À propos de la note d'Henri Poincaré "Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique"

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie

18 janvier 2013

Sommaire

Introduction
Plan
La note de Poincaré
Cas particulier 1 : l'équation d'Euler-Lagrange
Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour un corps rigide
L'équation d'Euler-Poincaré sous forme intrinsèque
Équation d'Euler-Poincaré et application moment
La réduction lagrangienne
Cas où le lagrangien est hyper-régulier
Réduction d'Euler-Poincaré hamiltonienne
L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$
Réductions d'Euler-Poincaré et de Marsden-Weinstein
Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie
Équivalence des méthodes de réduction
Brisure de symétrie et produits semi-directs
Exemple : mouvement d'un corps rigide pesant autour d'un point fixe
Conclusion
Remerciements
Bibliographie

Introduction

La note d'Henri Poincaré du 19 février 1901, intitulée "Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique", a suscité, depuis les années 1990, de nombreuse publications [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18] par des auteurs travaillant dans le domaine dit "Mécanique géométrique". Ces auteurs appellent "équations d'Euler-Poincaré" les équations obtenues par Poincaré dans cette Note, et "Réduction lagrangienne" l'utilisation de ces équations pour simplifier la résolution de problèmes de mécanique en tenant compte de l'existence de symétries.

Les hypothèses faites dans ces publications modernes sont souvent plus restrictives que celles faites par Poincaré. C'est pourquoi il m'a semblé utile de revenir aux sources (la note de Poincaré) afin de voir si les auteurs modernes n'ont pas laissé de côté certains aspects de la pensée de Poincaré.

Plan (1)

- Je commencerai par exposer, dans le langage actuel, le contenu de la note de Poincaré. Les équations obtenues par Poincaré seront appelées "Équation d'Euler-Poincaré" (au singulier car une équation différentielle sur une variété de dimension quelconque sera considérée comme un objet mathématique unique, bien qu'elle apparaisse comme un système de plusieurs équations lorsqu'elle est exprimée en coordonnées locales). Je donnerai à la fois l'expression en coordonnées locales (comme le fait Poincaré) et l'expression intrinsèque de cette équation.
- Je montrerai que les équations d'Euler-Lagrange et l'équation d'Euler pour le mouvement d'un corps rigide ayant un point fixe sont deux cas particuliers de l'équation d'Euler-Poincaré.
- Je montrerai ensuite que l'équation d'Euler-Poincaré s'exprime simplement en termes de l'application moment et de l'application de Legendre.

Plan (2)

- Je parlerai ensuite du procédé dit de “réduction lagrangienne”, qui utilise l’équation d’Euler-Poincaré pour tenir compte des symétries.
- J’exposerai ensuite la forme simplifiée prise par la réduction lagrangienne (mal nommée) lorsque le lagrangien du système est hyper-régulier. Cette hypothèse supplémentaire permettra de montrer l’équivalence de l’équation d’Euler-Poincaré et de l’équation de Hamilton, et de commencer la comparaison de deux méthodes de réduction : la réduction dite lagrangienne, et la réduction de Marsden-Weinstein.
- J’étudierai le cas où, l’espace de configuration du système étant un groupe de Lie, on peut, en exploitant les actions du groupe sur lui-même à droite et à gauche, prouver la complète équivalence des méthodes de réduction “lagrangienne” et de Marsden-Weinstein.
- Enfin j’indiquerai comment une “brisure de symétrie” fait souvent apparaître l’action d’un produit-semi-direct.

La note de Poincaré (1)

Poincaré considère un système mécanique lagrangien dont l'espace de configuration est une variété différentiable Q, de lagrangien $L : TQ \to \mathbb{R}$. On sait que les *mouvements* du système sont les courbes paramétrées $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ qui rendent stationnaire, pour les variations infinitésimales de γ *à extrémités fixées*. l'intégrale d'action

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)\,dt\,.$$

Poincaré suppose qu'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ agit Q. Autrement dit, il suppose qu'il existe un homomorphisme ψ de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie $A^1(Q)$ des champs de vecteurs différentiables sur Q. Il suppose l'action localement transitive, c'est-à-dire telle que l'application

$$\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ\,, \quad (x, X) \mapsto \psi(X)(x)$$

soit surjective.

La note de Poincaré (2)

En fait, les considérations de Poincaré étant essentiellement locales,l'homomorphisme d'algèbres de Lie $\psi : \mathcal{G} \to A^1(Q)$ pourra être supposé à valeurs non pas dans l'espace des champs de vecteurs partout définis sur Q, mais seulement dans l'espace des champs de vecteurs définis sur un ouvert de Q, dans lequel Poincaré cherche à exprimer les équations du mouvement en coordonnées locales.

Mais pour mieux mettre en évidence les aspects géométriques de la construction, je ferai comme si ψ prenait ses valeurs dans l'espace des champs de vecteurs partout définis sur Q.

Pour chaque $X \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs $\psi(X)$ sera appelé *champ fondamental associé à* X, et noté, pour alléger l'écriture

$$X_Q = \psi(X)\,.$$

La note de Poincaré (3)

L'application

$$\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ\,, \quad (x, X) \mapsto X_Q(x)$$

est un *homomorphisme surjectif* du fibré vectoriel trivial $Q \times \mathcal{G}$ sur le fibré tangent TQ.

L'application transposée

$$\varphi^T : T^*Q \to Q \times \mathcal{G}^*$$

est un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels. C'est un proche parent de l'*application moment* de Souriau [19].

Puisque $\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ$ est surjective, à chaque courbe paramétrée continue $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$, de classe C^1 par morceaux, on peut associer une courbe paramétrée $\overline{\gamma} : [t_0, t_1] \to Q \times \mathcal{G}$ vérifiant, en chaque point $t \in [t_0, t_1]$ auquel γ est C^1,

$$\varphi\bigl(\overline{\gamma}(t)\bigr) = \frac{d\gamma(t)}{dt}\,.$$

On dira que $\overline{\gamma}$ est un *relèvement* de γ dans $Q \times \mathcal{G}$.

La note de Poincaré (4)

Un relèvement $\overline{\gamma} : [t_0, t_1] \to Q \times \mathcal{G}$ de la courbe paramétrée $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ s'écrit

$$\overline{\gamma} = (\gamma, V)\,,$$

où $V : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}$ doit vérifier, en tout point t où γ est C^1,

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \bigl(V(t)\bigr)_Q\bigl(\gamma(t)\bigr)\,.$$

Remarquer que la seconde composante V de $\overline{\gamma}$ n'est pas forcément continue aux points où γ n'est pas de classe C^1.
Lorsque $r = \dim \mathcal{G} > n = \dim Q$, un relèvement $\overline{\gamma} = (\gamma, V)$ de la courbe paramétrée $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ n'est pas unique : on peut ajouter à sa seconde composante V n'importe quelle courbe paramétrée qui, en chaque $t \in [t_0, t_1]$, a une valeur élément de l'algèbre d'isotropie

$$\mathcal{G}_{\gamma(t)} = \bigl\{X \in \mathcal{G}; X_Q\bigl(\gamma(t)\bigr) = 0\bigr\}$$

du point $\gamma(t)$.

