Aux sources de la géométrie symplectique: les mémoires de Lagrange et de Poisson sur la méthode de variation des constantes

Charles-Michel Marle

cmm1934@orange.fr

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

Sommaire

Sommaire (suite)

Bref rappel : structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

Bref rappel : structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

Bref rappel : structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v, w) \neq 0\,.$$

Bref rappel : structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v, w) \neq 0\,.$$

On dit alors que (M, ω) est une *variété symplectique*.

Produits scalaires

Variétés symplectiques et variétés (pseudo)riemanniennes Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto \omega(x)(v, w)\,.$$

Produits scalaires

Variétés symplectiques et variétés (pseudo)riemanniennes Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$,

$$T_x M \times T_x M \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto \omega(x)(v, w) \, .$$

Ce produit scalaire est *antisymétrique*, alors que si g est une métrique pseudo-riemannienne sur M,

$$T_x M \times T_x M \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto g(x)(v, w)$$

est *symétrique*.

Produits scalaires (2)

La condition $d\omega = 0$ a pour conséquences (théorème de Darboux)

Produits scalaires (2)

La condition $d\omega = 0$ a pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,

Produits scalaires (2)

La condition $d\omega = 0$ a pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,
- sur une variété symplectique de dimension $2n$, au voisinage de chaque point, on peut choisir les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^{2n}$ de sorte que ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \, .$$

Produits scalaires (2)

La condition $d\omega = 0$ a pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,
- sur une variété symplectique de dimension $2n$, au voisinage de chaque point, on peut choisir les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^{2n}$ de sorte que ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \, .$$

- par suite, deux variétés symplectiques de même dimension sont localement isomorphes. Il n'existe pas, pour les structures symplectiques, d'équivalent de la *signature* des structures pseudo-riemanniennes.

Exemple standard : le fibré cotangent

La 1-forme de Liouville Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η (parfois η_N), ainsi définie :

$$\big\langle \eta(\xi), \zeta \big\rangle = \big\langle \xi, T\pi_N(\zeta) \big\rangle \,.$$

$\xi \in T^*N \,,\; x = \pi_N(\xi) \in N \,,\; \zeta \in T_\xi(T^*N) \,,\; T\pi_N(\zeta) \in T_x N \,.$

Exemple standard : le fibré cotangent

La 1-forme de Liouville Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η (parfois η_N), ainsi définie :

$$\langle \eta(\xi), \zeta \rangle = \langle \xi, T\pi_N(\zeta) \rangle \,.$$

$$\xi \in T^*N \,, \; x = \pi_N(\xi) \in N \,, \; \zeta \in T_\xi(T^*N) \,, \; T\pi_N(\zeta) \in T_x N \,.$$

Expression en coordonnées locales Soient $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées locales dans une carte de N, et $p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées associées dans les fibres de T^*N. La forme de Liouville a pouir expression

$$\eta_N = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx^i \,.$$

Exemple standard : fibré cotangent (2)

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \, .$$

Exemple standard : fibré cotangent (2)

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \, .$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \, .$$

Exemple standard : fibré cotangent (2)

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \, .$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \, .$$

Elle est fermée car $d \circ d = 0$, ce que confirme son expression locale puisque ses composantes sont des constantes.

Aperçu historique

Origine du mot “symplectique”

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l’entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* [16]. Il vient d’une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

Aperçu historique

Origine du mot "symplectique"

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l'entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* [16]. Il vient d'une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

Première apparition des structures symplectiques La notion de structure symplectique est apparue pour la première fois dans les travaux de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), d'abord lors de son étude de la variation lente des éléments orbitaux des planètes du système solaire, puis en toute généralité, comme une structure fondamentale existant sur l'ensemble des mouvements d'un système mécanique.

Éléments orbitaux des planètes (1)

On sait qu'en première (et très bonne) approximation, chaque planète du système solaire parcourt une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, suivant une loi horaire bien déterminée, la loi des aires : l'aire balayée par le segment de droite joignant la planète au Soleil est une fonction linéaire du temps. Ce sont les deux premières lois découvertes par l'astronome et mathématicien Johannes Kepler (1571–1630). Dans cette approximation, la connaissance des *éléments orbitaux* de la planète suffit pour déterminer la position de celle-ci dans l'espace, à tout instant, passé, présent ou futur.

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,
- un dernier pour déterminer la position de la planète sur son orbite. Par exemple, la position qu'elle occupe à une date choisie pour origine du temps.

