

Les géométries non euclidiennes et les symétries cachées du problème de Kepler

Charles-Michel Marle

cmm1934@orange.fr

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

Sommaire

I. Le problème de Kepler

1. Historique
2. Mise en équations
3. Moment cinétique
4. La loi des aires
5. Hodographe
6. Équation polaire de l'orbite
7. L'énergie
8. Hodographe et énergie
9. Hodographe pour $E > 0$
10. Orbite et hodographe pour $\varepsilon = 0$
11. Orbite et hodographe pour $\varepsilon = 1/2$
12. Orbite et hodographe pour $\varepsilon = 1$
13. Orbite et hodographe pour $\varepsilon = 2$
14. La troisième loi de Kepler

Sommaire (2)

II. Flot et variété des mouvements

1. Rappel
2. Cas symplectique

III. Mouvements du problème de Kepler

1. Généralités
2. Réduction
3. Mouvements d'énergie fixée

IV. Mouvements réduits et géodésiques

1. Cas d'énergie $e \neq 0$
2. Cas $e = 0$

Sommaire (3)

V. Prolongement aux fibrés cotangents

1. Généralités
2. Cas $e \neq 0$
3. Cas $e = 0$
4. Anti-symplectomorphisme

VI. Transformation du hamiltonien

1. Cas $e \neq 0$
2. Cas $e = 0$
3. Le flot transformé

VII Régularisation

1. Pourquoi n'obtient-on pas toutes les géodésiques ?
2. Les mouvements à moment cinétique nul
3. Identification
4. Le résultat

Sommaire (4)

VIII. Symétries

1. Les symétries du problème régularisé
2. Le vecteur excentricité
3. Vecteur excentricité et moment

IX. Projections stéréographique et cylindrique

X. Bibliographie

I. Le problème de Kepler. 1. Historique



En s'appuyant sur les observations et mesures de l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601), le mathématicien et astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) a découvert les lois qui (avec une très bonne approximation) régissent le mouvement des planètes.

Johannes Kepler (1571-1630)

I. Le problème de Kepler. 1. Historique



Johannes Kepler (1571–1630)

En s'appuyant sur les observations et mesures de l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601), le mathématicien et astronome allemand Johannes Kepler (1571–1630) a découvert les lois qui (avec une très bonne approximation) régissent le mouvement des planètes.

Aujourd'hui connues sous le nom de *Lois de Kepler*, elles s'énoncent ainsi :

I. Le problème de Kepler. 1. Historique (2)

Première loi de Kepler L'orbite de chacune des planètes du système solaire est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

I. Le problème de Kepler. 1. Historique (2)

Première loi de Kepler L'orbite de chacune des planètes du système solaire est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

Deuxième loi de Kepler Le segment de droite qui joint la planète au Soleil balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.

I. Le problème de Kepler. 1. Historique (2)

Première loi de Kepler L'orbite de chacune des planètes du système solaire est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

Deuxième loi de Kepler Le segment de droite qui joint la planète au Soleil balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.

Troisième loi de Kepler Dans le système solaire, le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand-axe de son orbite.

I. Le problème de Kepler. 1. Historique (3)



Le grand savant britannique Isaac Newton (1642–1727) a compris que les mouvements des corps pesants sur notre Terre et le mouvement des planètes du système solaire, étaient régies par les mêmes *lois de la dynamique*.

Sir Isaac Newton (1642–1727)

I. Le problème de Kepler. 1. Historique (3)



Sir Isaac Newton (1642–1727)

Le grand savant britannique Isaac Newton (1642–1727) a compris que les mouvements des corps pesants sur notre Terre et le mouvement des planètes du système solaire, étaient régies par les mêmes *lois de la dynamique*.

Il a découvert une formulation mathématique de ces lois, et a pu en déduire les *lois de Kepler*.

I. Le problème de Kepler. 2. Mise en équations

Soit P un point matériel de masse m , soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif O . Posons

I. Le problème de Kepler. 2. Mise en équations

Soit P un point matériel de masse m , soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif O . Posons

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

I. Le problème de Kepler. 2. Mise en équations

Soit P un point matériel de masse m , soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif O . Posons

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La force \vec{f} qui s'exerce sur P est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

k étant la constante caractérisant le champ attractif de O .

I. Le problème de Kepler. 2. Mise en équations

Soit P un point matériel de masse m , soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif O . Posons

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La force \vec{f} qui s'exerce sur P est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

k étant la constante caractérisant le champ attractif de O . Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}.$$

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique



Pour résoudre ces équations nous suivrons la méthode la plus simple, due au grand mathématicien irlandais *William Rowan Hamilton* (1805–1865) [9].

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique



Pour résoudre ces équations nous suivrons la méthode la plus simple, due au grand mathématicien irlandais *William Rowan Hamilton* (1805–1865) [9].

Le moment cinétique de P par rapport à O est

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

\times étant le produit vectoriel.

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique (2)

On vérifie aisément

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

donc \vec{L} est une intégrale première du mouvement.

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique (2)

On vérifie aisément

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

donc \vec{L} est une intégrale première du mouvement.

Intéressons-nous d'abord au cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} ne sont pas colinéaires, donc où à l'instant initial $\vec{L} \neq 0$. Comme \vec{L} reste constant, \vec{r} et \vec{p} ne sont jamais colinéaires.

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique (2)

On vérifie aisément

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

donc \vec{L} est une intégrale première du mouvement.

Intéressons-nous d'abord au cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} ne sont pas colinéaires, donc où à l'instant initial $\vec{L} \neq 0$. Comme \vec{L} reste constant, \vec{r} et \vec{p} ne sont jamais colinéaires.

Choisissons un trièdre orthonormé, d'orientation positive, d'origine O et de vecteurs unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z , tels que \vec{L} soit parallèle à l'axe \vec{e}_z , et soit L sa composante sur cet axe :

$$\vec{L} = L\vec{e}_z.$$

I. Le problème de Kepler. 3. Moment cinétique (3)

Les vecteurs \vec{r} et \vec{p} restent constamment parallèles au plan xOy . En notant θ l'angle polaire de \vec{r} , on a

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y ,$$

$$\vec{p} = m \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \vec{e}_x + m \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{L} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z .$$

I. Le problème de Kepler. 4. Loi des aires

On a donc

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Constante} .$$

I. Le problème de Kepler. 4. Loi des aires

On a donc

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Constante} .$$

C'est la *seconde loi de Kepler*, aussi appelée *loi des aires*, car $\frac{L}{2m}$ est l'aire balayée par le segment de droite OP par unité de temps, comptée positivement si θ (dont la variation est monotone) croît, et négativement s'il décroît.

I. Le problème de Kepler. 5. Hodographe

La variation de l'angle polaire θ étant monotone, on peut écrire

$$\frac{d\vec{p}}{d\theta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m^2 k}{L} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y).$$

I. Le problème de Kepler. 5. Hodographe

La variation de l'angle polaire θ étant monotone, on peut écrire

$$\frac{d\vec{p}}{d\theta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m^2 k}{L} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y).$$

Cette équation (qui ne contient plus r) est une équation différentielle en θ qui s'intègre aisément :

$$\vec{p} = \frac{m^2 k}{L} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + \vec{c},$$

où \vec{c} est la constante (vectorielle) d'intégration.

I. Le problème de Kepler. 5. Hodographe

La variation de l'angle polaire θ étant monotone, on peut écrire

$$\frac{d\vec{p}}{d\theta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m^2 k}{L} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y).$$

Cette équation (qui ne contient plus r) est une équation différentielle en θ qui s'intègre aisément :

$$\vec{p} = \frac{m^2 k}{L} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + \vec{c},$$

où \vec{c} est la constante (vectorielle) d'intégration.

On choisira \vec{e}_y de manière telle que

$$\vec{c} = c \vec{e}_y,$$

c étant une constante (de signe quelconque).

I. Le problème de Kepler. 5. Hodographe (2)

En prenant O pour origine traçons dans le plan xOy deux vecteurs égaux, respectivement, à \vec{c} et à \vec{p} . L'extrémité du vecteur égal à \vec{p} parcourt, lorsque θ varie, un cercle (ou un arc de cercle) ayant pour centre l'extrémité du vecteur égal à \vec{c} et pour rayon

$$R = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

I. Le problème de Kepler. 5. Hodographe (2)

En prenant O pour origine traçons dans le plan xOy deux vecteurs égaux, respectivement, à \vec{c} et à \vec{p} . L'extrémité du vecteur égal à \vec{p} parcourt, lorsque θ varie, un cercle (ou un arc de cercle) ayant pour centre l'extrémité du vecteur égal à \vec{c} et pour rayon

$$R = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

Ce cercle (ou cet arc de cercle) est (au facteur multiplicatif m près) l'*hodographe* du problème de Kepler. Pour faciliter le langage, nous dirons dans la suite *hodographe* tout court au lieu de hodographe multiplié par m .

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z . \quad \text{D'où nous déduisons :}$$

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z. \quad \text{D'où nous déduisons :}$$

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{où nous avons posé}$$

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z. \quad \text{D'où nous déduisons :}$$

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{où nous avons posé}$$

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

C'est l'équation polaire d'une conique d'excentricité $|\varepsilon|$ et de foyer O . C'est (dans le cas où cette orbite est une ellipse) la *première loi de Kepler*.

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite (2)

Plus précisément, l'orbite est :

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite (2)

Plus précisément, l'orbite est :

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite (2)

Plus précisément, l'orbite est :

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < |\varepsilon| < 1$,

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite (2)

Plus précisément, l'orbite est :

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < |\varepsilon| < 1$,
- une *parabole* si $|\varepsilon| = 1$,

I. Le problème de Kepler. 6. Équation polaire de l'orbite (2)

Plus précisément, l'orbite est :

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < |\varepsilon| < 1$,
- une *parabole* si $|\varepsilon| = 1$,
- une *hyperbole* (plus exactement une *branche d'hyperbole*) si $|\varepsilon| > 1$.

I. Le problème de Kepler. 7. L'énergie

L'*énergie* du point matériel P est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}, \quad \text{avec } p = \|\vec{p}\|,$$

en convenant de prendre pour niveau zéro de l'énergie, l'énergie qu'aurait le point matériel P s'il était immobile et infiniment éloigné de O .

I. Le problème de Kepler. 7. L'énergie

L'*énergie* du point matériel P est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}, \quad \text{avec} \quad p = \|\vec{p}\|,$$

en convenant de prendre pour niveau zéro de l'énergie, l'énergie qu'aurait le point matériel P s'il était immobile et infiniment éloigné de O .

En utilisant les équations du mouvement on vérifie aisément que $\frac{dE}{dt} = 0$, donc que l'énergie E est une intégrale première.

I. Le problème de Kepler. 7. L'énergie

L'*énergie* du point matériel P est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}, \quad \text{avec} \quad p = \|\vec{p}\|,$$

en convenant de prendre pour niveau zéro de l'énergie, l'énergie qu'aurait le point matériel P s'il était immobile et infiniment éloigné de O .

En utilisant les équations du mouvement on vérifie aisément que $\frac{dE}{dt} = 0$, donc que l'énergie E est une intégrale première.

Quelques petits calculs permettent d'exprimer l'énergie E au moyen de m , k , L et ε :

$$E = \frac{m^3 k^2}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1).$$

I. Le problème de Kepler. 7. L'énergie (2)

Rappelons que l'hodographe du problème de Kepler est un (arc de) cercle dont le centre est à la distance $|c|$ du point O et dont le rayon est R . L'énergie E s'exprime, en fonction de c et de R , par

$$E = \frac{1}{2m}(c^2 - R^2)$$

I. Le problème de Kepler. 7. L'énergie (2)

Rappelons que l'hodographe du problème de Kepler est un (arc de) cercle dont le centre est à la distance $|c|$ du point O et dont le rayon est R . L'énergie E s'exprime, en fonction de c et de R , par

$$E = \frac{1}{2m}(c^2 - R^2)$$

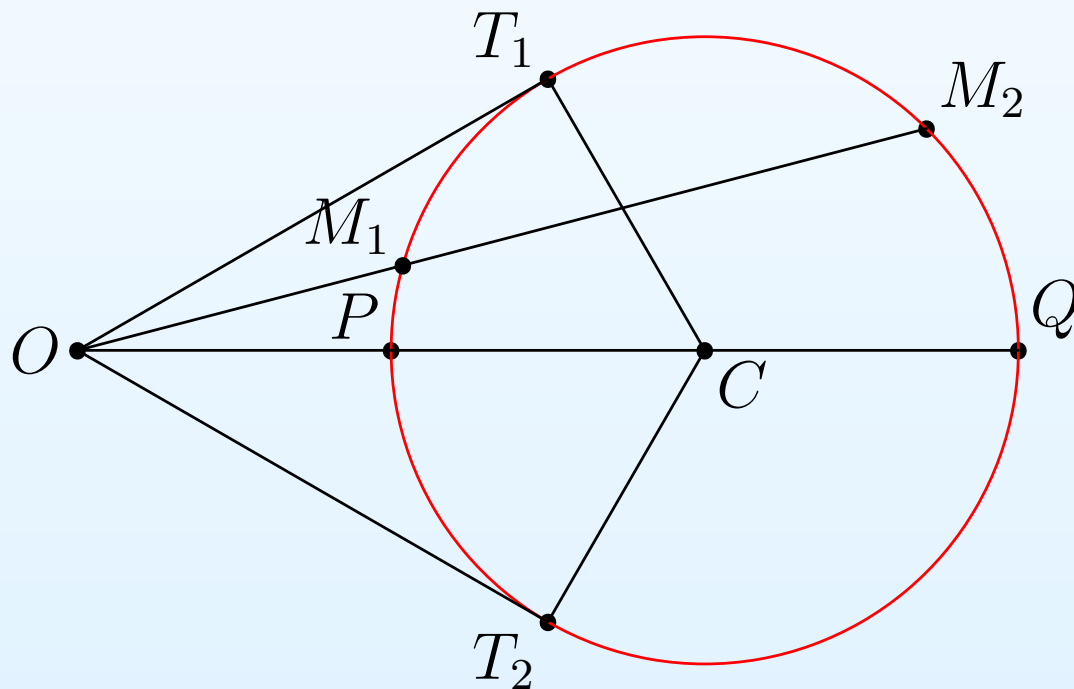
On peut donc énoncer :

Proposition La *puissance* $(c^2 - R^2)$ du point O par rapport à l'hodographe, est égale à $2mE$, où E est l'énergie.