La note de Poincaré (5)

On définit un "lagrangien" $\overline{L}$ sur $Q \times \mathcal{G}$ en posant

$$\overline{L} = L \circ \varphi : (x, X) \mapsto L\bigl(X_Q(x)\bigr) .$$

L'idée de Poincaré consiste à exprimer la fonctionnelle d'action non plus comme une fonctionnelle sur l'espace des courbes paramétrées continues $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$, de classe C^1 par morceaux, mais comme une fonctionnelle sur l'espace des courbes paramétrées $\overline{\gamma} : [t_0, t_1] \to Q \times \mathcal{G}$, dont la première composante γ est continue et C^1 par morceaux, et dont la seconde composante vérifie, en chaque $t \in [t_0, t_1]$ où γ est C^1,

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \bigl(V(t)\bigr)_Q\bigl(\gamma(t)\bigr) .$$

De telles courbes $\overline{\gamma} : (\gamma, V) : [t_0, t_1] \to Q \times \mathcal{R}$ seront dites *admissibles*.

La note de Poincaré (6)

La nouvelle fonctinnelle d'action s'écrit

$$\overline{I}(\overline{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \overline{L}\big(\overline{\gamma}(t)\big)\, dt\,.$$

On a bien sûr, si $\overline{\gamma}$ est un relèvement de γ dans $Q \times \mathcal{G}$,

$$I(\gamma) = \overline{I}(\overline{\gamma})\,,$$

ce qui ramène la recherche des extrémales de I à celle des extrémales de $\overline{I}$. Bien entendu, on devra les chercher dans l'espace des courbes $\overline{\gamma} = (\gamma, V) : [t_0, t_1] \to Q \times \mathcal{R}$ qui sont *admissibles*, et faire des variations infinitésimales de $\overline{\gamma}$ dans lesquelles la première composante γ reste à extrémités fixées.

La note de Poincaré (7)

En utilisant les techniques habituelles du calcul des variations, Poincaré obtient les équations que doivent vérifier les courbes $\overline{\gamma} = (\gamma, V)$ pour être des extrémales. Il les écrit, en notant $x^1, \dots, x^n$ les coordonnées locales associées à une carte de Q et $X^1, \dots, X^r$ les coordonnées locales associées à une base $(X_1, \dots, X_r)$ de $\mathcal{G}$, sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{L}\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)}{\partial X^i}\right) =& \Omega_i\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)\\ &+ \sum_{(k,s)=(1,1)}^{(r,r)} c_{is}^k V^s(t) \frac{\partial \overline{L}\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)}{\partial X^k}\,.\end{aligned}$$

Les c_{is}^k sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans la base $(X_1, \dots, X_r)$ et les Ω_i sont les fonctions sur $Q \times \mathcal{G}$

$$\Omega_k(x, X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{L}(x, X)}{\partial x^i} \bigl(X_k\bigr)_Q^i(x)\,.$$

La note de Poincaré (8)

Ces r équations scalaires sont les *équations d'Euler-Poincaré*, telles que Poincaré les a exprimées en coordonnées locales. Jointes à l'équation exprimant que $\overline{\gamma}$ est une courbe admissible,

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \big(V(t)\big)_Q\big(\gamma(t)\big)\,,$$

elles forment un système de $n + r$ équations équivalent au système d'équations d'Euler-Lagrange classique du calcul des variations. Lorsque $\dim \mathcal{G} = r > \dim Q = n$, ce système d'équations est *sous-déterminé*, puisqu'on a vu que la seconde composante V de $\overline{\gamma}$ n'était pas déterminée de manière unique : les équations d'Euler-Poincaré ne sont alors pas toutes indépendantes. Poincaré termine en remarquant que ses équations sont intéressantes surtout lorsque les Ω_i (qui s'interprètent comme les composantes des forces exercées sur le système) ne dépendent pas des coordonnées x^i, et que les équations d'Euler-Lagrange et les équations d'Euler du mouvement d'un corps rigide s'obtiennent comme des cas particuliers.

Cas particulier 1 : l'équation d'Euler-Lagrange

Dans le domaine d'une carte, de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$, l'espace de configuration Q s'identifie à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est l'algèbre abélienne $\mathbb{R}^n$, avec pour base $(X_1, \ldots, X_n)$. L'homomorphisme d'algèbres de Lie ψ est l'application linéaire $\psi(X_i) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $1 \leq i \leq n$. L'isomorphisme $\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ$ a pour expression

$$\varphi(x, X_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soit $L : TQ \to \mathbb{R}$ un lagrangian. En coordonnées locales, l'expression de $\overline{L} = L \circ \varphi$ est la même que celle de L :

$$\overline{L}(x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^n) = L(x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^n).$$

L'équation d'Euler-Poincaré devient

$$\frac{d}{dt}\Big(d_2 L\big(\gamma(t), V(t)\big)\Big) = d_1 L\big(\gamma(t), V(t)\big).$$

On reconnaît l'équation d'Euler-Lagrange.

Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour un corps rigide (1)

L'espace physique dans un référentiel galiléen fixé est mathématiquement représenté par un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. Le mouvement d'un corps rigide ayant un point fixe pendant un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ est décrit par une courbe paramétrée $\gamma : [t_0, t_1] \to G$, à valeurs dans le groupe G (isomorphe à $SO(3)$) des isométries linéaires de E conservant l'orientation. Pour chaque $t \in [t_0, t_1]$, $\gamma(t)$ est l'isométrie (unique si le corps rigide a au moins trois points non alignés) qui transforme une position de référence du corps rigide (choisie arbitrairement une fois pour toutes) en la position qu'il occupe à l'instant t.

La *vitesse angulaire vraie* du corps en mouvement à l'instant t est

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma}(t)G \,.$$

Arnold [1] explique comment, de deux manières, lui associer un élément de $T_e G$ (identifié à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$) ayant une signification physique.

Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour un corps rigide (2)

1. $\Omega_S(t) = TL_{\gamma(t)^{-1}}\left(\dfrac{d\gamma(t)}{dt}\right)$ est la valeur en e du champ de vecteurs *invariant à gauche* sur G qui prend la valeur $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$ en $\gamma(t)$. C'est la vitesse angulaire du corps en mouvement vue par un observateur lié à ce corps, en mouvement avec lui ;
2. $\Omega_E(t) = TR_{\gamma(t)^{-1}}\left(\dfrac{d\gamma(t)}{dt}\right)$ est la valeur en e du champ de vecteurs *invariant à droite* sur G qui prend la valeur $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$ en $\gamma(t)$. C'est la vitesse angulaire du corps en mouvement vue par un observateur au repos dans le référentiel de l'espace physique E, par rapport auquel on étudie le mouvement.

Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour un corps rigide (3)

L'énergie cinétique a pour expression

$$T\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2} I\big(\Omega_S(t), \Omega_S(t)\big)$$

où I est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $T_e G \equiv \mathcal{G}$, appelée *opérateur d'inertie*. En raison de la rigidité du corps, et du fait que $\Omega(t)$ est la vitesse angulaire dans le référentiel par rapport auquel le corps est au repos, *I ne dépend pas* de $\gamma(t)$.

L'énergie potentielle a pour expression

$$U\big(\gamma(t)\big) = -\overrightarrow{P}.\overrightarrow{\gamma(t)(\overrightarrow{a})} = -\overrightarrow{\gamma(t)^{-1}(\overrightarrow{P})}.\overrightarrow{a}\,,$$

où $\overrightarrow{P} \in E$ est la force de la pesanteur qui s'exerce sur le corps (représentée ici par un vecteur vertical dirigé vers le bas) et $\overrightarrow{a}$ le vecteur ayant pour extrémités le point fixe et le centre de masse du corps dans sa position de référence. On a noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le produit scalaire de deux éléments $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de E.

Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour un rigide (4)

Le lagrangien du problème est donc

$$L\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2} I(\Omega_S(t), \Omega_S(t)) + \overrightarrow{\gamma(t)^{-1}(\overrightarrow{P})}.\overrightarrow{a}\,.$$

Pour écrire l'équation d'Euler-Poincaré, on utilise l'action de l'algèbre de Lie $T_eG \equiv \mathcal{G}$ qui associe à chaque $X \in \mathcal{G}$ le champ de vecteurs *invariant à gauche* sur G qui prend la valeur X à l'élément neutre. L'isomorphisme $\varphi : G \times \mathcal{G} \to TG$ est l'inverse de la trivialisation par translation à gauche, et $\overline{L} = L \circ \varphi : G \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$\overline{L}(x, X) = \frac{1}{2} I(X, X) + \overrightarrow{x^{-1}(\overrightarrow{P})}.\overrightarrow{a}\,.$$

Cas particulier 2 : l'équation d'Euler pour le mouvement d'un rigide ayant un point fixe (5)

L'équation d'Euler-Poincaré s'écrit

$$\frac{d}{dt}\Big(I^\flat\big(\Omega_S(t)\big)\Big) = -\,\mathrm{ad}^*_{\Omega_S(t)}\Big(I^\flat\big(\Omega_S(t)\big)\Big) + \varphi^T\Big(dU\big(\gamma(t)\big)\Big)\,.$$

On a noté $I^\flat : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels défini par

$$\big\langle I^\flat(X), Y\big\rangle = I(X, Y)\,.$$

On reconnaît *l'équation d'Euler* pour le mouvement d'un corps rigide ayant un point fixe.

Lorsque l'énergie potentielle U est nulle (soit parce qu'il n'y a pas de pesanteur, soit parce que le point fixe coïncide avec le centre de masse) le terme dépendant de $\gamma(t)$ dans le membre de droite disparaît, et cette équation devient une équation différentielle ordinaire sur $\mathcal{G}^*$.

L'équation d'Euler-Poincaré sous forme intrinsèque (1)

En suivant pas à pas la démarche de Poincaré tout en ayant soin d'écrire tous les calculs sous forme intrinsèque, indépendamment de tout choix de coordonnées locales, on montre que l'équation d'Euler-Poincaré s'écrit

(E-P1)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\Bigl(d_2\overline{L}\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)\Bigr) = \Omega\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)\,,$$

$$\text{avec}\quad \Omega = p_{\mathcal{G}^*}\circ\varphi^T\circ d_1\overline{L}\,.$$

Rappelons que $\varphi^T : T^*Q \to Q\times\mathcal{G}^*$ est le morphisme de fibrés vectoriels transposé de $\varphi : Q\times\mathcal{G}\to TG$, $\varphi(x,X) = X_Q(x)$. On a noté $p_{\mathcal{G}^*} : Q\times\mathcal{G}^*\to\mathcal{G}^*$ la projection canonique sur le second facteur, $d_1\overline{L} : Q\times\mathcal{G}\to T^*Q$ et $d_2\overline{L} : Q\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}^*$ les différentielles partielles de la fonction $\overline{L} : Q\times\mathcal{G}\to\mathbb{R}$ par rapport à ses deux variables, éléments respectivement de Q et de $\mathcal{G}$.

L'équation d'Euler-Poincaré sous forme intrinsèque (2)

Les conventions de signe faite pour les actions adjointe et co-adjointe sont (X et $Y \in \mathcal{G}$, $\zeta \in \mathcal{G}^*$)

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]\,, \quad \langle \mathrm{ad}^*_X \zeta, Y \rangle = -\langle \eta, \mathrm{ad}_X Y \rangle\,.$$

On doit bien sûr joindre à l'équation d'Euler-Poincaré l'équation exprimant que $\overline{\gamma} = (\gamma, V)$ est un relèvement admissible de sa première composante γ. Cette équation, que j'appelerai *condition de compatibilité*, s'écrit

(CC)

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \varphi\bigl(\gamma(t), V(t)\bigr)\,.$$

Équation d'Euler-Poincaré et application moment (1)

La forme de Liouville sur T^*Q est

$$\big\langle \eta(\xi), w \big\rangle = \big\langle \xi, T\pi_Q(w) \big\rangle\,, \quad \xi \in T^*Q\,,\ w \in T_\xi(T^*Q)\,,$$

où $\pi_Q : T^*Q \to Q$ est la projection canonique et $T\pi_Q : T(T^*Q) \to TQ$ son prolongement aux vecteurs. La forme symplectique canonique de T^*Q est $\omega = d\eta$.
À chaque fonction différentiable $f : T^*Q \to \mathbb{R}$ on associe le champ de vecteurs hamiltonien $\mathcal{X}_f$, défini par

$$i(\mathcal{X}_f)\omega = -df\,.$$

Pour chaque $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental $\psi(Q) = X_Q$ sur Q détermine sur T^*Q la fonction différentiable

$$f_{X_Q}(\xi) = \big\langle \xi, X_Q \circ \pi_Q(\xi) \big\rangle\,, \quad \xi \in T^*Q\,.$$

Cela permet de relever l'action ψ de $\mathcal{G}$ sur Q en une action $\widehat{\psi}$ sur T^*Q, en prenant pour champ fondamental associé à chaque $X \in \mathcal{G}$ le champ de vecteurs hamiltonien sur T^*Q de hamiltonien f_{X_Q}. On écrira X_{T^*Q} pour $\widehat{\psi}(X)$.