Éléments orbitaux des planètes (3)

Dans l’approximation keplérienne, la connaissance de la position de la planète à un instant particulier, par exemple l’instant choisi pour origine du temps, et celle des autres éléments orbitaux, suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C’est la troisième loi de Kepler : le carré de la période du mouvement d’une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Éléments orbitaux des planètes (3)

Dans l'approximation keplérienne, la connaissance de la position de la planète à un instant particulier, par exemple l'instant choisi pour origine du temps, et celle des autres éléments orbitaux, suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C'est la troisième loi de Kepler : le carré de la période du mouvement d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

On peut effectivement montrer, de manière parfaitement rigoureuse, ainsi que l'a fait par exemple Souriau [14] que dans l'approximation keplérienne, cet ensemble est bien une variété différentiable, la *variété des mouvements* de la planète.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

On peut effectivement montrer, de manière parfaitement rigoureuse, ainsi que l'a fait par exemple Souriau [14] que dans l'approximation keplérienne, cet ensemble est bien une variété différentiable, la *variété des mouvements* de la planète.

On peut même (moyennant une opération appelée *régularisation des collisions*) éviter d'avoir à exclure les mouvements singuliers dans lesquels la planète entre en collision avec le Soleil ; mais alors la variété des mouvements n'est plus nécessairement séparée.

Au delà de l'approximation keplérienne (1)

Il était d'ailleurs facile de voir que cette variété était nécessairement de dimension 6, car le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Au delà de l'approximation keplérienne (1)

Il était d'ailleurs facile de voir que cette variété était nécessairement de dimension 6, car le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Ce n'est qu'en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n'interagit gravitationnellement qu'avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

Au delà de l'approximation keplérienne (2)

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

Au delà de l'approximation keplérienne (2)

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

Pour en tenir compte, Lagrange a imaginé la *méthode de variation des constantes*.

Lagrange et Poisson : chronologie

1773 : Laplace, Mémoire lu à l'Académie des Sciences (grand axe)

1776, 1781, 1782, . . . : Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin

20 juin 1808 : Poisson, *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*.

22 août 1808 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*.

13 mars 1809 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*.

Lagrange et Poisson : chronologie (suite)

16 octobre 1809 : Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*.

19 février 1810 : Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*.

15 janvier 1835 : Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*.

1831 ou 1837 : Cauchy, Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Il a cherché quelles sont les équations différentielles qui régissent cette variation [8]. Il a compris la portée très générale de ce procédé, qu'il a nommé *méthode de variation des constantes*.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Il a cherché quelles sont les équations différentielles qui régissent cette variation [8]. Il a compris la portée très générale de ce procédé, qu'il a nommé *méthode de variation des constantes*.

Son mémoire lu à l'Académie des Sciences le 13 mars 1809 [9] présente cette méthode pour un système mécanique général.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (1)

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots)\,,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (1)

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots)\,,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Les quantités r', s', u', $\ldots$, sont les dérivées de r, s, u, par rapport au temps t :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad , \ldots$$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (2)

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (2)

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

La solution générale du système formé par ces n équations du second ordre dépend du temps t et de $2n$ constantes d'intégration, que Lagrange note a, b, c, f, g, h, $\ldots$.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (3)

Cette solution générale est de la forme

$$r = r(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad s = s(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad u = \ldots .$$

Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, les $2n$ constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont les *éléments orbitaux*.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (4)

Puis Lagrange suppose que le potentiel V ne décrit les forces qui s'exercent sur le système mécanique qu'en première approximation, et qu'il doit, dans les équations du mouvement, être remplacé par $V - \Omega$, où Ω est une fonction de r, s, u, $\dots$, et aussi du temps t. Dans l'exemple du mouvement d'une planète, Ω traduit les interactions gravitationnelles entre les planètes qui étaient auparavant négligées. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\dots$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (5)

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \ldots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\ldots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \ldots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \ldots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\ldots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (5)

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \dots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\dots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \dots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\dots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Il reste à déterminer les $2n$ fonctions du temps $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$, $\dots$, qui bien entendu dépendront, outre du temps t, de $2n$ constantes arbitraires.

Les parenthèses de Lagrange (1)

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), (b, c), (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Les parenthèses de Lagrange (1)

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), (b, c), (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Celles-ci s'expriment au moyen des constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$, et ne dépendent ni du temps t, ni des forces additionnelles agissant sur le système, représentées par Ω.