Rappel : puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans un plan, on considère un cercle de centre C et de rayon R , et un point O tel que $|\overrightarrow{OC}| = d$. Pour toute droite passant par O coupant le cercle en deux points M_1 et M_2 , on a

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2 .$$



Si O est à l'extérieur du cercle, T_1 et T_2 les points de contact des tangentes au cercle passant par O , on a

$$|\overrightarrow{OT_1}|^2 = |\overrightarrow{OT_2}|^2 = d^2 - R^2 .$$

I. Le problème de Kepler. 8. Hodographe et énergie

- Si $|\varepsilon| < 1$, l'énergie est négative, le point O est à l'intérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une ellipse (ou un cercle, si $\varepsilon = 0$). L'hodographe est le cercle entier.

I. Le problème de Kepler. 8. Hodographe et énergie

- Si $|\varepsilon| < 1$, l'énergie est négative, le point O est à l'intérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une ellipse (ou un cercle, si $\varepsilon = 0$). L'hodographe est le cercle entier.
- Si $|\varepsilon| = 1$, l'énergie est nulle, le point O est sur le cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une parabole. L'hodographe est le cercle *moins* le point O .

I. Le problème de Kepler. 8. Hodographe et énergie

- Si $|\varepsilon| < 1$, l'énergie est négative, le point O est à l'intérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une ellipse (ou un cercle, si $\varepsilon = 0$). L'hodographe est le cercle entier.
- Si $|\varepsilon| = 1$, l'énergie est nulle, le point O est sur le cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une parabole. L'hodographe est le cercle *moins* le point O .
- Si $|\varepsilon| > 1$, l'énergie est positive, le point O est à l'extérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une branche d'hyperbole. L'hodographe est un arc seulement de cercle, que nous allons préciser.

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$

Supposons $E \geq 0$, donc $|\varepsilon| \geq 1$. L'expression

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

montre que

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$

Supposons $E \geq 0$, donc $|\varepsilon| \geq 1$. L'expression

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

montre que

● $r > 0$ pour $\varepsilon \cos \theta > -1$,

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$

Supposons $E \geq 0$, donc $|\varepsilon| \geq 1$. L'expression

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

montre que

- $r > 0$ pour $\varepsilon \cos \theta > -1$,
- $r < 0$ pour $\varepsilon \cos \theta < -1$,

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$

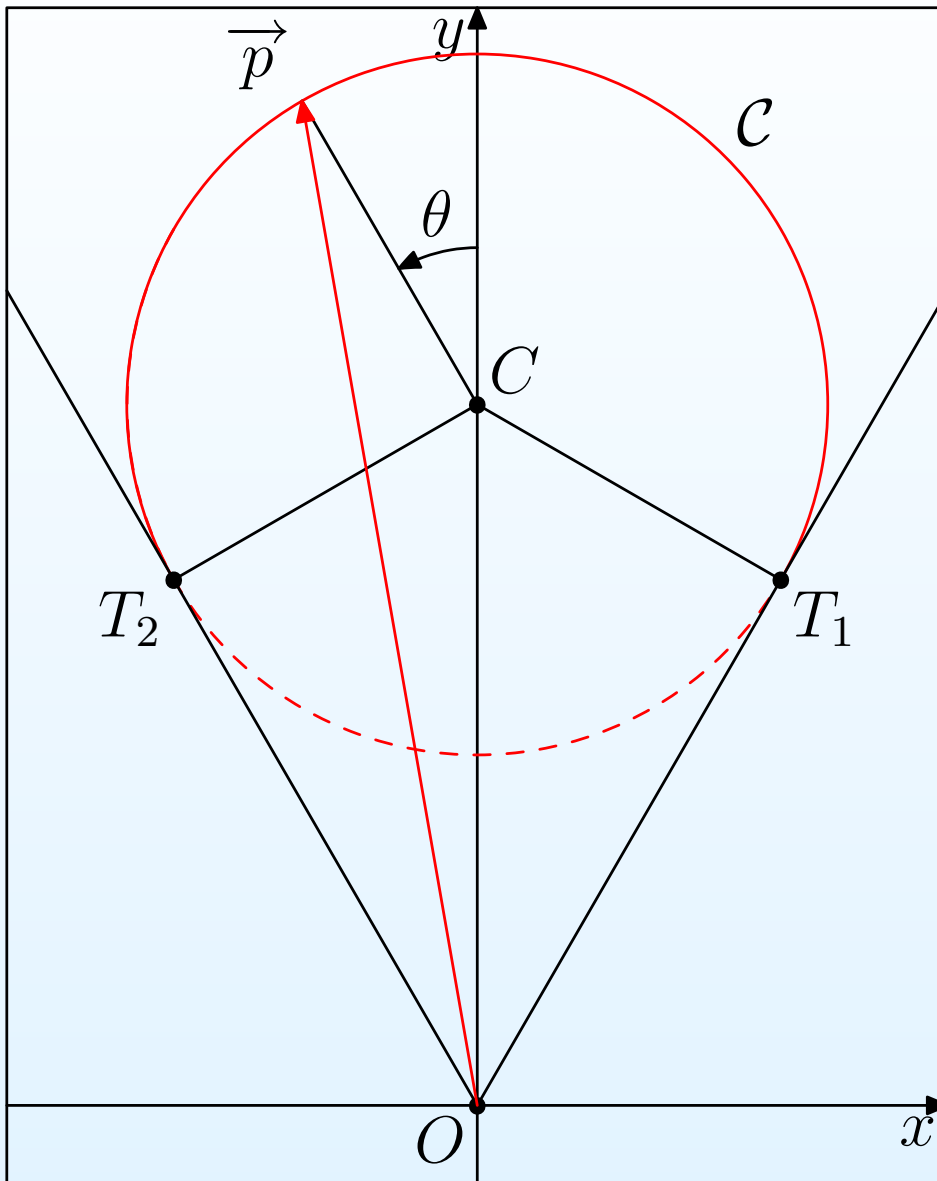
Supposons $E \geq 0$, donc $|\varepsilon| \geq 1$. L'expression

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

montre que

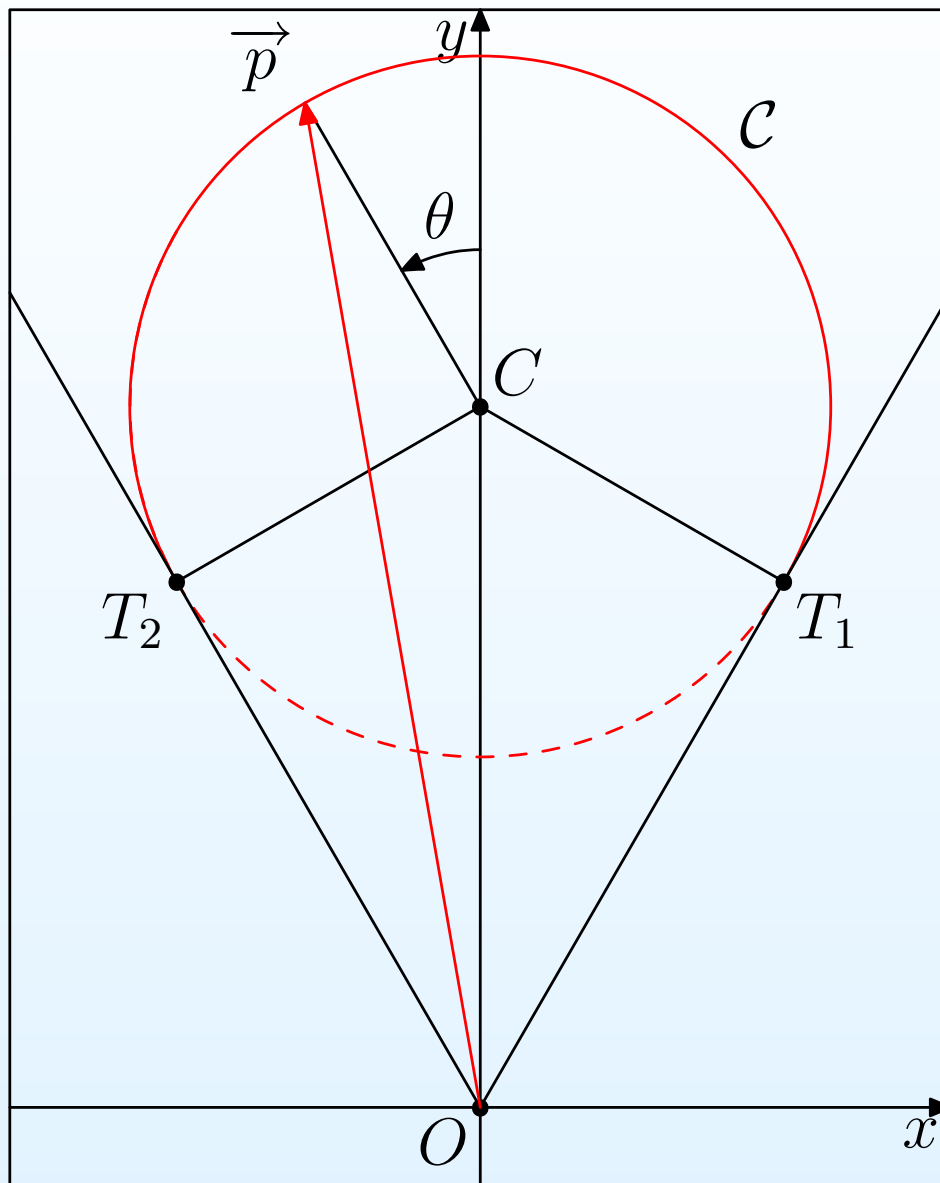
- $r > 0$ pour $\varepsilon \cos \theta > -1$,
- $r < 0$ pour $\varepsilon \cos \theta < -1$,
- $|r| \rightarrow \infty$ lorsque $\varepsilon \cos \theta \rightarrow -1$.

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$ (suite)



Soit \mathcal{C} le cercle qui porte l'hodographe, c'est-à-dire le cercle du plan xOy de centre C et de rayon R .

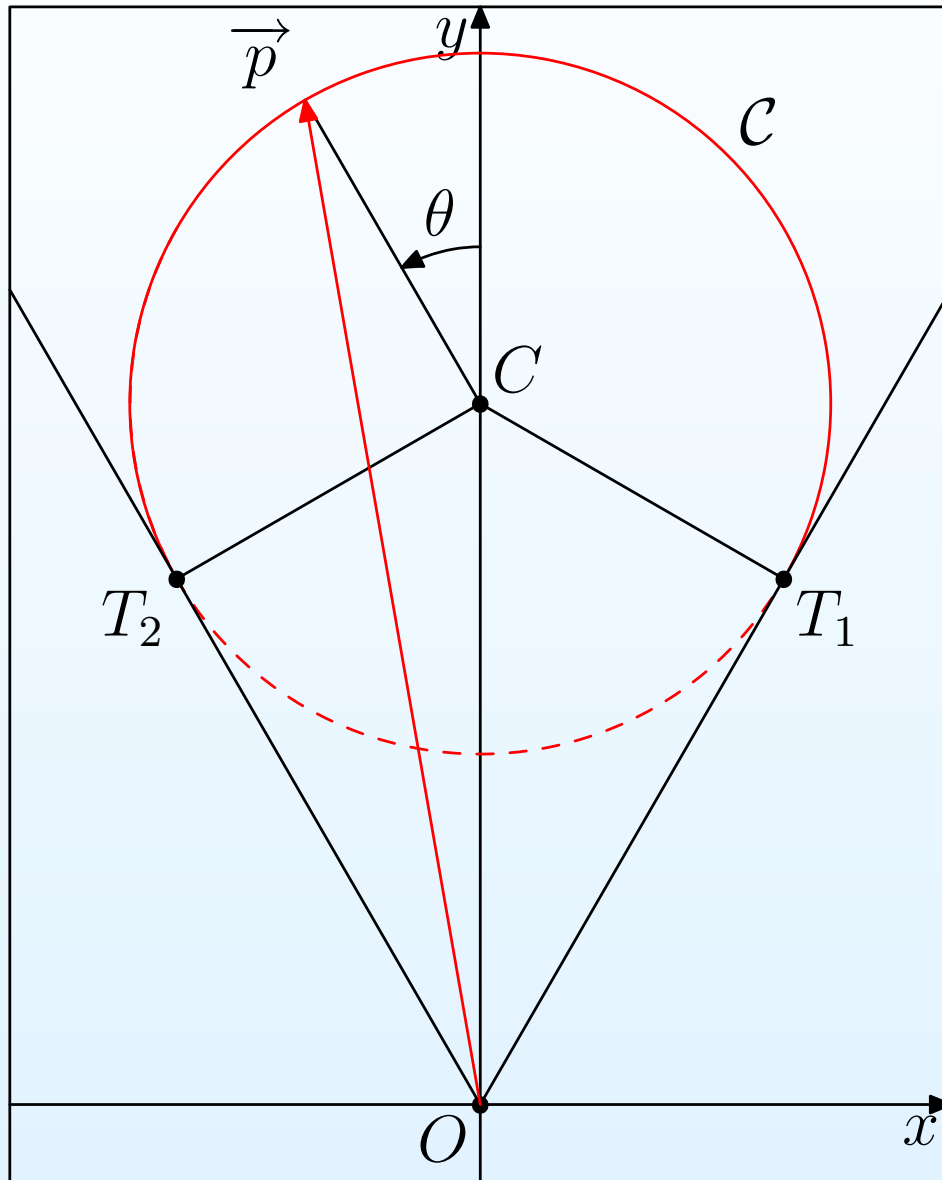
I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$ (suite)



Soit \mathcal{C} le cercle qui porte l'hodographe, c'est-à-dire le cercle du plan xOy de centre C et de rayon R .