Équation d'Euler-Poincaré et application moment (2)

L'action $\widehat{\psi}$ est hamiltonienne et a pour moment $J : T^*Q \to \mathcal{G}^*$

$$\bigl\langle J(\xi), X \bigr\rangle = f_{X_Q}(\xi) = \bigl\langle \xi, X_Q \circ \pi_Q(\xi) \bigr\rangle\,, \quad \xi \in T^*Q\,,\ X \in \mathcal{G}\,.$$

Puisque $X_Q \circ \pi_Q(\xi) = \varphi\bigl(\pi_Q(\xi), X\bigr)$, on voit en utilisant la transposition que

$$J = p_{\mathcal{G}^*} \circ \varphi^T\,, \quad \text{ou en d'autres termes,} \quad \varphi^T = (\pi_Q, J)\,.$$

La *différentielle verticale* d'une fonction différentiable $f : TQ \to \mathbb{R}$ est l'application $d_{\mathrm{ver}} f : TQ \to T^*Q$ associant à chaque $v \in TQ$, la différentielle en v de la restriction de f à la fibre $T_{\tau_Q(v)}Q$, où $\tau_Q : TQ \to Q$ est la projection canonique. L'*application de Legendre* $\mathcal{L} : TQ \to T^*Q$ associée au lagrangien L est $d_{\mathrm{ver}} L$.

Équation d'Euler-Poincaré et application moment (3)

On peut exprimer l'équation d'Euler-Poincaré sous une forme faisant intervenir l'application moment J et l'application de Legendre $\mathcal{L}$:

(E-P2)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\Big(J \circ \mathcal{L} \circ \varphi\big(\gamma(t), V(t)\big)\Big) = J \circ d_1\overline{L}\big(\gamma(t), V(t)\big)\,.$$

On doit bien sûr lui joindre la condition de compatibilité :

(CC)

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \varphi\big(\gamma(t), V(t)\big)\,.$$

La réduction lagrangienne (1)

Supposons maintenant, comme le suggère la remarque faite par Poincaré à la fin de sa note, que la fonction $\overline{L} : Q \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ne dépende que de sa deuxième variable $X \in \mathcal{G}$. Autrement dit, $\overline{L}$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$. Sa différentielle partielle $d_1\overline{L}$ par rapport à sa première variable est donc nulle et sa différentielle partielle $d_2\overline{L}$ par rapport à sa deuxième variable est sa différentielle usuelle $d\overline{L}$. L'équation d'Euler-Poincaré prend la forme simplifiée (appelée *basic Euler-Poincaré equation* par Darryl Holm, Tudor Ratiu et leurs associés [7])

(E-P3)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\left(d\overline{L}\big(V(t)\big)\right) = O\,.$$

C'est une équation différentielle pour la courbe paramétrée inconnue $V : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}$, qui ne contient plus γ

La réduction lagrangienne (2)

L'équation **(E.P3)** n'est pas résolue par rapport à $\dfrac{dV(t)}{dt}$: c'est une *équation différentielle implicite*. On sait de plus que si $r = \dim \mathcal{G} > n = \dim Q$, cette équation est *sous-déterminée*, puisque V n'est déterminée qu'à addition près d'une courbe dont la valeur, pour chaque t, appartient à l'algèbre d'isotropie de $\gamma(t)$. Une fois trouvée une solution V de **(E-P3)**, on peut la porter dans la condition de compatibilité **(CC)**, qui devient alors une équation différentielle ordinaire pour la courbe paramétrée γ, sous forme canonique (résolue par rapport à $\dfrac{d\gamma(t)}{dt}$).
On voit donc que lorsque $\overline{L}$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$, la détermination des mouvements du système peut, grâce à l'emploi de l'équation d'Euler-Poincaré, se faire en deux étapes : résolution de (**E.P3)**, puis résolution de **(CC)**. C'est en ce sens qu'on peut parler de *réduction*.

La réduction lagrangienne (3)

Remarque importante L'hypothèse selon laquelle $\overline{L} = L \circ \varphi : Q \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ne dépend que de sa seconde variable, c'est-à dire est une fonction définie sur $\mathcal{G}$, *ne veut pas dire que L est invariant par le relèvement à TQ de l'action de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur Q*. On vérifie en effet que la dérivée de Lie de L relativement à un champ de vecteurs fondamental de cette action n'est en général pas nulle. La vraie signification de cette hypothèse est indiquée par le lemme suivant.

Lemme

L'application $\overline{L} = L \circ \varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$ si et seulement si, pour chaque $X \in \mathcal{G}$, le lagrangian L est constant sur l'image $X_Q(Q)$ du champ de vecteurs fondamental $X_Q : Q \to TQ$. De plus, lorsque cette condition est satisfaite, l'application moment J est constante sur l'image $\mathcal{L} \circ X_Q(Q)$ de l'application $\mathcal{L} \circ X_Q : Q \to T^*Q$.

La réduction lagrangienne (4)

Démonstration.

Pour chaque $x \in Q$ et $X \in \mathcal{G}$, on a

$$\overline{L}(x, X) = L \circ \varphi(x, X) = L\bigl(X_Q(x)\bigr) \,,$$

ce qui prouve que $\overline{L}$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$ si et seulement si pour chaque $X \in \mathcal{G}$, L est constant sur la sous-variété $X_Q(Q)$ de TQ.

De plus, lorsque cette condition est satisfaite, pour tous $x \in Q$, X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$\bigl\langle J \circ \mathcal{L} \circ X_Q(x), Y \bigr\rangle = \bigl\langle d_2\overline{L}(x, X), Y \bigr\rangle = \bigl\langle d\overline{L}(X), Y \bigr\rangle \,,$$

ce qui prouve que pour tout $Y \in \mathcal{G}$, $\langle J, Y \rangle$ est constant sur le sous-ensemble $\mathcal{L} \circ X_Q(Q)$ de T^*Q. Autrement dit J est constant sur ce sous-ensemble. $\square$

Cas où le lagrangien est hyper-régulier (1)

Supposons maintenant le lagrangien L hyper-régulier. L'application de Legendre $\mathcal{L} : TQ \to T^*Q$ est alors un difféomorphisme et on peut définir sur T^*Q un hamiltonien

$$H(\xi) = \left\langle \xi, \mathcal{L}^{-1}(\xi) \right\rangle - L\bigl(\mathcal{L}^{-1}(\xi)\bigr)\,, \quad \xi \in T^*Q\,.$$

On sait alors que les formalismes lagrangien et hamiltonien sont équivalents. Le formalisme d'Euler-Poincaré, qui est toujours équivalent au formalisme lagrangien, est donc dans ce cas équivalent aussi au formalisme hamiltonien.

Lorsque $r = \dim \mathcal{G} = n = \dim Q$, l'équivalence du formalisme d'Euler-Poincaré et du formalisme hamiltonien est facile à comprende : $\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ$ et $\mathcal{L} : TQ \to T^*Q$ sont des difféomorphismes. Le système formé par l'équation d'Euler-Poincaré et la condition de compatibilité est l'image, par le difféomorphisme $(\mathcal{L} \circ \varphi)^{-1} : T^*Q \to Q \times \mathcal{G}$, de l'équation de Hamilton sur T^*Q.