Les parenthèses de Lagrange (2)

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Les parenthèses de Lagrange (2)

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Précisons bien qu'il s'agit ici du système mécanique dont l'énergie cinétique est T et dont les forces appliquées dérivent du potentiel V : les forces additionnelles représentées par Ω n'entrent pas dans leurs expressions.

Les parenthèses de Lagrange (3)

L'expression des parenthèses (a,b), (a,c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots \, .$$

Les parenthèses de Lagrange (3)

L'expression des parenthèses (a, b), (a, c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\ .$$

Nous avons posé, comme le feront Hamilton [2,3] et Cauchy [1] environ 30 ans plus tard :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'}\,, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial s'}\,, \quad p_u = \frac{\partial T}{\partial u'}\,.$$

Lagrange utilisait les notations moins parlantes T', T'' et T''' au lieu de p_r, p_s et p_u.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système. Dans le cas le plus souvent rencontré, qui était celui considéré par Lagrange, où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive, cette application est un difféomorphisme.

Les parenthèses de Lagrange (5)

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\dots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\dots$, r', s', u', $\dots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\dots$ sont donnés.

Les parenthèses de Lagrange (5)

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\dots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\dots$, r', s', u', $\dots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\dots$ sont donnés.

Réciproquement, le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles (attribué à Cauchy et Lipschitz, mais que Lagrange considérait comme allant de soi) montre que la connaissance de r, s, u, $\dots$, r', s', u', $\dots$, à un instant fixé quelconque t, détermine complètement le mouvement, donc détermine a, b, c, f, g, h, $\dots$

Les parenthèses de Lagrange (6)

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u, \ldots, r',\ s',\ u', \ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

Les parenthèses de Lagrange (6)

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u, \ldots, r',\ s',\ u', \ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

En composant ce difféomorphisme avec la transformation de Legendre, nous voyons que, pour chaque instant t fixé,

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

(où il faut comprendre que r, s, u, p_r, p_s, p_u désignent les valeurs prises par ces grandeurs à l'instant t considéré) est un difféomorphisme.

Les parenthèses de Lagrange (7)

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \dots) \mapsto (r,\ s,\ u, \dots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \dots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots \ .$$

Les parenthèses de Lagrange (7)

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots) \mapsto (r,\ s,\ u,\ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\ldots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Remarque importante La parenthèse de Lagrange (a,b) n'a de sens que lorsqu'on a choisi, non seulement les deux fonctions a et b sur la variété des mouvements, mais aussi toutes les autres c, f, g, h, $\ldots$, formant un système de coordonnées loales sur cette variété. En d'autres termes, (a,b) ne dépend pas que de a et de b, mais aussi de c, f, g, h, $\ldots$. C'est une fonction sur la variété des mouvements.

Les parenthèses de Lagrange (8)

En utilisant les concepts et notations du calcul différentiel extérieur (dont Lagrange ne disposait malheureusement pas, puisqu'ils ont été développés au XX-ème siècle par Élie Cartan), il est facile de vérifier que les parenthèses de Lagrange sont bien, au signe près, les composantes, dans la carte de l'espace des mouvements de coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$, de la forme symplectique image réciproque, par le difféomorphisme

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

de la forme symplectique canonique du fibré cotangent à la variété de configuration.

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\qquad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad\quad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad\quad+\ldots\\
&\qquad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
(a,b)\,da\wedge db + (a,c)\,da\wedge dc + \cdots + (b,c)\,db\wedge dc + \cdots \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial a}da + \frac{\partial r}{\partial b}db + \cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da + \frac{\partial p_r}{\partial b}db + \cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial s}{\partial a}da + \frac{\partial s}{\partial b}db + \cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da + \frac{\partial p_s}{\partial b}db + \cdots\right) \\
&\quad + \ldots \\
&= dr\wedge dp_r + ds\wedge dp_s + du\wedge dp_u + \cdots\,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\ldots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

En prouvant que ses parenthèses ne dépendent pas directement du temps, Lagrange a, du même coup, prouvé que le flot du champ de vecteurs d'évolution, sur l'espace des phases, conserve la forme symplectique canonique.