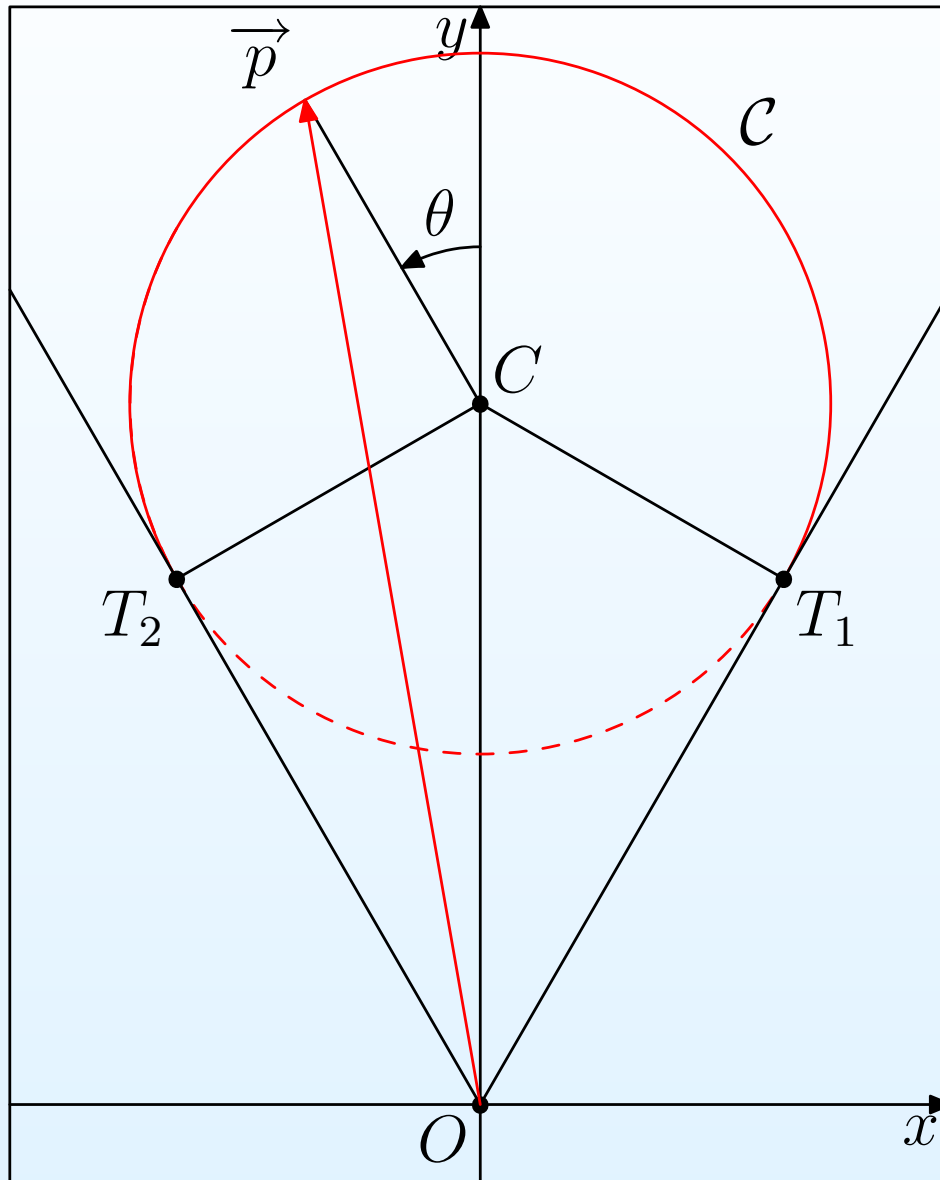
On voit aisément que $\varepsilon \cos \theta$ tend vers -1 lorsque l'extrémité du vecteur d'origine O égal à \vec{p} tend vers un des points de contact (T_1 et T_2) des tangentes menées du point O au cercle \mathcal{C} .

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$ (suite)



De même on voit que r est positif lorsque l'extrémité du vecteur d'origine O égal à \vec{p} est sur l'arc du cercle C , limité par T_1 et T_2 , qui tourne sa concavité vers le point O . C'est cet arc de cercle qui est l'hodographe.

I. Le problème de Kepler. 9. Hodographe pour $E > 0$ (suite)

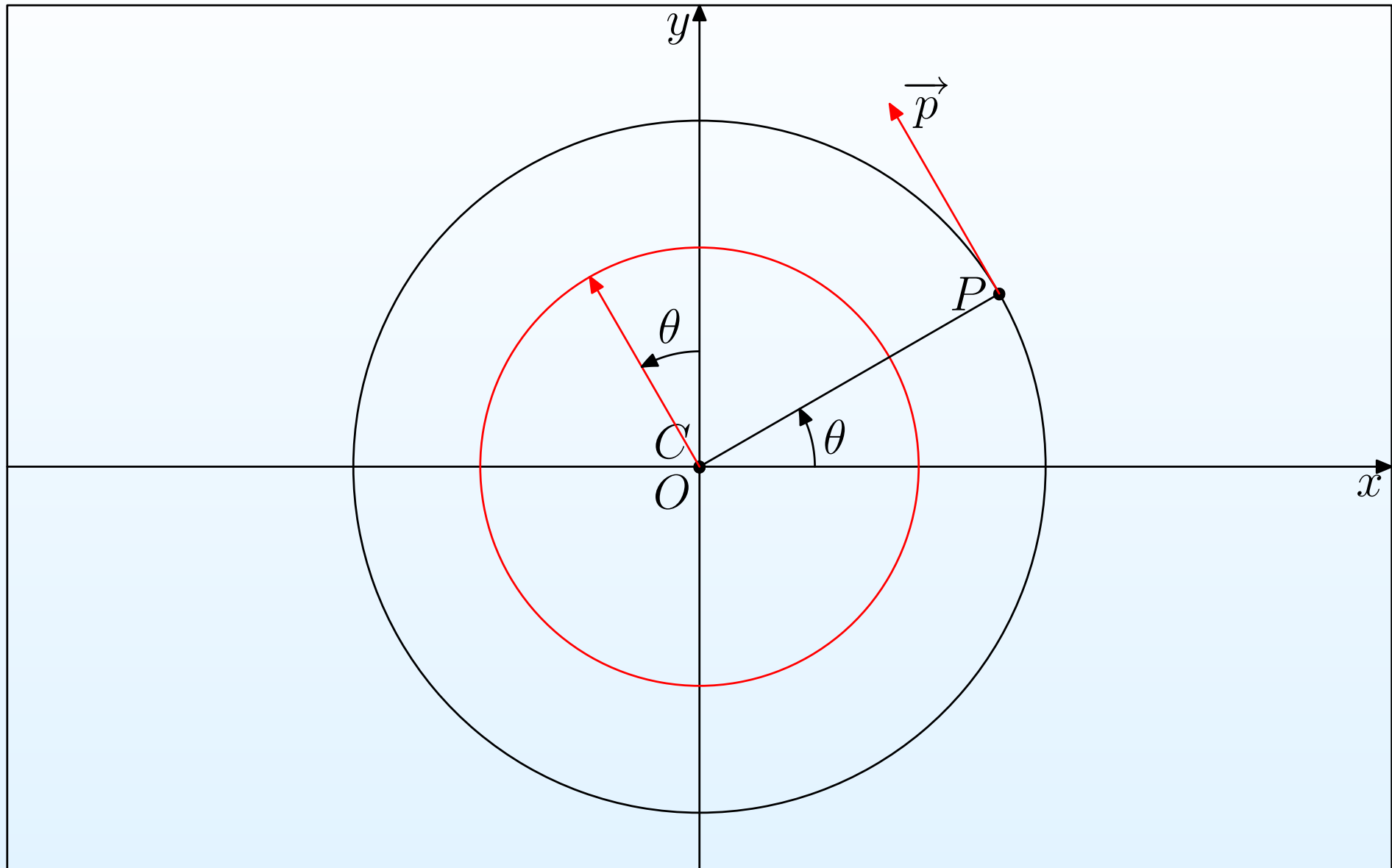


De même on voit que r est positif lorsque l'extrémité du vecteur d'origine O égal à \vec{p} est sur l'arc du cercle \mathcal{C} , limité par T_1 et T_2 , qui tourne sa concavité vers le point O .

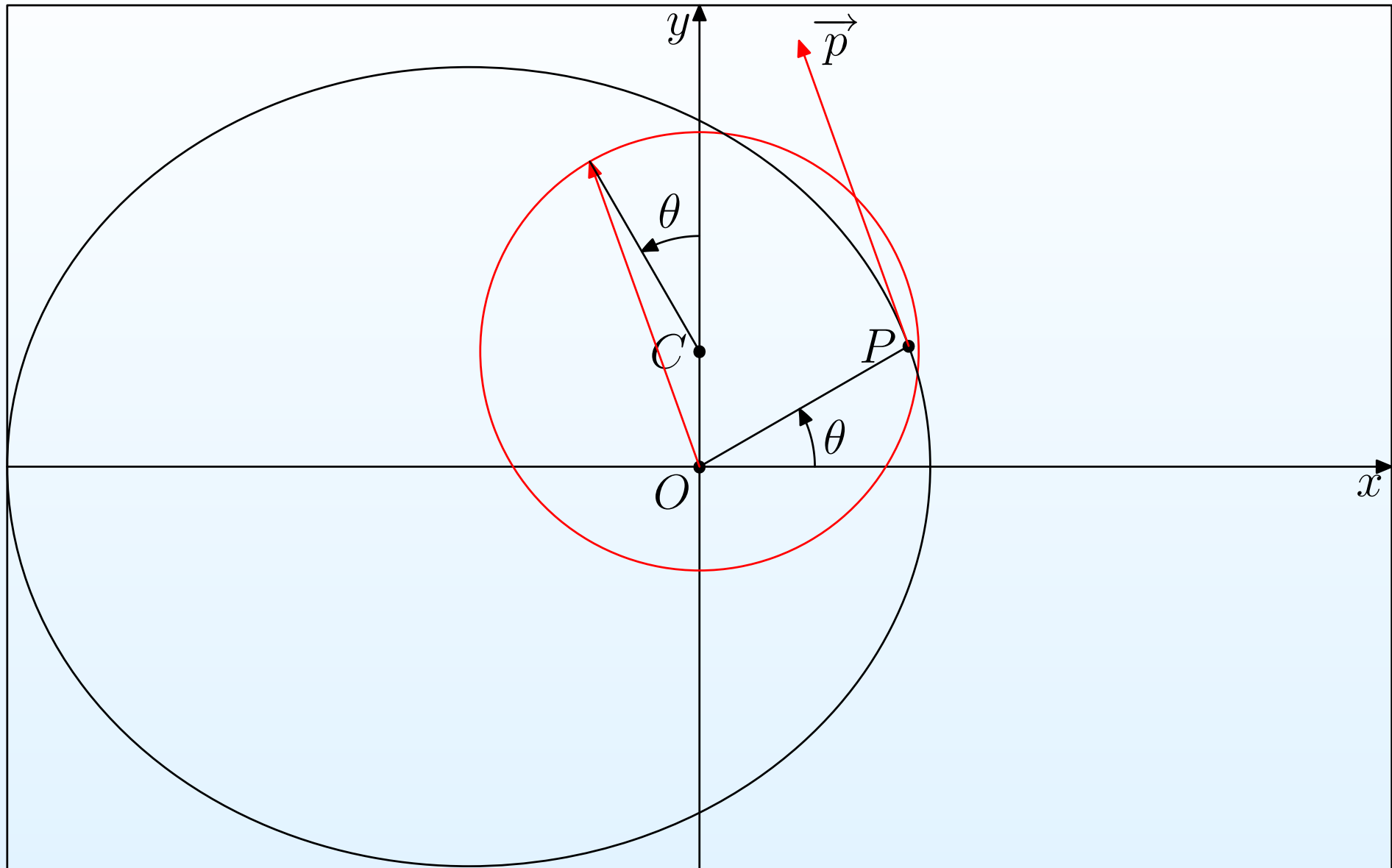
C'est cet arc de cercle qui est l'hodographe.