Cas où le lagrangien est hyper-régulier (2)

Les choses sont moins simples lorsque $r = \dim \mathcal{G} > n = \dim Q$. L'homomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi : Q \times \mathcal{G} \to TQ$ est surjectif mais pas injectif : son noyau est le sous-fibré vectoriel de $Q \times \mathcal{G}$ dont la fibre en chaque $x \in Q$ est l'algèbre d'isotropie $\mathcal{G}_x$ de ce point.

On peut choisir (par exemple au moyen d'un produit scalaire euclidien sur $\mathcal{G}$) un sous-fibré vectoriel $Q \times \mathcal{G}$ dont la fibre en chaque $x \in Q$ est un supplémentaire de $\mathcal{G}_x$ dans $\mathcal{G}$. L'espace total Γ de ce sous-fibré est de dimension $2n$, et l'application

$$\mathcal{L} \circ \varphi : Q \times \mathcal{G} \to T^*Q$$

restreinte à Γ est un difféomorphisme de Γ sur T^*Q. Sur Γ, l'équation d'Euler-Poincaré apparaît comme l'image de l'équation de Hamilton sur T^*Q par $\big((\mathcal{L} \circ \varphi)|_\gamma\big)^{-1}$.

Réduction d'Euler-Poincaré hamiltonienne

On suppose L hyper-régulier et, de plus, tel que $\overline{L} = L \circ \varphi$ soit une fonction définie sur $\mathcal{G}$. On sait déjà que pour tout $X \in \mathcal{G}$, L est constant sur $X_Q(Q)$ et J constant sur $\mathcal{L} \circ X_Q(Q)$ (qui, lorsque L est hyper-régulier, est une sous-variété de T^*Q). Le hamiltonien a une propriété d'invariance analogue.

Lemme

Lorsque le lagrangian L est hyper-régulier et tel que $\overline{L}$ soit une fonction définie sur $\mathcal{G}$, pour chaque $X \in \mathcal{G}$ le hamiltonien H est constant sur la sous-variété $\mathcal{L} \circ X_Q(Q)$ de T^*Q.

Démonstration.

Soit $X \in \mathcal{G}$. On a, pour tout $x \in Q$,

$$H \circ \mathcal{L} \circ X_Q(x) = \bigl\langle \mathcal{L} \circ X_Q(y), X_Q(y) \bigr\rangle - L \circ X_Q(y) = \bigl\langle d\overline{L}(X), X \bigr\rangle - \overline{L}(X)\,,$$

donc H est constant sur $\mathcal{L} \circ X_Q(Q)$ of T^*Q. $\square$

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ (1)

Les hypothèses sont toujours : L est hyper-régulier et tel que $\overline{L}$ soit une fonction définie sur $\mathcal{G}$. On sait alors que les formalismes d'Euler-Poincaré et de Hamilton sont équivalents, et on a vu que l'équation d'Euler-poincaré prend la forme simplifiée

(E-P3)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\left(d\overline{L}\big(V(t)\big)\right) = O\,.$$

Or on sait que $d\overline{L}\big(V(t)\big) = J \circ \mathcal{L} \circ \varphi \circ (\gamma, V)$. Il est donc tentant de définir la courbe paramétrée $\xi = J \circ \mathcal{L} \circ \varphi \circ (\gamma, V) : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}^*$, et d'écrire l'équation d'Euler-Poincaré sous la forme

(E-P4)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\big(\xi(t)\big) = 0\,.$$

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ (2)

L'équation **(E-P4)** montre que la courbe paramétrée $\xi : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}^*$ prend ses valeurs dans une orbite coadjointe de $\mathcal{G}^*$. Mais peut-on la considérer comme une équation différentielle ordinaire sur $\mathcal{G}^*$ pour la courbe inconnue ξ ? Il y a à cela deux difficultés.

1. Les applications $V : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}$ et $\xi : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}^*$ ne prennent pas leurs valeurs dans le même espace. Pour chaque $t \in [t_O, t_1]$, l'élément $V(t)$ de $\mathcal{G}$ est lié à l'élément $\xi(t)$ de $\mathcal{G}^*$ de manière compliquée, et n'est d'ailleurs pas complètement déterminé par $\xi(t)$.
2. Lorsque $r = \dim \mathcal{G} > n = \dim Q$, pour chaque $x \in Q$ la restriction à $T^*_x Q$ de l'application moment $J : T^*Q \to \mathcal{G}^*$ est injective, mais pas surjective : son image est l'annulateur $(\mathcal{G}_x)^0$ de l'algèbre d'isotropie $\mathcal{G}_x$. Par suite, l'équation **(E-P4)** n'est pas partout bien définie sur $\mathcal{G}^*$.

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ (3)

Rappelons cependant que $\mathcal{G}^*$ possède une structure Poisson naturelle, dite de *Kirillov-Kostant-Souriau*, qui permet d'associer à chaque fonction différentiable $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs (dit *hamiltonien*) $\mathcal{X}_h$ sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour expression

$$\mathcal{X}_h(\xi) = -\operatorname{ad}^*_{dh(\xi)} \xi \,, \quad \xi \in \mathcal{G}^* \,.$$

De plus, l'application moment $J : T^*Q \to \mathcal{G}^*$ est de Poisson (T^*Q étant muni de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique et $\mathcal{G}^*$ de la structure de Poisson de Kirillov-Kostant-Souriau) ([14], chapter IV proposition 5.2). Donc *s'il existe une fonction différentiable* $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$H = h \circ J \,,$$

la courbe paramétrée $\xi = J \circ \mathcal{L} \circ \varphi \circ (\gamma, V) : [t_0, t_1] \to \mathcal{G}^*$ est solution de l'équation différentielle de Hamilton sur $\mathcal{G}^*$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\operatorname{ad}^*_{dh\left(\xi(t)\right)} \left(\xi(t)\right) .$$

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ (4)

Comparons cette équation avec l'équation d'Euler-Poincaré

(E-P4)

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathrm{ad}^*_{V(t)}\right)\bigl(\xi(t)\bigr) = 0\,.$$

Ces deux équations sont identiques si on donne à $V(t)$ la valeur

$$V(t) = -dh\bigl(\xi(t)\bigr)\,.$$

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ s'écrit donc

(E-P5)

$$\left(\frac{d}{dt} + \mathrm{ad}^*_{dh\left(\xi(t)\right)}\right)\bigl(\xi(t)\bigr) = 0\,.$$

L'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ (5)

On a donc prouvé le résultat suivant

Proposition

On suppose le lagrangien L hyper-régulier et tel que $\overline{L} = L \circ \varphi$ soit une fonction définie sur $\mathcal{G}$. S'il existe une fonction différentiable $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ telle que le hamiltonien $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ s'écrive

$$H = h \circ J \,,$$

l'image par l'application $J \circ \mathcal{L} \circ \varphi : Q \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ de l'équation d'Euler-Poincaré **(E-P4)** *sur $Q \times \mathcal{G}$ est l'équation de Hamilton* **(E-P5)** *sur $\mathcal{G}^*$ pour le hamiltonien h, $\mathcal{G}^*$ étant muni de la structure de Poisson de Kirillov-Kostant-Souriau.*