Les formules de variation des constantes

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des “constantes qu’on fait varier” a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n}(a_i, aj)\frac{da_j}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j’ai noté, pour faciliter l’écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j’ai tenu compte de l’antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

Les formules de variation des constantes

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des “constantes qu’on fait varier” a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n}(a_i, aj)\frac{da_j}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j’ai noté, pour faciliter l’écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j’ai tenu compte de l’antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

Lagrange indique qu’en résolvant ce système linéaire, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{i\,j}\frac{\partial\Omega}{\partial a_j}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui le fera, à peine quelques mois plus tard.

Le mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a,b), (a,c), $\ldots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a,b]$ au lieu de (a,b), $[a,c]$ au lieu de (a,c), $\ldots$.

Le mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a, b), (a, c), $\ldots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a, b]$ au lieu de (a, b), $[a, c]$ au lieu de (a, c), $\ldots$.

Nous conserverons la notation (a, b), (a, c), $\ldots$, pour les parenthèses de Lagrange et nous utiliserons la notation $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\ldots$ pour les crochets de Poisson.

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérées comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérées comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

On reconnaît l'expression, en coordonnées de Darboux, du crochet de Poisson de deux fonctions a et b définies sur une variété symplectique.

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots\,.$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\,.$$

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

C’est au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l’espace des phases au temps t sur l’espace des mouvements que s’expriment les crochets de Poisson, alors que les parenthèses de Lagrange s’expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme inverse, de l’espace des mouvements sur l’espace des phases au temps t.

ochets de Poisson – parenthèses de Lagran

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

ochets de Poisson – parenthèses de Lagran

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

Les matrices formées, d'une part, par les parenthèses de Lagrange (a, b), (a, c), $\ldots$, d'autre part par les crochets de Poisson $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\ldots$ des fonctions coordonnées a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre. Ce fait a été clairement indiqué par Augustin Louis Cauchy (1789–1857) dans un mémoire présenté à l'Aacadémie de Turin le 11 octobre 1831 [1], 22 ans après la parution des mémoires de Lagrange et Poisson.

Le théorème de Poisson

Remarque importante Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques a un sens, alors que les parenthèses de Lagrange de deux fonctions différentiables quelconques n'en ont pas : les parenthèses de Lagrange n'ont de sens (comme les dérivées partielles par rapport à certaines variables) que pour une famille de fonctions qui sont les fonctions coordonnées locales dans une carte.

Le théorème de Poisson Deux intégrales premières quelconques peuvent en général être choisies comme deux des coordonnées sur la variété des mouvements. Leur crochet de Poisson, étant une fonction sur cette variété, est aussi une intégrale première. C'est le *théorème de Poisson*.

L'identité de Jacobi

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour les fonctions :

$$\bigl\{f,\{g,h\}\bigr\}+\bigl\{g,\{h,f\}\bigr\}+\bigl\{h,\{f,g\}\bigr\}=0\,.$$

Pour les champs de vecteurs :

$$\bigl[X,[Y,Z]\bigr]+\bigl[Y,[Z,X]\bigr]+\bigl[Z,[X,Y]\bigr]=0\,.$$

Le *théorème de Poisson* apparaît aujourd'hui comme une conséquence directe de l'identité de Jacobi.

Le mémoire de Lagrange de 1810

Dans ce mémoire, Lagrange revient sur les résultats qu'il avait obtenus dans son premier mémoire. Il utilise les crochets de Poisson pour les exprimer de manière plus simple. Il écrit les équations différentielles qui gouvernent la variation des constantes sous la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Le mémoire de Lagrange de 1810

Dans ce mémoire, Lagrange revient sur les résultats qu'il avait obtenus dans son premier mémoire. Il utilise les crochets de Poisson pour les exprimer de manière plus simple. Il écrit les équations différentielles qui gouvernent la variation des constantes sous la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n .$$

Pour faciliter l'écriture j'ai noté a_i, $1 \leq i \leq 2n$, les constantes qu'on fait varier (les coordonnées locales sur la variété des mouvements), au lieu de a, b, c, f, g, h comme le faisait Lagrange.

Le mémoire de Lagrange de 1810 (2)

On remarquera que Lagrange aurait pu écrire ses équations de manière plus simple

$$\frac{da_i}{dt} = \{a_i, \Omega\}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Le mémoire de Lagrange de 1810 (2)

On remarquera que Lagrange aurait pu écrire ses équations de manière plus simple

$$\frac{da_i}{dt} = \{a_i, \Omega\}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Il ne le fait pas (pas plus, d'ailleurs, que ne l'a fait Poisson dans son mémoire de 1809). Il n'emploie le crochet de Poisson que pour les fonctions coordonnées a_i, pas pour Ω qui pourtant peut parfaitement être considérée comme une fonction définie sur la variété des mouvements (mais dépendant aussi du temps).