L'autre arc de cercle (en pointillés) est l'hodographe d'un problème de Kepler modifié, où le centre O est répulsif et où l'orbite est l'autre branche d'hyperbole.

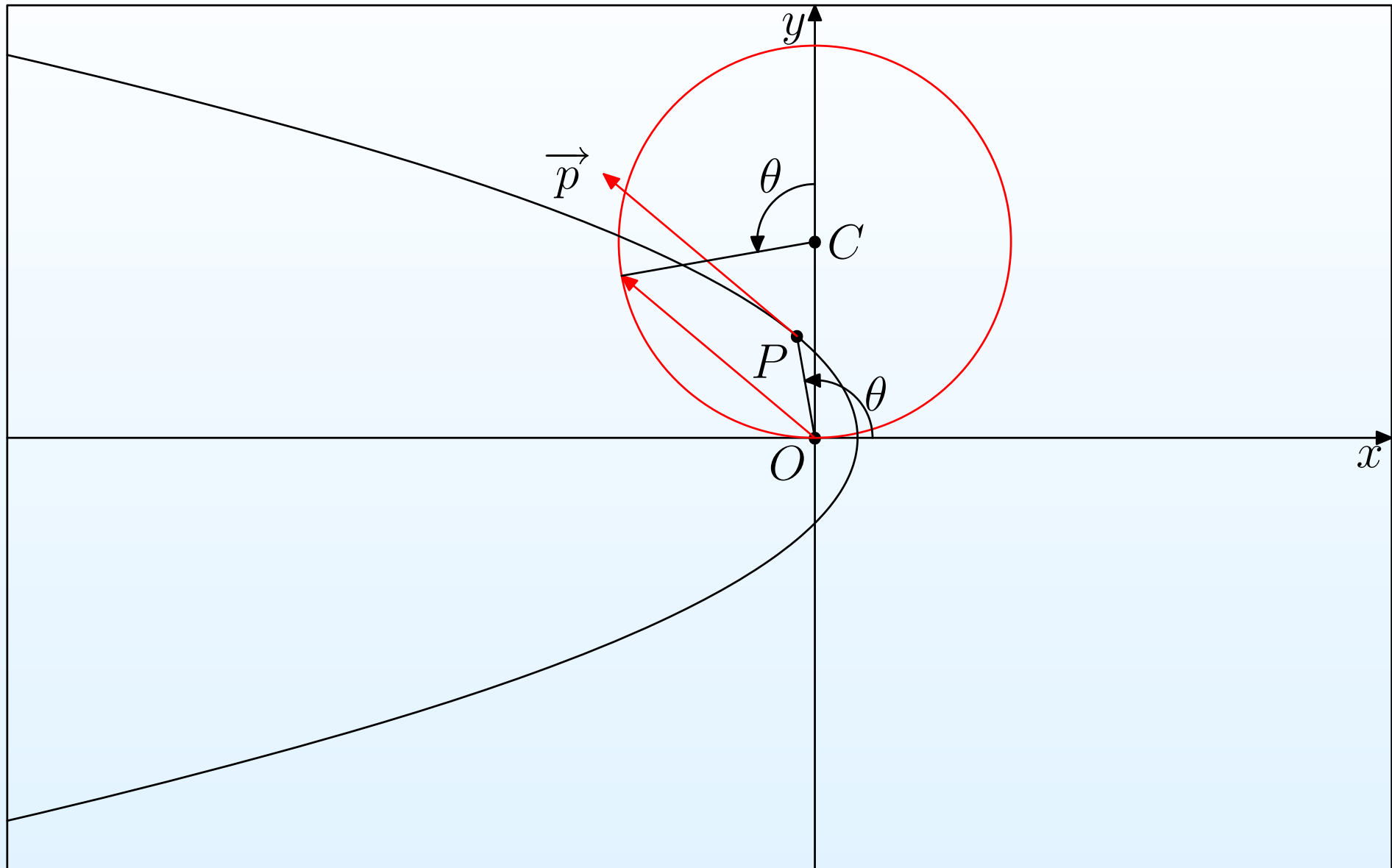
I. Le problème de Kepler. 10. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 0$



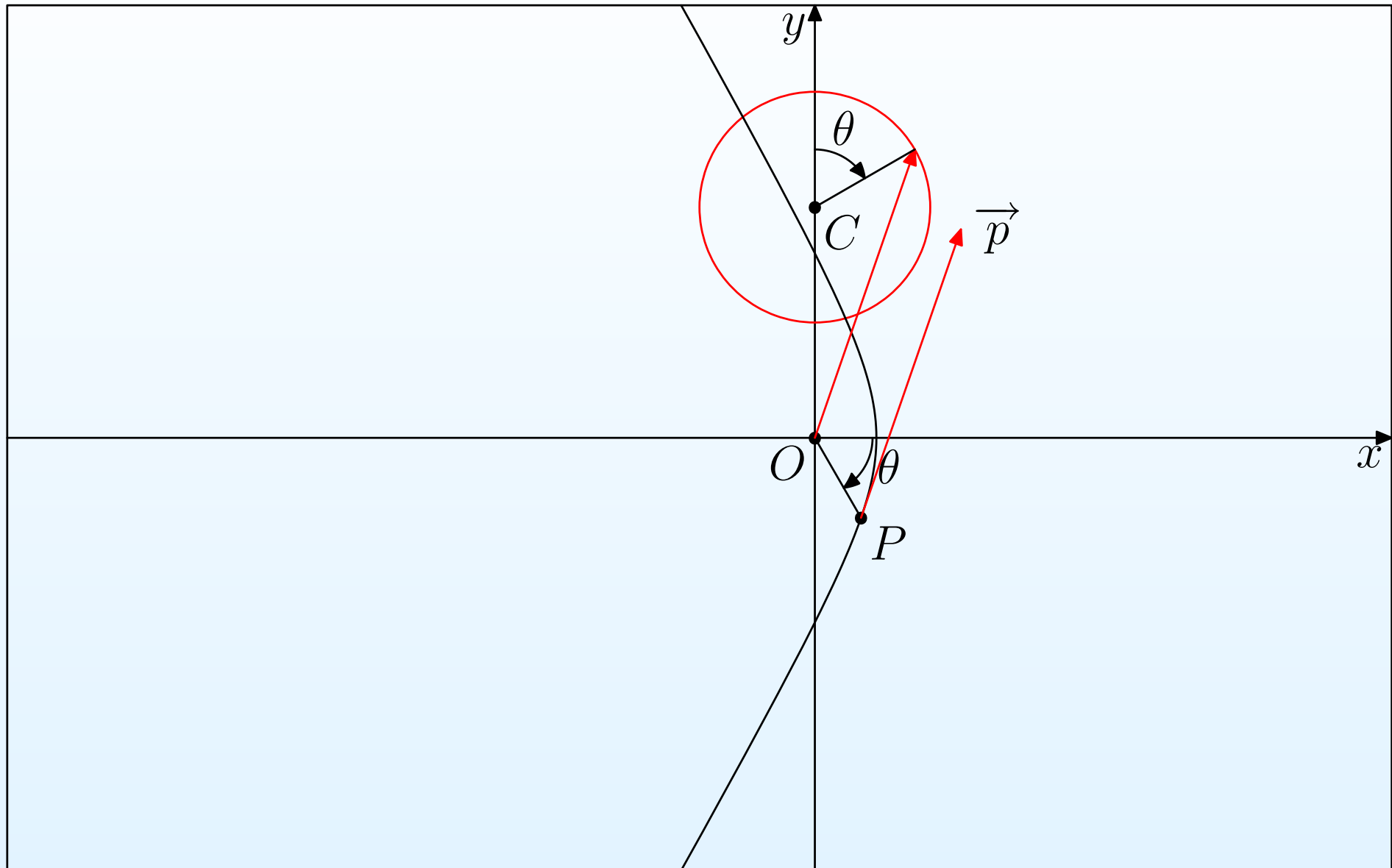
I. Le problème de Kepler. 11. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1/2$



I. Le problème de Kepler. 12. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1$



I. Le problème de Kepler. 13. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 2$



I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler

Lorsque $E < 0$, l'orbite est une ellipse, le mouvement est périodique. La loi des aires permet un calcul facile de la période T puisque l'aire balayée par OP par unité de temps est

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler

Lorsque $E < 0$, l'orbite est une ellipse, le mouvement est périodique. La loi des aires permet un calcul facile de la période T puisque l'aire balayée par OP par unité de temps est

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

En intégrant sur une période on trouve

$$\frac{|L|T}{2m} = \text{aire intérieure à l'orbite.}$$

I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler

Lorsque $E < 0$, l'orbite est une ellipse, le mouvement est périodique. La loi des aires permet un calcul facile de la période T puisque l'aire balayée par OP par unité de temps est

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

En intégrant sur une période on trouve

$$\frac{|L|T}{2m} = \text{aire intérieure à l'orbite.}$$

Le demi-grand axe a et le demi-petit axe b de l'orbite ont pour expressions

$$a = \frac{\Lambda}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler (suite)

On a donc

$$\frac{|L|T}{2m} = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi m a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|L|}.$$

I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler (suite)

On a donc

$$\frac{|L|T}{2m} = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi m a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|L|}.$$

Mais en tenant compte de $L^2 = m^2 k a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

C'est la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe.

I. Le problème de Kepler. 14. La troisième loi de Kepler (suite)

On a donc

$$\frac{|L|T}{2m} = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi m a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|L|}.$$

Mais en tenant compte de $L^2 = m^2 k a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

C'est la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe.

L'énergie E s'exprime très simplement en fonction de a :

$$|E| = \frac{km}{2a}.$$

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel.

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(t, \varphi(t))$$

où $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs C^∞ , pouvant dépendre du temps sur une variété différentiable M .

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel.

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(t, \varphi(t))$$

où $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ est un champ de vecteurs C^∞ , pouvant dépendre du temps sur une variété différentiable M .

Le *flot* de cette équation différentielle est l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, à valeurs dans M ,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que, lorsque t_0 et x_0 sont fixés, $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ soit la solution maximale de cette équation différentielle prenant la valeur x_0 pour $t = t_0$.

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Donc

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0, x_0)}{\partial t} = X(t, \Phi(t, t_0, x_0)), \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Donc

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0, x_0)}{\partial t} = X(t, \Phi(t, t_0, x_0)), \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

L'*espace des mouvements* de cette équation différentielle est l'ensemble \widehat{M} de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$.

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Donc

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0, x_0)}{\partial t} = X(t, \Phi(t, t_0, x_0)), \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

L'*espace des mouvements* de cette équation différentielle est l'ensemble \widehat{M} de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. Cet espace est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

(t_2, x_2) et (t_1, x_1) sont équivalents si (t_2, t_1, x_1) est élément de l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel le flot Φ est défini et

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1).$$

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Lorsque le flot Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l'espace des mouvements \widehat{M} est une variété différentiable difféomorphe à M . Mais *pas de manière canonique!* Si on choisit une valeur particulière $t_0 \in \mathbb{R}$, on a un difféomorphisme de \widehat{M} sur M qui fait correspondre à chaque mouvement $\varphi \in \widehat{M}$ le point $\varphi(t_0) \in M$. Mais bien sûr *ce difféomorphisme dépend du choix de t_0 .*

II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Lorsque le flot Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l'espace des mouvements \widehat{M} est une variété différentiable difféomorphe à M . Mais *pas de manière canonique!* Si on choisit une valeur particulière $t_0 \in \mathbb{R}$, on a un difféomorphisme de \widehat{M} sur M qui fait correspondre à chaque mouvement $\varphi \in \widehat{M}$ le point $\varphi(t_0) \in M$. Mais bien sûr *ce difféomorphisme dépend du choix de t_0 .*

Dans le cas général, *Jean-Marie Souriau* [16] a montré que l'espace des mouvements admet une *structure de variété différentiable, qui peut ne pas être séparée*, mais dont tout élément possède un voisinage ouvert séparé difféomorphe à un ouvert de M , le difféomorphisme local étant construit comme ci-dessus.

II. Flot et variété des mouvements. 2. Cas symplectique

Lorsque M est une variété symplectique et X un champ de vecteurs hamiltonien (pouvant dépendre du temps) *Jean-Marie Souriau [16, 17]* a prouvé (en donnant une forme globale à un résultat établi par *Lagrange* vers 1810) que la variété des mouvements \widehat{M} possède une structure symplectique pour laquelle les difféomorphismes locaux sur des ouverts de M considérés ci-dessus sont des symplectomorphismes.