Réductions d'Euler-Poincaré et de Marsden-Weinstein (1)

Dans les hypothèses de la proposition précédente on peut, pour déterminer les mouvements du système étudié, résoudre dans une première étape l'image dans $\mathcal{G}^*$ de l'équation d'Euler-Poincaré. C'est une équation différentielle ordinaire sur un espace vectoriel de dimension r qui, comme l'affirme cette proposition, n'est autre que l'équation de Hamilton associée au hamiltonien $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$. C'est en ce sens qu'on peut parler de "réduction". L'hypothèse permettant l'emploi de cette méthode est l'existence de la fonction $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ telle que le Hamiltonien H s'exprime comme une fonction composée de h avec le moment $J : T^*Q \to \mathcal{G}^*$:

$$H = h \circ J \,.$$

La méthode de réduction de Marsden-Weinstein [16] s'emploie dans des hypothèses différentes, lorsque l'application moment est intégrale première de l'équation de Hamilton sur T^*Q associée au hamiltonien $H : T^*Q \to \mathbb{R}$.

Réductions d'Euler-Poincaré et de Marsden-Weinstein (2)

Les propriétés d'invariance utilisées par ces deux méthodes de réduction sont liées par la propriété suivante (utilisée par exemple dans [14] chapitre IV section 6.11, ou [15] dernière remarque de la Section 2).

Soit $\zeta \in T^*Q$. Notons $T_\zeta \mathcal{O}_\zeta$ le sous-espace vectoriel de $T_\zeta(T^*Q)$ engendré par les valeurs en ζ des champs de vecteurs fondamentaux X_{T^*Q}, pour tous les $X \in \mathcal{G}$. Cette notation est justifiée car lorsque l'action de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur T^*Q provient de l'action d'un groupe de Lie, $T_\zeta \mathcal{O}_\zeta$ est l'espace tangent en ζ à l'orbite $\mathcal{O}_\zeta$ de ce point. Alors :

Chacun des deux sous-espaces vectoriels de $T_\zeta(T^*Q)$

$$\ker T_\zeta J \quad \text{et} \quad T_\xi \mathcal{O}_\zeta$$

est l'orthogonal symplectique de l'autre.

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (1)

On suppose maintenant que l'espace de configuration Q est un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie (identifiée à T_eG) est $\mathcal{G}$. On suppose aussi que l'action ψ de $\mathcal{G}$ sur $Q \equiv G$ est l'homomorphisme qui associe, à chaque $X \in \mathcal{G} = T_eG$, le champ de vecteurs X_G^R *invariant à droite* sur G dont la valeur à l'élément neutre est X. On a donc $n = \dim Q = \dim \mathcal{G} = r$.

Actions d'un groupe de Lie sur lui-même et leurs relèvements

Pour tout $g \in G$, on note $R_g : G \to G$ et $L_g : G \to G$ les translations à droite et à gauche

$$R_g(x) = xg\,, \quad L_g(x) = gx\,, \quad x \in G\,,$$

et par $TR_g : TG \to TG$ and $TL_g : TG \to TG$ leurs prolongements aux vecteurs.

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (2)

Remarquer que X_G^R est le champ de vecteurs fondamental associé à X pour l'action de G sur lui-même par translation *à gauche*

$$\Phi^L : G \times G \to G\,, \quad \Phi^L(g,x) = gx\,,$$

et non pas à droite, puisque

$$X_G^R(x) = \frac{d\bigl(\exp(tX)x\bigr)}{dt}\Bigr|_{t=0} = TR_x(X)\,, \quad X \in \mathcal{G}\,, \quad x \in G\,.$$

Le morphisme de fibrés vectoriels $\varphi : G \times \mathcal{G} \to TG$ est maintenant l'isomorphisme

$$\varphi(x,X) = X_G^R(x) = TR_x(X)\,, \quad x \in G\,, \quad X \in \mathcal{G}\,.$$

Le relèvement au fibré tangent de l'action Φ^L, noté $\overline{\Phi}^L : G \times TG \to TG$, associe à chaque $g \in G$ le prolongement aux vecteurs du difféomorphisme $L_g : G \to G$, $x \mapsto L_g(x) = gx$:

$$\overline{\Phi}^L(g,v) = TL_g(v)\,, \quad g \in G\,, \quad v \in TG\,.$$

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (3)

Le relèvement au fibré cotangent de l'action Φ^L, noté $\widehat{\Phi}^L : G \times T^*G \to T^*G$, est l'action contragrédiente de $\overline{\Phi}^L$, avec un changement de signe (pour avoir une action à gauche) :

$$\widehat{\Phi}^L(g,\zeta) = (TL_{g^{-1}})^T(\zeta)\,, \quad g \in G\,, \quad \zeta \in T^*G\,.$$

On a noté $(TL_{g^{-1}})^T : T^*G \to T^*G$ le transposé de l'isomorphisme de fibrés vectoriels $TL_{g^{-1}} : TG \to TG$.

L'action $\widehat{\Phi}^L : G \times T^*G \to T^*G$ est hamiltonienne (voir par exemple [14], chapitre IV, théorème 4.6), et admet le moment Ad^*-équivariant

$$J^L : T^*G \to \mathcal{G}^*\,, \quad J^L(\zeta) = \left(TR_{\pi_G(\zeta)}\right)^T(\zeta)\,, \quad \zeta \in T^*G\,.$$

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (4)

Considérons maintenant l'action du groupe de Lie G sur lui-même par *translation à droite*

$$\Phi^R : G \times G \to G\,, \quad \Phi^R(x,g) = xg\,.$$

Pour cette action, le champ de vecteurs fondamental associé à $X \in \mathcal{G}$ est le champ de vecteurs *invariant à gauche* X^L_G sur G dont la valeur à l'élément neutre est X.

Les relèvements à TG et à T^*G de l'action Φ^R, notées $\overline{\Phi}^R : TG \times G \to TG$ et $\widehat{\Phi}^R : T^*G \times G \to T^*G$ sont, pour $g \in G$, $v \in TG$ et $\zeta \in T^*G$, exprimés par

$$\overline{\Phi}^R(v,g) = TR_g(v)\,, \quad \widehat{\Phi}^R(\zeta,g) = (TR_{g^{-1}})^T(\zeta)\,.$$

L'action $\widehat{\Phi}^R$ est hamiltonienne et admet pour moment Ad^*-équivarant

$$J^R(\zeta) = \bigl(TL_{\pi_G(\zeta)}\bigr)^T(\zeta)\,, \quad \zeta \in T^*G\,.$$

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (5)

La proposition suivante permet de mieux comprendre les propriétés d'invariance qui jouent un rôle dans la réduction dite "lagrangienne" (il vaudrait mieux dire "réduction d'Euler-Poincaré").

Proposition

Un hamiltonien différentiable $H : T^*G \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $H = h \circ J^L$, où $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, si et seulement si H est invariant par l'action $\widehat{\Phi}^R$.

