquad y_n = \psi(y_1, \dots, y_{n-1})\,.$$

On vérifie aisément que la sous-variété définie par ces équations, de dimension $2n-2$ puisque $x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}$ peuvent être choisis librement, est symplectique. Il suffit alors de poser, pour $1 \leq i \leq n-1$,

$$g_i = f_{\sigma(i)}\,,$$

et, pour $i = n$,

$$\begin{aligned} g_n(x_n, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) &= f_{\sigma(n)}(x_n, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \\ &\quad - f_{\sigma(n)}\big(\varphi(y_1, \dots, y_{n-1}), y_1, \dots, y_{n-1}, \psi(y_1, \dots, y_n)\big)\,. \end{aligned} \qquad \square$$

6.9. Remarque. Lorsque f est transversalement non dégénérée en tout point de la strate U_{n-1}, cette strate est une sous-variété symplectique de dimension $2n-2$ de la variété symplectique M. Sur chaque composante connexe de cette sous-variété, f est soit partout elliptique, soit partout hyperbolique.

6.10. Quelques exemples.

1. **Un exemple simple.** On prend pour variété symplectique (M, Ω) le fibré cotangent à un tore de dimension 2, muni de sa forme symplectique canonique. Les coordonnées choisies sont q_1 et q_2, coordonnées angulaires (définies modulo 2π) sur le tore, p_1 et p_2, coordonnées conjuguées sur les fibres cotangentes. On prend pour famille $f = (f_1, f_2)$ de fonctions en involution

$$\begin{cases} f_1 = p_1\,, \\ f_2 = {p_2}^2 + \cos q_2\,. \end{cases}$$

L'ensemble critique est entièrement de rang 1, puisque df_1 ne s'annule pas, et comporte deux composantes connexes définies respectivement par

$$\begin{cases} p_2 = 0 \\ q_2 = 0 \end{cases}, \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} p_2 = 0 \\ q_2 = \pi \end{cases}.$$

Chacune de ces composantes connexes est une sous-variété symplectique de dimension 2, difféomorphe à un cylindre. On vérifie aisément que f est hyperbolique sur la première (celle sur laquelle $q_2 = 0$), et elliptique sur la seconde (celle sur laquelle $q_2 = \pi$).

L'image de l'application f est la partie du plan (f_1, f_2) définie par f_1 quelconque, $-1 \leq f_2 \leq 1$. Ses valeurs critiques sont f_1 quelconque, $f_2 = \pm 1$.

Soit $(k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$. La fibre $f^{-1}(k_1, k_2)$ est

- vide pour $k_2 < -1$,
- connexe, constituée d'un tore lagrangien pour $-1 < k_2 < 1$,
- non connexe, réunion de deux tores lagrangiens disjoints pour $1 < k_2$.

La transition entre la fibre vide et la fibre connexe se fait, lorsque k_2 traverse la valeur -1, en passant par une fibre critique de dimension 1, difféomorphe à un cercle, contenue dans la composante connexe elliptique de la strate U_1 ($q_2 = \pi$, $p_2 = 0$, p_1 fixé, q_1 quelconque). Lorsque k_2 devient inférieur à -1, la fibre s'évanouit, et lorsqu'au contraire k_2 devient supérieur à -1, la fibre acquiert une dimension supplémentaire pour devenir un tore de dimension 2.

La transition entre la fibre connexe constituée d'un seul tore, et la fibre non connexe réunion de deux tores disjoints se fait, lorsque k_2 traverse la valeur 1, en passant par une fibre critique homéomorphe à la surface obtenue en faisant tourner une lemniscate autour d'un axe contenu dans le plan de cette courbe et ne la rencontrant pas. La partie singulière (ligne d'auto-intersection) de cette fibre critique est un cercle ($p_2 = 0$, $q_2 = 0$, p_1 fixé, q_1 quelconque) contenu dans la composante connexe hyperbolique de la strate U_1. Lorsque k_2 devient légèrement inférieur à 1, cette surface se transforme en un tore (la lemniscate se transformant, par ouverture au point double, en une courbe fermée simple). Lorsque k_2 devient légèrement supérieur à 1, elle se transforme en réunion de deux tores disjoints (la lemniscate se transformant cette fois en réunion de deux courbes fermées simples disjointes).