II. Flot et variété des mouvements. 2. Cas symplectique

Lorsque M est une variété symplectique et X un champ de vecteurs hamiltonien (pouvant dépendre du temps) *Jean-Marie Souriau [16, 17]* a prouvé (en donnant une forme globale à un résultat établi par *Lagrange* vers 1810) que la variété des mouvements \widehat{M} possède une structure symplectique pour laquelle les difféomorphismes locaux sur des ouverts de M considérés ci-dessus sont des symplectomorphismes. Lorsque de plus le champ de vecteurs hamiltonien X ne dépend pas du temps, le groupe additif \mathbb{R} agit sur la variété des mouvements \widehat{M} , l'orbite d'un élément (c'est-à-dire d'une solution maximale) φ étant l'ensemble de toutes les solutions maximales ψ qui s'en déduisent par une translation temporelle, c'est-à-dire qui sont de la forme

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi(t + t_0), \quad \text{avec } t_0 \in \mathbb{R}.$$

III. Mouvements du problème de Kepler. 1. Généralités

Appliquons les notions que nous venons de rappeler brièvement au problème de Kepler. C'est le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien indépendant du temps, défini sur une variété symplectique de dimension 6 (le fibré cotangent à un espace affine euclidien de dimension 3, privé d'un point, le centre attractif). La variété des mouvements \widehat{M} est donc de dimension 6.

III. Mouvements du problème de Kepler. 1. Généralités

Appliquons les notions que nous venons de rappeler brièvement au problème de Kepler. C'est le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien indépendant du temps, défini sur une variété symplectique de dimension 6 (le fibré cotangent à un espace affine euclidien de dimension 3, privé d'un point, le centre attractif). La variété des mouvements \widehat{M} est donc de dimension 6.

Soit $t \mapsto \varphi(t)$ un mouvement à moment cinétique nul se terminant à l'instant t_{coll} par la collision du point matériel P avec le centre attractif. Alors

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi(2t_{coll} - t)$$

est un autre mouvement, dans lequel le point matériel P est éjecté par le centre attractif à l'instant t_{coll} , avec une vitesse infinie (mais une énergie finie).

III. Mouvements du problème de Kepler. 1. Généralités

Pour la topologie de \widehat{M} , les mouvements φ et ψ ne possèdent pas de voisinages disjoints : *la variété des mouvements \widehat{M} n'est pas séparée.*

III. Mouvements du problème de Kepler. 1. Généralités

Pour la topologie de \widehat{M} , les mouvements φ et ψ ne possèdent pas de voisinages disjoints : *la variété des mouvements \widehat{M} n'est pas séparée.*

Pour chaque valeur e de l'énergie E , l'ensemble des mouvements d'énergie $E = e$ est une sous-variété \widehat{M}_e de \widehat{M} , coïso trope, de dimension 5. Nous avons vu que le groupe additif \mathbb{R} agit sur \widehat{M} . Cette action laisse invariante chaque sous-variété \widehat{M}_e .

III. Mouvements du problème de Kepler. 1. Généralités

Pour la topologie de \widehat{M} , les mouvements φ et ψ ne possèdent pas de voisinages disjoints : *la variété des mouvements \widehat{M} n'est pas séparée.*

Pour chaque valeur e de l'énergie E , l'ensemble des mouvements d'énergie $E = e$ est une sous-variété \widehat{M}_e de \widehat{M} , coïso trope, de dimension 5. Nous avons vu que le groupe additif \mathbb{R} agit sur \widehat{M} . Cette action laisse invariante chaque sous-variété \widehat{M}_e .

Chaque feuille (de dimension 1) du feuilletage caractéristique de \widehat{M}_e est l'orbite d'un élément de \widehat{M}_e sous l'action de \mathbb{R} . Autrement dit, c'est *l'ensemble de tous les mouvements pour lesquels le point P se déplace sur une même orbite de l'espace physique, ne différant les uns des autres que par l'instant de passage de P en un point particulier de cette orbite.*

III. Mouvements du problème de Kepler. 2. Réduction

L'ensemble des feuilles du feuilletage en courbes de \widehat{M}_e décrit ci-dessus est la *variété symplectique réduite*, au sens de Marsden et Weinstein [11]. Elle est de dimension 4, et elle s'identifie à l'espace des orbites orientées d'énergie fixée $E = e$ du problème de Kepler.

III. Mouvements du problème de Kepler. 2. Réduction

L'ensemble des feuilles du feuilletage en courbes de \widehat{M}_e décrit ci-dessus est la *variété symplectique réduite*, au sens de Marsden et Weinstein [11]. Elle est de dimension 4, et elle s'identifie à l'espace des orbites orientées d'énergie fixée $E = e$ du problème de Kepler.

Ces orbites (dans l'espace physique où a lieu le mouvement du point matériel P) sont des coniques dont un des foyers est O , plus précisément

- des ellipses si $e < 0$,
- des paraboles si $e = 0$,
- des branches d'hyperbole tournant leur concavité vers O si $e > 0$.

III. Mouvements du problème de Kepler. 2. Réduction

L'ensemble des feuilles du feuilletage en courbes de \widehat{M}_e décrit ci-dessus est la *variété symplectique réduite*, au sens de Marsden et Weinstein [11]. Elle est de dimension 4, et elle s'identifie à l'espace des orbites orientées d'énergie fixée $E = e$ du problème de Kepler.

Ces orbites (dans l'espace physique où a lieu le mouvement du point matériel P) sont des coniques dont un des foyers est O , plus précisément

- des ellipses si $e < 0$,
- des paraboles si $e = 0$,
- des branches d'hyperbole tournant leur concavité vers O si $e > 0$.

Cette variété réduite sera appelée *variété réduite des mouvements d'énergie fixée $E = e$* , et notée \widetilde{M}_e .

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

L'étude de la variété réduite des mouvements d'énergie fixée $E = e$ est considérablement simplifiée par la remarque suivante.

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

L'étude de la variété réduite des mouvements d'énergie fixée $E = e$ est considérablement simplifiée par la remarque suivante.

Il ya a une correspondance bijective entre une orbite orientée du problème de Kepler et son hodographe orienté.

Cette remarque simplifie l'étude pour deux raisons :

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

L'étude de la variété réduite des mouvements d'énergie fixée $E = e$ est considérablement simplifiée par la remarque suivante.

Il ya a une correspondance bijective entre une orbite orientée du problème de Kepler et son hodographe orienté.

Cette remarque simplifie l'étude pour deux raisons :

- d'abord parce que les hodographes sont des cercles, ou des arcs de cercle, c'est-à-dire des courbes plus simples que les ellipses, les paraboles ou les hyperboles,

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

L'étude de la variété réduite des mouvements d'énergie fixée $E = e$ est considérablement simplifiée par la remarque suivante.

Il ya a une correspondance bijective entre une orbite orientée du problème de Kepler et son hodographe orienté.

Cette remarque simplifie l'étude pour deux raisons :

- d'abord parce que les hodographes sont des cercles, ou des arcs de cercle, c'est-à-dire des courbes plus simples que les ellipses, les paraboles ou les hyperboles,
- ensuite parce que la puissance du point O par rapport à l'hodographe est égale à $2mE$, où E est l'énergie du mouvement considéré.

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition La variété réduite des mouvements d'énergie $E = e$ s'identifie

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition La variété réduite des mouvements d'énergie $E = e$ s'identifie

• si $e < 0$, à l'espace des cercles orientés, tracés dans un plan de l'espace E passant par le point O , par rapport auxquels la puissance de O est égale à $2me$;

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition La variété réduite des mouvements d'énergie $E = e$ s'identifie

- si $e < 0$, à l'espace des cercles orientés, tracés dans un plan de l'espace E passant par le point O , par rapport auxquels la puissance de O est égale à $2me$;
- si $e = 0$, à l'espace des cercles orientés passant par O , moins le point O ;

III. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$ fixé

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition La variété réduite des mouvements d'énergie $E = e$ s'identifie

- si $e < 0$, à l'espace des cercles orientés, tracés dans un plan de l'espace E passant par le point O , par rapport auxquels la puissance de O est égale à $2me$;
- si $e = 0$, à l'espace des cercles orientés passant par O , moins le point O ;
- si $e > 0$, à l'espace des arcs de cercle orientés, tracés dans des plans passant par O et tournant leur concavité vers O , par rapport auxquels la puissance de O est égale à e , limités par les points de contact des tangentes menées du point O .

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Utilisant une idée de Fock [7] datant de 1935, Moser [13] a montré comment, par *projection stéréographique inverse*, on peut mettre en correspondance injective les mouvements réduits d'énergie fixée $e < 0$ avec des *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3. Ces grands cercles orientés sont des *géodésiques orientées* de cette sphère, munie de sa métrique riemannienne usuelle.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Utilisant une idée de Fock [7] datant de 1935, Moser [13] a montré comment, par *projection stéréographique inverse*, on peut mettre en correspondance injective les mouvements réduits d'énergie fixée $e < 0$ avec des *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3. Ces grands cercles orientés sont des *géodésiques orientées* de cette sphère, munie de sa métrique riemannienne usuelle.

De même, grâce à une *projection stéréographique généralisée*, les mouvements réduits d'énergie fixée $e > 0$ peuvent être mis en correspondance injective avec les *grandes hyperboles orientées* d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3. Ces grandes hyperboles orientées sont des *géodésiques orientées* de cet hyperboloïde, muni de la métrique riemannienne induite par son plongement dans un *espace de Lorentz* de dimension 4.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On va traiter ensemble les cas d'énergie positive et négative en introduisant la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère orthonormé de E d'origine O . On construit un *espace augmenté* F en ajoutant à ce repère un vecteur unitaire \vec{e}_h , la coordonnée correspondante étant notée h . L'espace E est identifié à l'hyperplan de F d'équation $h = 0$.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On va traiter ensemble les cas d'énergie positive et négative en introduisant la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère orthonormé de E d'origine O . On construit un *espace augmenté* F en ajoutant à ce repère un vecteur unitaire \vec{e}_h , la coordonnée correspondante étant notée h . L'espace E est identifié à l'hyperplan de F d'équation $h = 0$.

On considère la quadrique Q d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \rho^2, \quad \text{avec } \rho = \sqrt{2m|e|}.$$

C'est une sphère si $\zeta = 1$, un hyperboloïde à deux nappes si $\zeta = -1$.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, \quad h = \rho)$. La *projection stéréographique* (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q privée du point N sur l'espace E est l'application qui, à chaque point m de $Q \setminus \{N\}$, fait correspondre le point M de E (identifié à l'hyperplan d'équation $h = 0$) où la droite qui joint N et m rencontre E .

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, h = \rho)$. La **projection stéréographique** (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q privée du point N sur l'espace E est l'application qui, à chaque point m de $Q \setminus \{N\}$, fait correspondre le point M de E (identifié à l'hyperplan d'équation $h = 0$) où la droite qui joint N et m rencontre E .

● Si $\zeta = 1$ c'est un difféomorphisme de la 3-sphère Q privée du point N sur l'espace E .