Un hamiltonian H qui provient d'un lagrangien hyper-régulier $L : TG \to \mathbb{R}$, s'écrit sous la forme $H = h \circ J^L$ si et seulement si le lagrangien L est tel que la fonction

$$\overline{L} = L \circ \varphi : G \times \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}\,, \quad (x, X) \mapsto \overline{L}(x, X) = L\bigl(TR_x(X)\bigr)\,,$$

avec $x \in G$, $X \in \mathcal{G}$, soit définie sur $\mathcal{G}^*$. Ou encore, si et seulement si L est invariant par l'action $\overline{\Phi}^R$.

Démonstration.

Les expressions des actions $\widehat{\Phi}^L$ et $\widehat{\Phi}^R$ et de leurs applications moment J^L et J^R montrent que les ensembles de niveau $(J^L)^{-1}(\xi)$ de J^L, pour tous les $\xi \in \mathcal{G}^*$, sont les orbites de l'action $\widehat{\Phi}^R$ (de même, les ensembles de niveau de J^R sont les orbites de l'action $\widehat{\Phi}^L$). Ce sont donc des sous-variétés C^∞ de dimension n de T^*G difféomorphes à G. Puisque $J^L : T^*G \to \mathcal{G}^*$ est une submersion surjective, le hamiltonian H peut s'écrire $H = h \circ J^L$, où $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, si et seulement si H prend une valeur constante sur chaque ensemble de niveau de J^L, c'est-à-dire sur chaque orbite de Φ^R ; en d'autres termes, si et seulement si H est invariant par l'action $\widehat{\Phi}^R$.

La relation entre un lagrangien hyper-régulier L et le hamiltonien correspondant H montre que l'invariance de H par l'action $\widehat{\Phi}^R$ équivaut à l'invariance de L par l'action $\overline{\Phi}^R$. $\square$

Cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie (7)

Corollaire

Le hamiltonien H d'un système hamiltonien dont l'espace des phases est le fibré cotangent T^*G à un groupe de Lie G remplit les conditions d'application de la méthode de réduction lagrangienne pour l'action $\widehat{\Phi}^L$ (resp., $\widehat{\Phi}^R$) de G sur T^G, si et seulement si ce hamiltonien remplit les conditions d'application de la méthode de réduction de Marsden et Weinstein pour l'action $\widehat{\Phi}^R$ (resp., $\widehat{\Phi}^L$).

Démonstration.

H remplit les conditions d'application de la méthode de réduction lagrangienne pour l'action $\widehat{\Phi}^L$ si et seulement s'il peut s'écrire $H = h \circ J^L$, où J^L est l'application moment de $\widehat{\Phi}^L$. Ou, d'après la proposition précédente, si et seulement s'il est invariant par l'action $\widehat{\Phi}^R$, ce qui est précisément la condition d'application de la méthode de réduction de Marsden et Weinstein.
On peut bien sûr échanger les rôles de $\widehat{\Phi}^L$ et $\widehat{\Phi}^R$, J^L et J^R. □

Équivalence des méthodes de réduction "lagrangienne" et de Marsden-Weinstein (1)

Remarque

Soit H un hamiltonien défini sur le fibré cotangent T^*G à un groupe de Lie G, pouvant s'écrire $H = h \circ J^L$, donc invariant par l'action $\widehat{\Phi}^R$. L'application des méthodes de réduction lagrangienne et de Marsden-Weinstein conduisent exactement aux mêmes équations différentielles.

La réduction de Marsden-Weinstein Dans cette méthode [16] on considère le sous-ensemble $(J^R)^{-1}(\xi)$ de T^*G sur lequel J^R prend une valeur $\xi \in \mathcal{G}^*$. C'est une orbite de l'action $\widehat{\Phi}^L$, image de la 1-forme *invariante à gauche* dont la valeur en e est ξ. L'action $\widehat{\Phi}^R$ restreinte au sous-groupe G_ξ d'isotropie de ξ pour l'action coadjointe laisse invariante la sous-variété $(J^R)^{-1}(\xi)$.

Équivalence des méthodes de réduction “lagrangienne” et de Marsden-Weinstein (2)

L’ensemble des orbites de cette action de G_ξ sur $(J^R)^{-1}(\xi)$ possède une sructure symplectique naturelle : c’est la *variété symplectique réduite* (M_ξ, ω_ξ) de Marsden et Weinstein associée à ξ. Le hamiltonien H, étant constant sur chaque orbite de l’action de G_ξ sur $(J^R)^{-1}(\xi)$, induit un hamiltonien H_ξ sur M_ξ. La réduction de Marsden-Weinstein consiste à déterminer, dans une première étape, les courbes intégrales du champ de vecteurs hamiltonien $\mathcal{X}_{H_\xi}$ sur la variété symplectique réduite (M_ξ, ω_ξ).

La réduction dite“lagrangienne” Dans cette méthode, qu’on devrait plutôt appeler *réduction d’Euler-Poincaré*, on se sert de l’existence d’une fonction $h : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ telle que $H = h \circ J^L$ et du fait que J^L est une application de Poisson. On détermine donc, dans une première étape, les courbes intégrales du champ de vecteurs hamiltonien $\mathcal{X}_h$ sur la variété de Poisson $\mathcal{G}^*$.

Équivalence des méthodes de réduction “lagrangienne” et de Marsden-Weinstein (3)

On sait d'ailleurs que chaque courbe intégrale de $\mathcal{X}_h$ est contenue dans une orbite coadjointe (conséquence du fait que J^R est une intégrale première), et que les orbites coadjointes sont les *feuilles symplectiques* de $\mathcal{G}^*$. L'application $J^L : T^*G \to \mathcal{G}^*$ détermine, par passage au quotient, un difféomorphisme symplectique J^L_ξ de la variété symplectique de Marsden-Weinstein (M_ξ, ω_ξ) sur l'orbite coadjointe de ξ ; vérifiant $H_\xi = h \circ J^L_\xi$.

Conclusion   Les systèmes hamiltoniens auxquelles conduit l'application des méthodes de réduction “lagrangienne” et de Marsden-Weinstein sont identiques, puisqu'ils sont mis en correspondance par le difféomorphisme symplectique J^L_ξ.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (1)

L'espace de configuration naturel du mouvement d'un corps rigide ayant un point fixe est le groupe $SO(3)$. L'espace des phases, dans lequel s'écrivent les équations du mouvement, est $T^*\bigl(SO(3)\bigr)$.

En l'absence de pesanteur, ou lorsque le point fixe est le centre de masse (on appelle cela le *problème d'Euler-Poinsot*) le groupe de symétrie du problème est $SO(3)$. Après réduction, les équations du mouvement s'écrivent sur le dual $so(3)^*$ de l'algèbre de Lie de $SO(3)$.