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

Cauchy utilise résolument le formalisme hamiltonien. Sa note est très concise (6 pages) et présente, de manière remarquablement claire et dans un langage très proche du langage moderne, l'essentiel des résultats de Lagrange et de Poisson. Cependant, lui non plus n'écrit pas de crochet de Poisson avec la fonction Ω (qu'il note d'ailleurs R).

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

Cauchy utilise résolument le formalisme hamiltonien. Sa note est très concise (6 pages) et présente, de manière remarquablement claire et dans un langage très proche du langage moderne, l'essentiel des résultats de Lagrange et de Poisson. Cependant, lui non plus n'écrit pas de crochet de Poisson avec la fonction Ω (qu'il note d'ailleurs R).

Cauchy prouve (sans utiliser le mot *matrice*) que les matrices formées par les parenthèses de Lagrange, et par les crochets de Poisson, des fonctions coordonnées sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre.

Retour sur la variation des constantes (1)

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Retour sur la variation des constantes (1)

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ on considère un système hamiltonien, dont le hamiltonien, dépendant éventuellement du temps, est noté $Q : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (c'est la notation utilisée par Cauchy). Soit M_0 la variété des mouvements et $\Phi : \mathbb{R} \times M_0 \to M$ $(t, a) \mapsto \Phi(t, a)$ le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien Q. Pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\bigl(g \circ \Phi(t,a)\bigr)}{\partial t} = \{Q, g\}\bigl(\Phi(t,a)\bigr) .$$

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_0 \to M_1$, $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t, b) \mapsto \Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q + R$.

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_0 \to M_1$, $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t, b) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t, b)\big)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q + R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t, b)\big)\Big) = \{Q + R, g\}\Big(\Phi\big(t, \Psi(t, b)\big)\Big)\,.$$

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q+R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R}\times M_0 \to M_1$, $(t,b)\mapsto a=\Psi(t,b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t,b)\mapsto \Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q+R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M\to\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)=\{Q+R,g\}\Bigl(\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\,.$$

Mais pour chaque valeur particulière t_0 de t

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}+\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t_0,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)$$

Retour sur la variation des constantes (3)

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0, b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)$ est le “flot” du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q, g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\,.$$

Retour sur la variation des constantes (3)

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0, b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)$ est le “flot” du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q, g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big) .$$

Donc le second terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t_0, \Psi(t, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} &= \Big(\{Q + R, g\} - \{Q, g\}\Big)\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\\ &= \{R, g\}_M\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\\ &= \{R \circ \Phi_{t_0}, g \circ \Phi_{t_0}\}_{M_0}\big(\Psi(t_0, b)\big) ,\end{aligned}$$

parce que $\Phi_{t_0} : M_0 \to M$ est de Poisson.

Retour sur la variation des constantes (4)

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Big(g_0\big(\Psi(t,b)\big)\Big)}{dt}\ \Big|_{t=t_0} = \{R \circ \Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\big(\Psi(t_0, b$$

Retour sur la variation des constantes (4)

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Big(g_0\big(\Psi(t,b)\big)\Big)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \{R\circ\Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\big(\Psi(t_0,b$$

Mais t_0 pouvant être quelconque, cette dernière équation montre que pour tout $b \in M_1$ (variété des mouvements du système de hamiltonien $Q+R$), $t \mapsto \Psi(t,b)$ est une courbe intégrale, sur la variété M_0 des mouvements du système de hamiltonien Q, du champ de vecteurs de hamiltonien (dépendant du temps)

$$(t,a) \mapsto R\big(t, \Phi(t,a)\big)\,, \qquad (t,a) \in \mathbb{R} \times M_0\,.$$

C'est le résultat découvert par Lagrange vers 1808.

Remerciements

Je remercie Monsieur Olivier Faugeras de m'avoir proposé de présenter cet exposé.

Remerciements

Je remercie Monsieur Olivier Faugeras de m'avoir proposé de présenter cet exposé.

Je remercie également Mesdames et Messieurs les Membres et Correspondants qui ont eu la bienveillance de m'écouter.

Remerciements

Je remercie Monsieur Olivier Faugeras de m'avoir proposé de présenter cet exposé.

Je remercie également Mesdames et Messieurs les Membres et Correspondants qui ont eu la bienveillance de m'écouter.