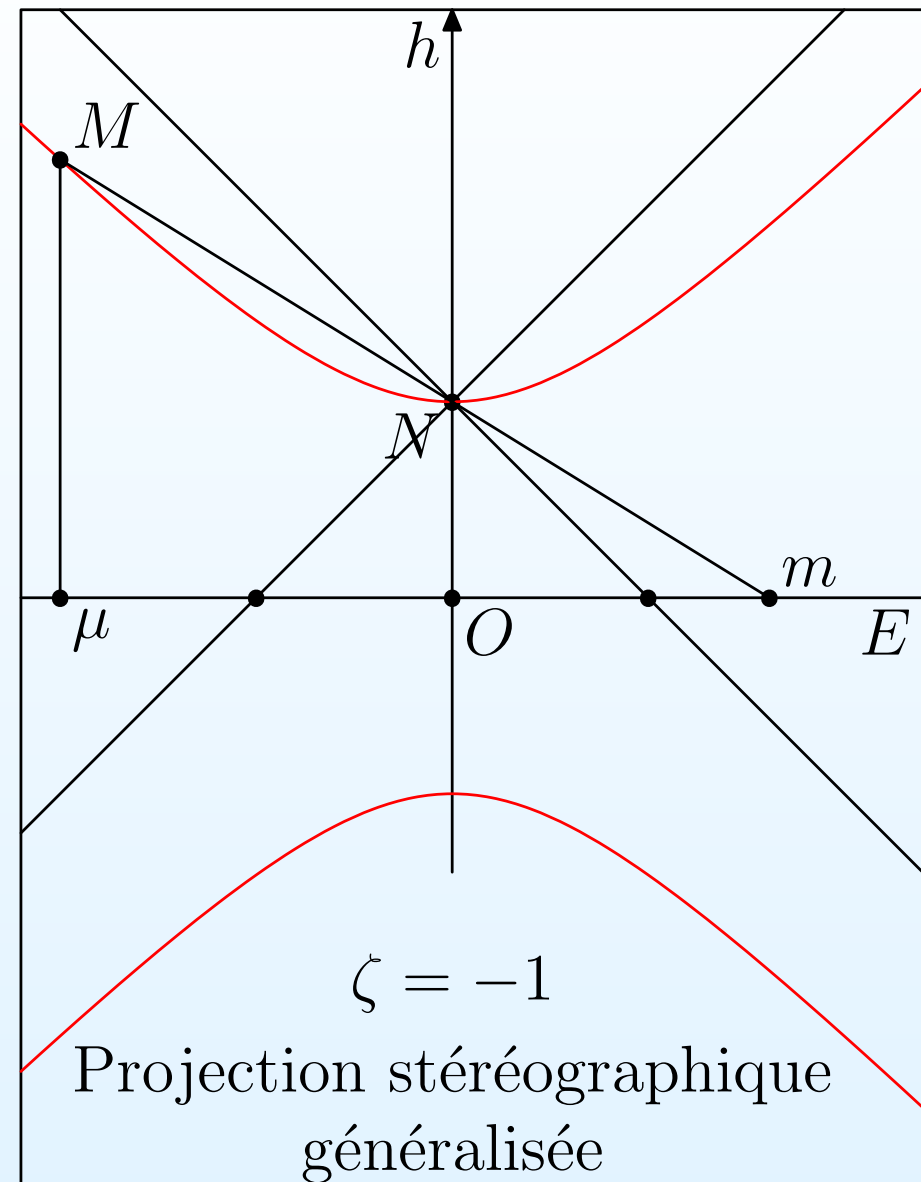
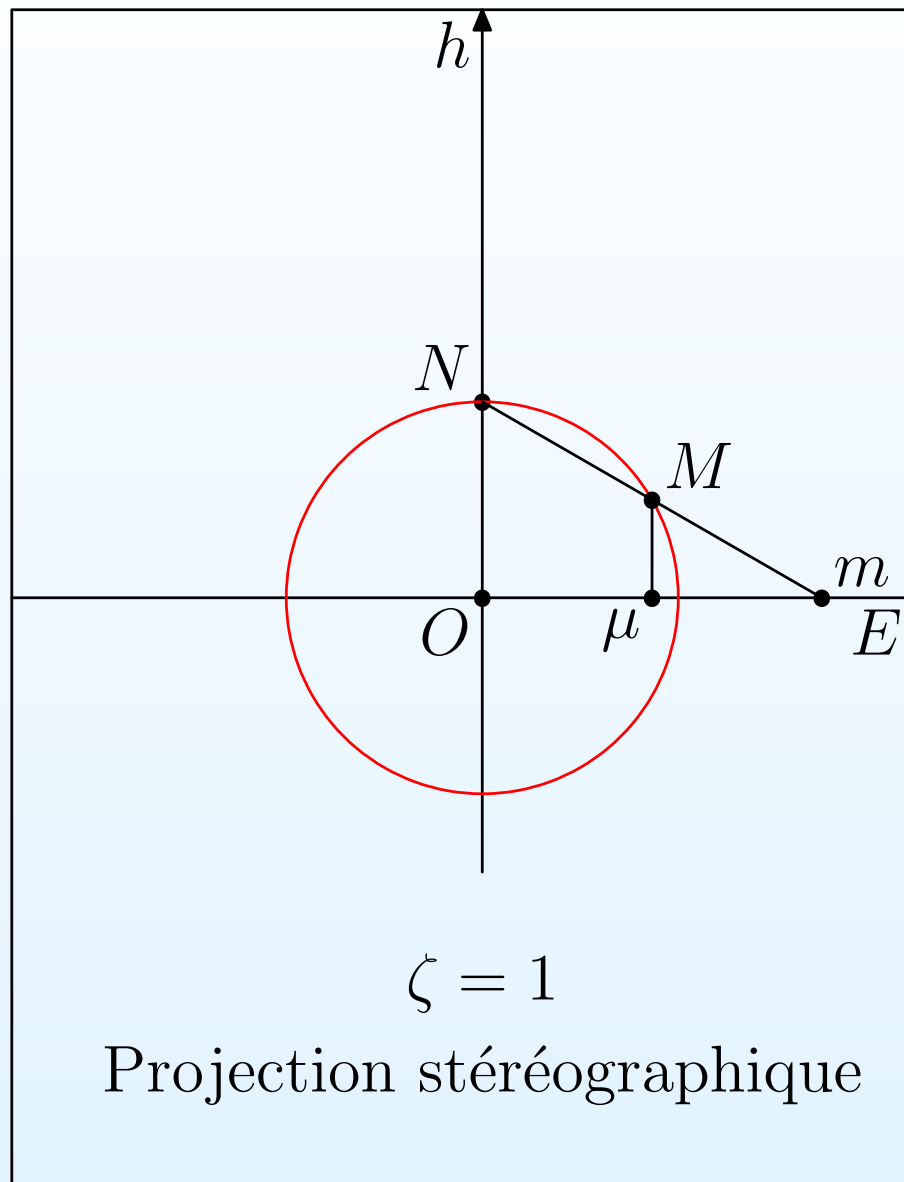
IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, h = \rho)$. La **projection stéréographique** (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q privée du point N sur l'espace E est l'application qui, à chaque point m de $Q \setminus \{N\}$, fait correspondre le point M de E (identifié à l'hyperplan d'équation $h = 0$) où la droite qui joint N et m rencontre E .

● Si $\zeta = 1$ c'est un difféomorphisme de la 3-sphère Q privée du point N sur l'espace E .

● Si $\zeta = -1$ c'est un difféomorphisme de l'hyperboloïde Q privé du point N sur le complémentaire, dans E , de la sphère de centre O et de rayon ρ . La nappe supérieure ($h > 0$) de l'hyperboloïde, privée du point N , a pour image la partie de E extérieure et la nappe inférieure ($h < 0$) la partie de E intérieure à cette sphère.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$



IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On note (x, y, z, h) les coordonnées de m , $(u, v, w, 0)$ celles de M , μ le point de E de coordonnées $(x, y, z, 0)$ et \vec{e}_h le vecteur unitaire (à quatre dimensions) de base de la dimension supplémentaire ajoutée à E . On peut donc écrire

$$\vec{Om} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h.$$

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On note (x, y, z, h) les coordonnées de m , $(u, v, w, 0)$ celles de M , μ le point de E de coordonnées $(x, y, z, 0)$ et \vec{e}_h le vecteur unitaire (à quatre dimensions) de base de la dimension supplémentaire ajoutée à E . On peut donc écrire

$$\vec{Om} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h.$$

Moyennant quelques calculs on obtient les formules donnant les coordonnées de M en fonction de celles de m :

$$\vec{OM} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}.$$

On a aussi

$$h^2 = \rho^2 - \zeta \|\vec{O\mu}\|^2, \quad \text{avec} \quad \|\vec{O\mu}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

La transformation inverse (coordonnées de m en fonction de celles de M) est

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

La transformation inverse (coordonnées de m en fonction de celles de M) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}, \\ h = \rho \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2 - \zeta\rho^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \zeta\rho^2}, \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

La transformation inverse (coordonnées de m en fonction de celles de M) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}, \\ h = \rho \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2 - \zeta\rho^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \zeta\rho^2}, \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

En utilisant ces formules on voit que si M_1 et M_2 sont deux points de E tels que $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 2me = -\zeta\rho^2$, leurs images, par l'inverse de la projection stéréographique, sont deux points m_1 et m_2 symétriques par rapport à O . On peut d'ailleurs trouver cette propriété sans aucun calcul, en utilisant les propriétés de l'inversion.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

La projection stéréographique (éventuellement généralisée) considérée est une *inversion* de pôle N et de rapport $2\zeta\rho^2$. Celle-ci se prolonge en une involution de l'espace augmenté F privé du point N , qui applique l'hyperplan E sur la quadrique Q (privée de N), et le pôle sud S de Q sur l'origine O .

L'hodographe d'un mouvement képlérien d'énergie E est porté par un cercle, contenu dans un plan passant par O , tel que la puissance de O par rapport à ce cercle soit $-\zeta\rho^2$. Ce cercle est l'intersection de l'hyperplan E de F avec une quadrique de révolution, de dimension 2, dont l'axe de révolution est parallèle à \vec{e}_h , passant par les points N et S . L'inverse de cette quadrique est un plan de F , de dimension 2, passant par l'origine O , puisque l'inverse du pôle sud S est O .

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Par suite, la projection stéréographique inverse transforme l'hodographe de chaque mouvement képlérien d'énergie e en l'intersection de la quadrique Q (de dimension 3) avec un plan (de dimension 2) passant par son centre O . C'est

- un grand cercle de la sphère Q si $e < 0$, $\zeta = 1$,
- une branche de “grande hyperbole” de l'hyperboloïde de révolution Q si $e > 0$, $\zeta = -1$.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Par suite, la projection stéréographique inverse transforme l'hodographe de chaque mouvement képlérien d'énergie e en l'intersection de la quadrique Q (de dimension 3) avec un plan (de dimension 2) passant par son centre O . C'est

- un grand cercle de la sphère Q si $e < 0$, $\zeta = 1$,
- une branche de “grande hyperbole” de l'hyperboloïde de révolution Q si $e > 0$, $\zeta = -1$.

L'expression “grande hyperbole” de l'hyperboloïde de révolution Q est employée par analogie avec l'expression “grand cercle” d'une sphère : intersection de Q avec un 2-plan passant par son centre de symétrie O .

Dans les deux cas, il s'agit d'une *géodésique* de la quadrique Q munie de la métrique induite par celle de l'espace augmenté F (*euclidienne* si $\zeta = 1$, *lorentzienne* si $\zeta = -1$).

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Munissons l'espace de dimension 4 obtenu en ajoutant à E une dimension $\mathbb{R}\vec{e}_h$ de la métrique

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \zeta dh^2, \quad \text{avec} \quad \zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Munissons l'espace de dimension 4 obtenu en ajoutant à E une dimension $\mathbb{R}\vec{e}_h$ de la métrique

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \zeta dh^2, \quad \text{avec} \quad \zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

La métrique induite sur la quadrique Q est à courbure constante, positive si $\zeta = 1$, négative si $\zeta = -1$, et les géodésiques de Q , munie de cette métrique, sont les *grands cercles*, ou les arcs de *grandes hyperboles*, suivant que ζ vaut 1 ou -1 .

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Munissons l'espace de dimension 4 obtenu en ajoutant à E une dimension $\mathbb{R}\vec{e}_h$ de la métrique

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \zeta dh^2, \quad \text{avec} \quad \zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

La métrique induite sur la quadrique Q est à courbure constante, positive si $\zeta = 1$, négative si $\zeta = -1$, et les géodésiques de Q , munie de cette métrique, sont les *grands cercles*, ou les arcs de *grandes hyperboles*, suivant que ζ vaut 1 ou -1 .

Grâce à la projection stéréographique (éventuellement généralisée), cette métrique à courbure constante sur Q peut être transportée sur l'espace E (entier si $\zeta = 1$, privé de la sphère de centre O et de rayon ρ si $\zeta = -1$).

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

En utilisant les formules donnant l'expression de la projection stéréographique (éventuellement généralisée) on trouve aisément l'expression de la métrique à courbure constante dont les hodographes sont les géodésiques (*J. Milnor* [12] attribue ce résultat à *Osipov* [14,15] et *Belbruno* [4 ; 5]) :

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

En utilisant les formules donnant l'expression de la projection stéréographique (éventuellement généralisée) on trouve aisément l'expression de la métrique à courbure constante dont les hodographes sont les géodésiques (*J. Milnor* [12] attribue ce résultat à *Osipov* [14,15] et *Belbruno* [4 ; 5]) :

$$ds^2 = \frac{4\rho^2}{(\rho^2 + \zeta(u^2 + v^2 + w^2))^2} (du^2 + dv^2 + dw^2) .$$

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

En utilisant les formules donnant l'expression de la projection stéréographique (éventuellement généralisée) on trouve aisément l'expression de la métrique à courbure constante dont les hodographes sont les géodésiques (*J. Milnor* [12] attribue ce résultat à *Osipov* [14,15] et *Belbruno* [4 ; 5]) :

$$ds^2 = \frac{4\rho^2}{(\rho^2 + \zeta(u^2 + v^2 + w^2))^2} (du^2 + dv^2 + dw^2) .$$

- Lorsque $\zeta = 1$ c'est une métrique à courbure constante positive définie sur E entier.
- Lorsque $\zeta = -1$ cette métrique est définie positive et à courbure constante négative à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon ρ , et définie négative, et (moyennant un changement de signe) à courbure constante négative à l'extérieur de cette sphère.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 2. Cas $e = 0$

Les mouvements réduits d'énergie $e = 0$ sont les cercles de l'espace E passant par le point O et privés de ce point. Une inversion de pôle O et de rapport λ transforme ces cercles en droites, c'est-à-dire en *géodésiques* de l'espace euclidien, et on obtient ainsi toutes les droites qui ne passent pas par le point O . Par suite :

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 2. Cas $e = 0$

Les mouvements réduits d'énergie $e = 0$ sont les cercles de l'espace E passant par le point O et privés de ce point. Une inversion de pôle O et de rapport λ transforme ces cercles en droites, c'est-à-dire en *géodésiques* de l'espace euclidien, et on obtient ainsi toutes les droites qui ne passent pas par le point O . Par suite :

Les mouvements réduits d'énergie nulle sont des géodésiques (orientées) de l'espace euclidien de dimension 3. Ce résultat a été également obtenu par *Osipov* et *Belbruno*.

IV. Mouvements réduits et géodésiques. 2. Cas $e = 0$

Les mouvements réduits d'énergie $e = 0$ sont les cercles de l'espace E passant par le point O et privés de ce point. Une inversion de pôle O et de rapport λ transforme ces cercles en droites, c'est-à-dire en *géodésiques* de l'espace euclidien, et on obtient ainsi toutes les droites qui ne passent pas par le point O . Par suite :

Les mouvements réduits d'énergie nulle sont des géodésiques (orientées) de l'espace euclidien de dimension 3. Ce résultat a été également obtenu par *Osipov* et *Belbruno*.