2. **Le pendule sphérique.** Cet exemple a été étudié par Duistermaat et Cushman [9] qui ont montré que la monodromie des actions-angles était non triviale. Cushman [4] a fait une étude très approfondie des tores lagrangiens obtenus en donnant une valeur fixée aux deux intégrales premières, et de leurs bifurcations à la traversée de valeurs critiques.

On reprend les notations introduites au paragraphe 2.4. La famille de fonctions $f = (f_1, f_2)$ considérée ici est $(f_1 = H, f_2 = K)$. On voit aisément que l'ensemble critique comporte deux strates, U_0 de rang 0 et U_1 de rang 1.

La strate U_0 est discrète, elle est formée de deux points, correspondant aux positions d'équilibre du système ($\overrightarrow{x} = -R\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{p} = 0$) et ($\overrightarrow{x} = R\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{p} = 0$).

La strate U_1 est une sous-variété symplectique de dimension 2, comportant deux composantes connexes. Elle est formée par l'ensemble des données de Cauchy pour lesquelles le mouvement du système est un mouvement stationnaire de Huygens (rotation du point mobile, à vitesse constante, sur un cercle horizontal). Les deux composantes connexes correspondent aux deux sens possibles de rotation. L'adhérence de U_1 est homéomorphe à un cône à deux nappes, le sommet de ce cône correspondant à la position d'équilibre basse (stable) du pendule. On vérifie que f est elliptique en tout point de U_1.

3. **Le problème d'Euler-Lagrange.** Il convient de terminer par un tel exemple un exposé à colloque célébrant le bicentenaire de la publication de la Mécanique Analytique de Lagrange! Rappelons qu'il s'agit du mouvement d'un corps solide de révolution, ayant

un point fixe situé sur son axe de révolution, en présence de pesanteur. Avec les mêmes notations que dans l'étude du problème d'Euler-Poinsot (paragraphe 3.4), le hamiltonien H du système et ses deux intégrales premières K_L (composante verticale du moment cinétique) et K_R (projection du moment cinétique sur l'axe de révolution) ont pour expressions

$$\begin{aligned} H(\varphi, \overrightarrow{M}) &= \frac{1}{2I_1}({M_1}^2 + {M_2}^2) + \frac{1}{2I_3}{M_3}^2 - k\overrightarrow{e_3}.\varphi(\overrightarrow{e_3})\,; \\ K_L(\varphi, \overrightarrow{M}) &= -\varphi(\overrightarrow{M}).\overrightarrow{e_3}\,; \\ K_R(\varphi, \overrightarrow{M}) &= M_3 = \overrightarrow{M}.\overrightarrow{e_3}\,. \end{aligned}$$

La famille de fonctions en involution $f = (f_1, f_2, f_3)$ considérée ici est $(f_1 = H, f_2 = K_L, f_3 = K_R)$. Son ensemble critique comporte une strate U_1 de rang 1 et une strate U_2 de rang 2.

La strate U_1 est définie par les équations

$$M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 0\,, \qquad \overrightarrow{\varphi(e_3)} = \pm\vec{e}_3\,.$$

Elle est formée de l'ensemble des données de Cauchy de mouvements de rotation stationnaire, l'axe de révolution étant vertical. C'est une sous-variété symplectique de dimension 2, qui comporte deux composantes connexes (correspondant respectivement aux cas où le centre de masse du corps est au dessus ou au dessous du point fixe), toutes deux difféomorphes à un cylindre.