Alain Albouy, Alain Chenciner, Jacques Féjoz, Jacques Laskar m'ont donné l'occasion de présenter une première version de cet exposé à l'Atelier de Mécanique Céleste de l'Observatoire de Paris en décembre 2007. Je remercie tout particulièrement Alain Albouy qui m'a aidé à rassembler la plupart des documents dont j'ai parlé.

Flot et variété des mouvements

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(t, \varphi(t)\bigr)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

Flot et variété des mouvements

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\big(t, \varphi(t)\big)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

On appelle *flot* de cette équation différentielle l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ soit la solution maximale de cette équation prenant la valeur x_0 pour $t = 0$.

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0, x_0}{\partial t} = X\big(t, \Phi(t, t_0, x_0)\big)\,, \qquad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0\,.$$

Flot et variété des mouvements

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(t, \varphi(t)\bigr)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

On appelle *flot* de cette équation différentielle l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ soit la solution maximale de cette équation prenant la valeur x_0 pour $t = 0$.

$$\frac{\partial\Phi(t, t_0, x_0}{\partial t} = X\bigl(t, \Phi(t, t_0, x_0)\bigr)\,, \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0\,.$$

Flot et variété des mouvements

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(t, \varphi(t)\bigr)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

On appelle *flot* de cette équation différentielle l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ soit la solution maximale de cette équation prenant la valeur x_0 pour $t = 0$.

$$\frac{\partial\Phi(t, t_0, x_0}{\partial t} = X\bigl(t, \Phi(t, t_0, x_0)\bigr)\,, \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0\,.$$

Flot et variété des mouvements (2)

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$.

Flot et variété des mouvements (2)

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C'est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

- (t_2, x_2) équivalent à (t_1, x_1) si (t_2, t_1, x_1) appartient à l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1) \, .$$

Flot et variété des mouvements (2)

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C'est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

- (t_2, x_2) équivalent à (t_1, x_1) si (t_2, t_1, x_1) appartient à l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1)\,.$$

Si Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l'espace des mouvements $\widehat{M}$ est difféomorphe à M, mais pas de manière canonique : le choix d'un instant particulier t_0 détermine un difféomorphisme qui, à chaque mouvement $t \mapsto \varphi(t)$ élément de $\widehat{M}$, fait correspondre le point $\varphi(t_0) \in M$.

Flot et variété des mouvements (2)

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C'est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

- (t_2, x_2) équivalent à (t_1, x_1) si (t_2, t_1, x_1) appartient à l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1) \,.$$

Si Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l'espace des mouvements $\widehat{M}$ est difféomorphe à M, mais pas de manière canonique : le choix d'un instant particulier t_0 détermine un difféomorphisme qui, à chaque mouvement $t \mapsto \varphi(t)$ élément de $\widehat{M}$, fait correspondre le point $\varphi(t_0) \in M$.

Dans le cas général l'espace des mouvements admet une structure de variété différentiable, pas toujours séparée.

Flot et variété des mouvements (3)

Le "flot" modifié La valeur $\Phi(t, t_0, x_0)$ du flot au temps t dépend de t et de la *classe d'équivalence* a de (t_0, x_0), plutôt que de t_0 et x_0 séparément. En effet, si (t_0, x_0) et (t_1, x_1) sont équivalents, $x_1 = \Phi(t_1, t_0, x_0)$ et

$$\Phi(t, t_1, x_1) = \Phi\big(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)\big) = \Phi(t, t_0, x_0)\,.$$

On appelle *flot modifié* l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \widehat{M}$,

$$(t, a) \mapsto \widehat{\Phi}(t, a) = \Phi(t, t_0, x_0)\,,$$

avec $a =$ classe d'équivalence de $(t_0, x_0)\,.$
C'est ce point de vue que Lagrange a utilisé dans son mémoire de 1809.

Bibliographie (1)

[1] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

[2] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[3] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

Bibliographie (2)

[4] T. Hawkins, *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups*.

[5] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

[6] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, G. Reimer, Berlin, 1881–1891.

[7] J.-L. Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres de Berlin, 1775. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (3)

[8] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Mémoire lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[9] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[10] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (4)

[11] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par les éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par les éditions Blanchard, Paris.

[12] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.

[13] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

Bibliographie (5)

[14] J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scie nze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.

[15] J.-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 45–54. Numérisé par Numdam, http ://www.numdam.org.

[16] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.