Le ds^2 de la métrique (euclidienne) dont les hodographes sont les géodésiques a pour expression, au moyen des coordonnées u, v, w ,

$$ds^2 = \frac{\lambda^2 (du^2 + dv^2 + dw^2)}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} .$$

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 1. Généralités

La projection stéréographique (usuelle si $e < 0$, généralisée si $e > 0$) et l'inversion dans E (si $e = 0$) ont été utilisées pour transformer les *hodographes* de mouvements képlériens en *géodésiques* d'espaces à courbure constante. Moser [13] a montré qu'en prolongeant ces transformations aux fibrés cotangents, on obtient un *anti-symplectomorphisme* qui transforme

- les *hodographes* des orbites képlériennes en les *géodésiques* d'un espace à courbure constante,
- les *orbites* képlériennes en les *hodographes* des géodésiques de cet espace à courbure constante, paramétrées par la longueur d'arc.

V. Prolongement aux fibrés cotangents. 1. Généralités

La projection stéréographique (usuelle si $e < 0$, généralisée si $e > 0$) et l'inversion dans E (si $e = 0$) ont été utilisées pour transformer les *hodographes* de mouvements képlériens en *géodésiques* d'espaces à courbure constante. Moser [13] a montré qu'en prolongeant ces transformations aux fibrés cotangents, on obtient un *anti-symplectomorphisme* qui transforme

- les *hodographes* des orbites képlériennes en les *géodésiques* d'un espace à courbure constante,
- les *orbites* képlériennes en les *hodographes* des géodésiques de cet espace à courbure constante, paramétrées par la longueur d'arc.

À la *longueur d'arc* sur les géodésiques de l'espace à courbure constante correspond le *paramètre de Levi-Civita* (et non le *temps*) sur les orbites du problème de Kepler.

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Pour $e \neq 0$, la projection stéréographique inverse (éventuellement généralisée) associe, à chaque point M de l'espace E , de dimension 3, un point m de la quadrique Q , de dimension 3, plongée dans l'espace étendu F de dimension 4. Puisque cette application est un difféomorphisme d'un ouvert de E sur $Q \setminus \{N\}$, elle se prolonge, de manière unique, aux fibrés cotangents, de manière telle que l'image réciproque de la forme de Liouville de $T^*(Q \setminus \{N\})$ soit égale à la forme de Liouville de T^*E (ou plus précisément, lorsque $e > 0$ du fibré cotangent à un ouvert de E).

Appliquons cette construction au cas où $\overrightarrow{OM} = \vec{p}$, vecteur impulsion d'un mouvement képlérien d'énergie $e \neq 0$.

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Une 1-forme sur E peut s'écrire $\vec{r} \cdot d\vec{OM}$, où \vec{r} est un champ de vecteurs sur E , ou puisque $\vec{OM} = \vec{p}$,

$$\vec{r} \cdot d\vec{p} = r_x dp_x + r_y dp_y + r_z dp_z .$$

Rappelons que $\zeta = 1$ si $e < 0$ et $\zeta = -1$ si $e > 0$. L'équation de Q est

$$\vec{Om} \cdot \vec{Om} = x^2 + y^2 + z^2 + \zeta h^2 = \zeta \rho^2 .$$

Une 1-forme sur Q peut s'écrire

$$\vec{w} \cdot d\vec{Om} = w_x dx + w_y dy + w_z dz + \zeta w_h dh ,$$

où \vec{w} est un champ de vecteurs sur Q . Il doit donc vérifier

$$\vec{w} \cdot \vec{Om} = w_x x + w_y y + w_z z + \zeta w_h h = 0 .$$

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Le prolongement aux fibrés cotangent de la projection stéréographique, noté \widehat{S} , doit donc associer au couple (m, \vec{w}) formé d'un point m de Q et d'un vecteur \vec{w} tangent à Q en ce point, un couple (\vec{r}, \vec{p}) de deux vecteurs de E , de manière telle que

$$\vec{w} \cdot d\vec{Om} = \vec{r} \cdot d\vec{p}.$$

On a déjà déterminé les équations exprimant la projection stéréographique S , donnant \vec{p} en fonction de m , ainsi que celles exprimant la transformation inverse S^{-1} . Les équations exprimant le prolongement aux fibrés cotangents \widehat{S} et son inverse \widehat{S}^{-1} s'obtiennent aisément moyennant quelques calculs.

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Prolongement aux fibrés cotangents de la projection stéréographique :

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O\mu}\|^2 = \rho^2, \\ \vec{r} = \frac{\rho - h}{\rho} \vec{w_3} + \frac{w_h}{\rho} \vec{O\mu}, \end{cases}$$

où on a posé

$$\vec{Om} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{w} = \vec{w_3} + w_h\vec{e}_h,$$

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Les formules exprimant le prolongement aux fibrés cotangents de la projection stéréographique inverse sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{p}\|^2} \overrightarrow{p}, \\ h = \rho \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2 - \zeta\rho^2}{\|\overrightarrow{p}\|^2 + \zeta\rho^2}, \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{p}\|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \\ \overrightarrow{w_3} = \frac{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{p}\|^2}{2\rho^2} \overrightarrow{r} - \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho^2} \overrightarrow{p}, \\ w_h = \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho}. \end{array} \right.$$

Comme ci-dessus on a posé

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{O\mu} + h\overrightarrow{e}_h, \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_3} + w_h\overrightarrow{e}_h,$$

V.Prolongement aux fibrés cotangents. 3. Cas $e = 0$

Pour les mouvements d'énergie nulle il faut remplacer la projection stéréographique par une inversion de centre O et de rapport λ . Les formules exprimant son prolongement aux fibrés cotangents sont

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\lambda}{\|\vec{Om}\|^2} \vec{Om}, \\ \vec{r} = \frac{\|\vec{\mu}\|^2}{\lambda} \vec{w} - \frac{2\vec{w} \cdot \vec{Om}}{\lambda} \vec{Om}. \end{cases}$$

Inversement $((\vec{p}, \vec{r}) \mapsto (\vec{Om}, \vec{w}))$ est involutive)

$$\begin{cases} \vec{Om} = \frac{\lambda}{\|\vec{p}\|^2} \vec{p}, \\ \vec{w} = \frac{\|\vec{p}\|^2}{\lambda} \vec{r} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{p}}{\lambda} \vec{p}, \end{cases}$$

V. Prolongement aux fibrés cotangents. 4. Anti-syml.

Puisque $\vec{w} \cdot d\vec{Om} = \vec{r} \cdot d\vec{p}$,

$$d\vec{w} \wedge d\vec{Om} = d\vec{r} \wedge d\vec{p} = -d\vec{p} \wedge d\vec{r}.$$

On a noté

$$d\vec{p} \wedge d\vec{r} = dp_x \wedge dr_x + dp_y \wedge dr_y + dp_z \wedge dr_z$$

et une convention analogue (avec 4 composantes) pour $d\vec{w} \wedge d\vec{Om}$.

Or la forme symplectique canonique de l'espace des phases du problème de Kepler est $\omega_{T^*E} = d\vec{p} \wedge d\vec{r}$, tandis que celle de T^*Q est $\omega_{T^*Q} = d\vec{w} \wedge d\vec{Om}$. L'application construite est donc un ***anti-symplectomorphisme***, non un symplectomorphisme.

VI. Transformation du hamiltonien. 1. Cas $e \neq 0$

L'image directe par \widehat{S} du champ de vecteurs de hamiltonien E sur l'espace des phases du problème de Kepler, est donc le champ de vecteurs de hamiltonien $-E \circ \widehat{S}$ sur T^*Q . On a

$$E = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{mk}{\|\vec{r}\|}$$

Après un petit calcul on trouve, dans le cas où $e \neq 0$,

$$E \circ \widehat{S} = e + \frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h)\|\vec{w}\|} \left(\|\vec{w}\| - \frac{km^2}{\rho^2} \right), \quad \text{avec} \quad e = \frac{-\zeta \rho^2}{2m}.$$

Le vecteur \vec{w} étant de genre espace, on a posé

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + \zeta w_h^2}.$$

VI. Transformation du hamiltonien. 2. Cas $e = 0$

Dans le cas où $e = 0$, en utilisant, au lieu de \widehat{S} , le prolongement aux fibrés cotangents de l'inversion, noté \widehat{S}' , on a une formule analogue

$$E \circ \widehat{S}' = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{w}\| \|\vec{Om}\|^2} \left(\|\vec{w}\| - \frac{2m^2 k}{\lambda} \right).$$

Le vecteur \vec{w} étant cette fois un vecteur de E , on a posé

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

VI. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Ces résultats montrent que le niveau d'énergie $E = e$ de l'espace des phases du problème de Kepler est transformé, par \widehat{S}^{-1} si $e \neq 0$ ou par \widehat{S}'^{-1} si $e = 0$, en l'ensemble de couples (m, \vec{w}) où la norme du vecteur \vec{w} a une valeur constante, dépendant de e :

$$\|\vec{w}\| = \begin{cases} \frac{m^2 k}{\rho^2} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{2m^2 k}{\lambda} & \text{si } e = 0. \end{cases} \quad m \in \begin{cases} Q \setminus \{N\} & \text{si } e \neq 0, \\ E & \text{si } e = 0, \end{cases}$$

Sur ce niveau d'énergie, $d(E \circ \widehat{S})$ si $e \neq 0$, ou $d(E \circ \widehat{S}')$ si $e = 0$, est proportionnel à $d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right)$, la valeur du coefficient de proportionnalité dépendant du point m considéré.

VI. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Si $e \neq 0$, *sur le niveau d'énergie* $(E \circ \hat{S})^{-1}(e)$, on a

$$d(E \circ \hat{S}) = \frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h) \|\vec{w}\|} d\|\vec{w}\| = \frac{\zeta \rho^7}{m^5 k^2 (\rho - h)} d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right).$$

De même, si $e = 0$, *sur le niveau d'énergie* $(E \circ \hat{S}')^{-1}(0)$, on a

$$d(E \circ \hat{S}') = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{Om}\|^2 \|\vec{w}\|} d(\|\vec{w}\|^2) = \frac{\lambda^4}{8m^5 k^2 \|\vec{Om}\|^2} d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right).$$

Par suite, *sur ce niveau d'énergie*, le champ de vecteurs de hamiltonien $E \circ \hat{S}$ si $e \neq 0$, ou $E \circ \hat{S}'$ si $e = 0$, est égal au produit, par une fonction, du champ de vecteurs de hamiltonien $\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}$.

VI. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Cette fonction a pour expression

$$\begin{cases} \frac{\zeta \rho^7}{m^5 k^2 (\rho - h)} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\lambda^4}{8m^5 k^2 \|\vec{Om}\|^2} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

On retrouve ainsi le *paramètre de Levi-Civita* car cette fonction est égale à

$$\begin{cases} \frac{\rho^4}{m^3 k \|\vec{r}\|} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\lambda^2}{4m^3 k \|\vec{r}\|} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

Rappelons que le paramètre de Levi-Civita est l'intégrale, le long d'une trajectoire, de $dt / \|\vec{r}\|$.

VII. Régularisation. 1. Pourquoi pas toutes les géodésiques ?

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les mouvements avec moment cinétique non nul. Nous avons fait correspondre aux mouvements réduits correspondants des géodésiques orientées

- d'une sphère de dimension 3 lorsque $e < 0$,
- d'un espace hyperbolique de dimension 3 lorsque $e > 0$,
- d'un espace euclidien de dimension 3 lorsque $e = 0$.

VII. Régularisation. 1. Pourquoi pas toutes les géodésiques ?

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les mouvements avec moment cinétique non nul. Nous avons fait correspondre aux mouvements réduits correspondants des géodésiques orientées

- d'une sphère de dimension 3 lorsque $e < 0$,
- d'un espace hyperbolique de dimension 3 lorsque $e > 0$,
- d'un espace euclidien de dimension 3 lorsque $e = 0$.

La correspondance ainsi construite est injective, mais pas surjective : les géodésiques passant par un point particulier (pôle de la projection stéréographique, ou stéréographique généralisée, lorsque $e < 0$ ou $e > 0$, les droites passant par O lorsque $e = 0$) ne correspondent à aucun mouvement réduit de moment cinétique non nul.

VII. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Lors d'un mouvement à moment cinétique nul, le point matériel P se déplace sur une droite passant par le point O .

VII. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Lors d'un mouvement à moment cinétique nul, le point matériel P se déplace sur une droite passant par le point O .

Si $e < 0$, le mouvement commence, pour une valeur finie du temps, l'instant où le point matériel P est éjecté par le centre attractif O , à une vitesse infinie. Immédiatement après l'éjection la vitesse devient finie, et décroît tant que la distance OP croît. Lorsque cette distance atteint son maximum, la vitesse s'annule puis change de sens. Le point matériel P se rapproche, de plus en plus vite, du centre attractif O . Le mouvement s'achève au bout d'un temps fini, lorsque P entre en collision, à une vitesse infinie, avec O .

VII. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Si $e \geq 0$ il existe deux sortes de mouvements à moment cinétique nul :

VII. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Si $e \geq 0$ il existe deux sortes de mouvements à moment cinétique nul :

- ceux qui commencent pour une valeur finie du temps, l'instant où le centre attractif O éjecte le point matériel P , à une vitesse infinie. Le point matériel P s'éloigne de O de manière monotone, de moins en moins vite et son mouvement se poursuit jusqu'à ce que le temps et la distance OP tendent, tous deux, vers l'infini. La vitesse de P tend vers 0 si $e = 0$ et vers une valeur finie si $e > 0$.