La strate U_2 est une sous-variété symplectique de dimension 4. Elle est formée de l'ensemble des données de Cauchy de mouvements de nutation stationnaires (dans lesquels l'axe de révolution fait un angle constant avec la verticale, et tourne à vitesse constante). On peut, pour l'étudier, considérer l'application (de rang 5)

$$(\varphi, \overrightarrow{M}) \mapsto (\overrightarrow{P}, \overrightarrow{M})\,,$$

où

$$\overrightarrow{P} = \frac{l}{k}\,\varphi^{-1}(\overrightarrow{e_3})$$

est la force de pesanteur dans un repère lié au corps solide.

Cushman et Knörrer [5] ont étudié l'ensemble des valeurs critiques de f, c'est-à-dire l'image de l'ensemble critique par l'application f elle-même. Ils ont montré que l'image de la strate U_1 de rang 1 était formée de deux arcs de courbe disjoints, tandis que l'adhérence de l'image de la strate U_2 de rang 2 était une surface ayant la forme d'une calebasse dans l'espace $\mathbf{R}^3$ (figure 2). L'un des arcs de courbe constituant l'image de la strate de rang 1 est tracé sur cette surface, et la sépare en deux composantes connexes. L'autre arc de courbe joint, comme un fil tendu, deux points de la calebasse appartenant, le premier à une des composantes connexes de l'image de la strate U_2, le second à l'autre composante connexe. Cushman et Knörrer ont en outre étudié les tores invariants obtenus en considérant l'image réciproque d'un point par l'application f, et leurs bifurcations, et ont montré que la monodromie des actions-angles était non triviale.

Figure 2

Bibliographie

1. R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, second edition, Benjamin, New York, 1978.
2. V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, éditions Mir, Moscou, 1974.
3. V. Arnold et A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
4. R. Cushman, *Geometry of the energy momentum mapping of the spherical pendulum*, Centrum voor Wiskunde en Informatica Newsletter, **1** (1983) 4–18.
5. R. Cushman and H. Knörrer, *The energy momentum mapping of the Lagrange top*, in *Differential geometric methods in physics* (H. Doebner *et al.*, ed.), Lecture notes in mathematics **1139** (1985) 12–24, Springer Verlag, New York.
6. P. Dazord et T. Delzant, *Le problème général des variables actions-angles*, J. Differential geometry **26** (1987) 223–251.
7. T. Delzant, *Variables actions-angles non commutatives et exemples d'images convexes de l'application moment*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1986, Paris.
8. M. Duflo et M. Vergne, *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie*, C. R. Acad. Sc. Paris **268** A (1969) 583–585.
9. J. J. Duistermaat, *On global action-angle variables*, Comm. on Pure and Appl. Math. **33** (1980) 687–706.
10. H. Eliasson, *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*, Thesis, Department of Mathematics, University of Stockholm, Sweden, 1984.
11. A. T. Fomenko, *The topology of surfaces of constant energy in integrable hamiltonian systems and obstructions to integrability*, Math. USSR Izvestiya **29** 3 (1987) 629–658.

12. J.-P. Françoise, *Sur les actions-angles de la toupie de Kowalevski*, C. R. Acad. Sc. Paris **300** I (1985) 427–430.
13. J. P. Françoise, *Calculs explicites d'actions-angles*, Séminaire de Mathématiques supérieures de l'université de Montréal (éd. G. Sabidussi) **102** (1986) 101–120.
14. P. Libermann, *Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique*, Astérisque **107-108** (1983) 43–69.
15. P. Libermann and C. M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
16. A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977) 253–300.
17. C.-M. Marle, *Modèle d'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino **43** 2 (1985) 227–251.
18. J. E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Mathematical Physics **5** (1974) 121–130.
19. A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko, *Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems*, Funct. Anal. and Appl. **12** (1978) 113–121.
20. R. Nicolaï, *Modèle d'action libre et hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe sur une variété symplectique*, Thèse de troisième cycle, université Paris VI, 1984, Paris.
21. P. Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. **29** (1974) 699–713.
22. H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973) 171–188.
23. A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Math. **6** (1971) 329–346.