VII. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Si $e \geq 0$ il existe deux sortes de mouvements à moment cinétique nul :

- ceux qui commencent pour une valeur finie du temps, l'instant où le centre attractif O éjecte le point matériel P , à une vitesse infinie. Le point matériel P s'éloigne de O de manière monotone, de moins en moins vite et son mouvement se poursuit jusqu'à ce que le temps et la distance OP tendent, tous deux, vers l'infini. La vitesse de P tend vers 0 si $e = 0$ et vers une valeur finie si $e > 0$.
- ceux, déduits des précédents par changement de t en $-t$, définis sur un intervalle de temps non borné à gauche et qui s'achèvent, pour une valeur finie de t , par la collision de P avec le centre attractif.

VII. Régularisation. 3. Identification.

Les mouvements à moment cinétique nul doivent être considérés comme des limites de suites de mouvements de même énergie, de moment cinétique de plus en plus petit et tendant vers 0. Deux mouvements à moment cinétique nul, de même énergie, dans lesquels le point matériel P se déplace sur la même demi-droite passant par O , l'instant où l'un se termine par la collision de P avec O étant le même que l'instant où l'autre commence par l'éjection de P par O , apparaissent alors comme deux parties d'un même mouvement.

VII. Régularisation. 3. Identification.

Les mouvements à moment cinétique nul doivent être considérés comme des limites de suites de mouvements de même énergie, de moment cinétique de plus en plus petit et tendant vers 0. Deux mouvements à moment cinétique nul, de même énergie, dans lesquels le point matériel P se déplace sur la même demi-droite passant par O , l'instant où l'un se termine par la collision de P avec O étant le même que l'instant où l'autre commence par l'éjection de P par O , apparaissent alors comme deux parties d'un même mouvement.

Avec cette convention, les mouvements à moment cinétique nul deviennent définis pour toute valeur du temps. Si $e < 0$ ils sont périodiques, le point matériel P rebondissant une infinité de fois sur le centre attractif. Si $e \geq 0$ ils sont non périodiques, le point matériel P venant de l'infini, rebondissant une seule fois sur le centre attractif, et s'éloignant ensuite jusqu'à l'infini.

VII. Régularisation. 4. Le résultat

Avec cette convention, la correspondance entre mouvements réduits d'énergie e fixée et géodésiques orientées d'un espace à courbure constante de dimension 3 (une sphère si $e < 0$, un espace euclidien si $e = 0$ et un espace hyperbolique si $e > 0$) devient *bijjective*. Mais la description d'un mouvement comportant une collision avec le centre attractif, en fonction du temps, n'est plus différentiable.

VII. Régularisation. 4. Le résultat

Avec cette convention, la correspondance entre mouvements réduits d'énergie e fixée et géodésiques orientées d'un espace à courbure constante de dimension 3 (une sphère si $e < 0$, un espace euclidien si $e = 0$ et un espace hyperbolique si $e > 0$) devient *bijjective*. Mais la description d'un mouvement comportant une collision avec le centre attractif, en fonction du temps, n'est plus différentiable.

On peut récupérer la différentiabilité en utilisant pour la description d'un mouvement non plus le temps, mais le *paramètre de Levi-Civita*. Si on utilise la correspondance entre mouvements réduits d'énergie fixée du problème de Kepler et géodésiques d'un espace à courbure constante, cela revient à paramétrer celles-ci par la longueur d'arc.

VIII. Symétries. 1. Les symétries du problème régularisé

Le groupe de symétries naturel du problème de Kepler est le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace euclidien E , de dimension 3, autour du centre attractif O .

VIII. Symétries. 1. Les symétries du problème régularisé

Le groupe de symétries naturel du problème de Kepler est le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace euclidien E , de dimension 3, autour du centre attractif O .

En permettant d'identifier les mouvements réduits aux géodésiques d'un espace à courbure constante, *la régularisation met en évidence des symétries supplémentaires.*

VIII. Symétries. 1. Les symétries du problème régularisé

Le groupe de symétries naturel du problème de Kepler est le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace euclidien E , de dimension 3, autour du centre attractif O .

En permettant d'identifier les mouvements réduits aux géodésiques d'un espace à courbure constante, *la régularisation met en évidence des symétries supplémentaires.*

Le groupe des symétries de l'espace des mouvements réduit d'énergie e , de dimension 6, est :

- pour $e < 0$, le groupe $SO(4)$ des rotations de l'espace euclidien de dimension 4,
- pour $e = 0$, le groupe des déplacements de l'espace euclidien E de dimension 3,
- pour $e > 0$, le groupe de Lorentz $SO(3, 1)$ des isométries conservant l'origine et les orientations de l'espace de Minkowski de dimension 4.

VIII. Symétries. 2. Le vecteur excentricité

Ces symétries additionnelles expliquent la constance, au cours du mouvement, du *vecteur excentricité*, improprement appelé *vecteur de Laplace* ou *vecteur de Runge-Lenz* car il a été découvert (bien avant l'invention du calcul vectoriel) par *Jakob Hermann* (1678–1753). Ce vecteur sans dimension, de module égal à l'excentricité ε de l'orbite, parallèle à son grand axe et dirigé de O vers le périhélie, a pour expression

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p}.$$

VIII. Symétries. 2. Le vecteur excentricité

Ces symétries additionnelles expliquent la constance, au cours du mouvement, du *vecteur excentricité*, improprement appelé *vecteur de Laplace* ou *vecteur de Runge-Lenz* car il a été découvert (bien avant l'invention du calcul vectoriel) par *Jakob Hermann* (1678–1753). Ce vecteur sans dimension, de module égal à l'excentricité ε de l'orbite, parallèle à son grand axe et dirigé de O vers le périhélie, a pour expression

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p}.$$

En utilisant les équations du mouvement, on vérifie aisément que $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = 0$, donc que $\vec{\varepsilon}$ est une intégrale première (vectorielle).

VIII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

Rappel Soit $\Phi : G \times M \rightarrow M$ une action à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M . Son *prolongement au fibré cotangent* est une action hamiltonienne $\widehat{\Phi} : G \times T^*M \rightarrow T^*M$ dont le moment $J : T^*M \rightarrow \mathcal{G}^*$ a pour expression

$$\langle J(\xi), X \rangle = \langle \xi, X_M(\pi_M(\xi)) \rangle,$$

où $X \in \mathcal{G}$, X_M étant le champ de vecteurs fondamental sur M associé à X , $\xi \in T^*M$, et $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ étant la projection canonique.

VIII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

J est intégrale première de tout champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M dont le hamiltonien H est invariant par l'action $\widehat{\Phi}$.

Appliquons ce résultat lorsque l'action Φ est

- l'action de $SO(4)$ sur la sphère Q , de dimension 3, si $e < 0$,
- l'action de $SO(3, 1)$ sur l'hyperboloïde Q , de dimension 3, si $e > 0$,
- l'action du groupe des déplacements euclidiens sur l'espace E , de dimension 3, si $e = 0$.

Dans les trois cas le hamiltonien H a la même expression :

$$H = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2},$$

c'est le hamiltonien classique d'une particule de déplacement librement sur Q , ou sur E , il est bien invariant par l'action $\widehat{\Phi}$.

VIII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

Dans les trois cas le groupe G , de dimension 6, contient comme sous-groupe $SO(3)$, de dimension 3. La partie correspondante du moment J donne, en revenant au problème de Kepler, une intégrale première bien connue : le moment cinétique \vec{L} .

Mais il y a d'autres sous-groupes à un paramètre intéressants, en correspondance bijective avec les vecteurs \vec{v} de l'espace euclidien E :

- dans le cas où $e < 0$ la rotation (usuelle si $e < 0$, hyperbolique si $e > 0$) du plan contenant O parallèle à \vec{v} et à \vec{e}_h , et laissant fixe l'orthogonal de ce plan ;
- dans le cas où $e = 0$, la translation de E selon le vecteur \vec{v} .

La partie correspondante du moment J , notée J' , est une fonction qui prend ses valeurs dans l'espace des vecteurs de E . Son évaluation sur un vecteur \vec{v} , considéré comme un élément de l'algèbre de Lie de G , est le produit scalaire avec \vec{v} .

VIII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

Le calcul donne

$$\begin{cases} J'(\overrightarrow{O\dot{\mu}}, h, \overrightarrow{w_3}, w_h) = \zeta(h\overrightarrow{w_3} - w_h\overrightarrow{O\dot{\mu}}) & \text{si } e \neq 0, \\ J'(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

Revenons au problème de Kepler en exprimant $\overrightarrow{O\dot{\mu}}$, h , $\overrightarrow{w_3}$, w_h (dans le cas où $e \neq 0$), ou \overrightarrow{Om} , \overrightarrow{w} (dans le cas où $e = 0$) en fonction de \overrightarrow{r} et \overrightarrow{p} . On trouve

$$J' = \begin{cases} \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2 - \zeta\rho^2}{\rho} \overrightarrow{r} - \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho} \overrightarrow{p} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2}{\lambda} \overrightarrow{r} - \frac{2\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\lambda} \overrightarrow{p} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

VIII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

En tenant compte de $e = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{mk}{\|\vec{r}\|}$ et, si $e \neq 0$, de

$\zeta \rho^2 = -2me$, on vérifie aisément que J' est proportionnel au vecteur excentricité $\vec{\varepsilon}$.

IX. Projection stéréographique et projection cylindrique.

On a pu associer à l'hodographe d'un mouvement d'énergie non nulle un grand cercle, ou une grande hyperbole, d'une quadrique d'un espace de dimension 4, construit en ajoutant une dimension à l'espace physique E .

Györgyi [6] a montré que la projection cylindrique de ce grand cercle, ou de cette grande hyperbole, sur l'espace E (identifié à l'hyperplan d'équation $h = 0$) est une conique (ellipse ou hyperbole) de même excentricité que l'orbite. Cette projection a le point O pour centre, alors que l'orbite l'admet pour foyer.

La formule

$$\vec{r} = -\frac{\zeta m^2 k}{\rho^2} \vec{\varepsilon} + \vec{w}_3$$

explique cette propriété car $-\frac{\zeta m^2 k}{\rho^2} \vec{\varepsilon}$ est égal au vecteur d'origine O et d'extrémité le centre de l'orbite.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Je remercie Monsieur Claude Vallée, qui m'a donné l'occasion de présenter une première version de ce travail à la réunion du CITV d'Aix en Provence en août 2009. Je remercie également Alain Albouy, Alain Guichardet et Jacques Féjoz qui m'ont fait part de leurs observations lors des rencontres, à l'Observatoire de Paris, du groupe de travail sur les symétries cachées du problème de Kepler.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Je remercie Monsieur Claude Vallée, qui m'a donné l'occasion de présenter une première version de ce travail à la réunion du CITV d'Aix en Provence en août 2009. Je remercie également Alain Albouy, Alain Guichardet et Jacques Féjoz qui m'ont fait part de leurs observations lors des rencontres, à l'Observatoire de Paris, du groupe de travail sur les symétries cachées du problème de Kepler.

Merci enfin à toutes les personnes qui m'ont fait l'honneur de venir m'écouter.

Bibliographie (1)

1. D. V. Anosov, *A note on the Kepler problem*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 8, No. 3, July 2002, 413–442.
2. V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, Moscou, 1974, traduction française 1976.
3. H. Bacry, H. Ruegg et J.-M. Souriau, *Dynamical groups and spherical potentials in classical mechanics*, Commun. math. phys. 3 (1966), 323–333.
4. E. A. Belbruno, *Two body motion under the inverse central force and equivalent geodesic flow*, Celest. Mech. 15 (1977), 467–476.
5. E. A. Belbruno, *Regularizations and geodesic flow*, in *Classical mechanics and Dynamical Systems*, (R. L. Devaney and Z. H. Nitecki, editors) Dekker, 1981, 1–11.
6. B. Cordani, *The Kepler problem*, Birkhäuser, Basel, 2003.

Bibliographie (2)

7. V. A. Fock, *Zs. Phys.* 98, 145 (1935).
8. V. Guillemin and S. Sternberg, *Variations on a theme by Kepler*, American mathematical society colloquium publications 42, 1990.
9. G. Györgyi, *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets, parts I and II*, *Il nuovo cimento* vol. LIII A, no. 3, Febbraio 1968, 717–736 and vol. LXII A, n. 2, Luglio 1969, 449–474.
10. W.R. Hamilton, *The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction*, *Proc. Roy. Irish Acad.*, 3 (1846) 344–353. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. II, 287–294, Cambridge University Press, 1940.
11. J.E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, *Reports on Mathematical Physics* 5 (1974), 121–130.

Bibliographie (3)

12. J. Milnor, *On the Geometry of the Kepler problem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 353–365.
13. J. Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Commun. pure appl. math. 23 (1970), 609–636.
14. Yu. S. Osipov, *geometrical interpretation of Kepler's problem*, Uspekhi Mat. Nauk, 27, 2 (1972), P. 161.
15. Yu. S. Osipov, *The kepler problem and geodesic flows in spaces of constant curvature*, Celest. mech. 16 (1977), 191–208.
16. J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1969.
17. J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scienze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.