En présence de pesanteur, lorsque le point fixe n'est pas le centre de masse, il y a *brisure de symétrie* : le groupe de symétries du système n'est plus $SO(3)$ mais le sous-groupe S^1 des rotations autour de la verticale passant par le point fixe. Dans ce cas (qui inclut les *cas d'intégrabilité* d'Euler-Lagrange et de Kovalevskaïa) on montre que les équations du mouvement s'écrivent, après réduction, sur le dual de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements euclidiens $E(3)$, produit semi-direct de $SO(3)$ et de $\mathbb{R}^3$.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (2)

Le remplacement du groupe de symétrie $SO(3)$ par le sous-groupe beaucoup plus petit S^1 conduit à écrire les équations du mouvement, après réduction, sur le dual d'une algèbre de Lie plus grande, produit semi-direct de l'algèbre de Lie du groupe de symétries initial avec un espace vectoriel.

Ce phénomène n'est pas exceptionnel : Darryl Holm, Tudor Ratiu et leurs associés écrivent dans [7] :

> *"It turns out that semidirect products occur under rather general circumstances when the symmetry in T^*G is broken".*

Je vais proposer une explication de ce remarquable phénomène.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (3)

On considère un système hamiltonien dont l'espace de configuration est un groupe de Lie connexe G de dimension n. Le hamiltonien $H : T^*G \to \mathbb{R}$ n'est plus supposé invariant par l'action $\widehat{\Phi}^R$, mais seulement par la restriction $\widehat{\Phi}^R_1 = \widehat{\Phi}^R|_{G_1}$ de cette action à un sous-groupe connexe G_1 de dimension k de G. On ne peut donc plus écrire H comme fonction composée de l'application moment J^L avec une fonction définie sur $\mathcal{G}^*$.

L'action $\widehat{\Phi}^L$ peut souvent être prolongée en une action hamiltonienne $\widehat{\Phi}^L_{pro}$ d'un produit semi-direct $G \times_s F$ de G avec un espace vectoriel F de fonctions définies sur l'espace homogène G/G_1, de manière telle que les orbites de cette action prolongée soient les feuilles du feuilletage de T^*G déterminé par l'orthogonal symplectique $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ du sous-fibré $\mathcal{F}$ de $T(T^*G)$ tangent aux orbites de l'action $\widehat{\Phi}^R_1$.

Le hamiltonien H peut alors s'écrire $H = h \circ J^L_{pro}$, fonction composée de l'application moment J^L_{pro} de $\widehat{\Phi}^L_{pro}$ et d'une fonction h définie sur le dual de l'algèbre de Lie de $G \times_s F$.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (4)

La méthode de réduction dite "lagrangienne" (qu'on devrait plutôt appeler "réduction d'Euler-Poincaré") permet alors d'écrire les équations du mouvement après réduction comme des équations de Hamilton sur le dual de l'algèbre de Lie de $G \times_s F$, muni de sa structure de Poisson canonique.

Les ingrédients permettant ces résultats sont les suivants.

Lemme

L'action $\widehat{\Phi}_1^R$ est hamiltonienne et a pour moment $J_1^R = p_{\mathcal{G}_1^*} \circ J^R$, où $p_{\mathcal{G}_1^*} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}_1^*$ est la projection transposée de l'inclusion canonique $i_{\mathcal{G}_1} : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}$. Les orbites de cette action sont les intersections des orbites de $\widehat{\Phi}^R$ et des images réciproques $\pi_G^{-1}(gG_1)$, par la projection canonique $\pi_G : T^*G \to G$, des orbites de l'action de G_1 sur G par translations à droite. L'ensemble $\mathcal{F}$ des vecteurs tangents à ces orbites et son orthogonal symplectique $\operatorname{orth} \mathcal{F}$ sont tous deux des sous-fibrés vectoriels complètement intégrables de $T(T^*G)$, de rangs k and $2n - k$ respectivement.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (5)

Lemme

L'application moment $J_1^R = p_{\mathcal{G}_1^*} \circ J^R : T^*G \to \mathcal{G}_1^*$ *est une submersion surjective, dont la restriction à chaque feuille du feuilletage de* T^*G *déterminé par* $\operatorname{orth} \mathcal{F}$ *est constante.*

L'application définie sur l'ensemble $\operatorname{Feuilles}(\operatorname{orth} \mathcal{F})$ *des feuilles de ce feuilletage qui associe à chaque feuille la valeur prise par* J_1^R *sur cette feuille est une bijection de* $\operatorname{Feuilles}(\operatorname{orth} \mathcal{F})$ *sur* $\mathcal{G}_1^*$*.*

Lemme

Soit $\varpi : G \to G/G_1$, $\varpi(g) = gG_1$, *la projection canonique. L'application* $(J^L, \varpi \circ \pi_G) : T^*G \to \mathcal{G}^* \times (G/G_1)$ *est une submersion surjective, dont la restriction à chaque feuille du feuilletage de* T^*G *déterminé par* $\mathcal{F}$ *est constante. L'application définie sur l'ensemble* $\operatorname{Feuilles}(\mathcal{F})$ *des feuilles de ce feuilletage qui associe à chaque feuille la valeur prise par* $(J^L, \varpi \circ \pi_G)$ *sur cette feuille est une bijection de* $\operatorname{Feuilles}(\mathcal{F})$ *sur* $\mathcal{G}^* \times (G/G_1)$*.*

Brisure de symétrie et produits semi-directs (6)

Remarques

1. Les feuilletages déterminés par $\mathcal{F}$ et $\operatorname{orth}\mathcal{F}$ sont *symplectiquement complets* au sens de P. Libermann[12, 13]. Les espaces $\mathrm{Feuilles}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Feuilles}(\operatorname{orth}\mathcal{F})$ possèdent des structures de variétés quotient. Ce sont deux variétés de Poisson qui constituent une *paire duale* au sens de Weinstein [22], et les projections de T^*G sur ces espaces de feuilles sont des applications de Poisson.
2. Le hamiltonien H étant constant sur chaque élément de $\mathrm{Feuilles}(\mathcal{F})$ peut s'écrire comme fonction composée de la projection $(J^L, \varpi \circ \pi_G) : T^*G \to \mathcal{G}^* \times (G/G_1)$ et d'une fonction définie sur $\mathcal{G}^* \times (G/G_1)$. Après réduction, les équations du mouvement peuvent donc s'écrire comme une équation de Hamilton sur cette variété de Poisson.

Mais on n'a pas encore ce qu'on voudrait, $\mathcal{G}^* \times (G/G_1)$ n'est pas le dual d'un produit semi-direct d'algèbres de Lie !

Brisure de symétrie et produits semi-directs (7)

Au lieu de G/G_1, on peut considérer l'espace vectoriel $C^\infty(G/G_1)$ des fonctions C^∞ définies sur G/G_1. Le groupe G agit à gauche sur $C^\infty(G/G_1)$ par l'action

$$\Psi : G \times C^\infty(G/G_1) \to C^\infty(G/G_1)\,, \quad \Psi(g,f) = L^*_{g^{-1}} f\,,$$

où $L^*_{g^{-1}} f \in C^\infty(G/G_1)$ est la fonction

$$L^*_{g^{-1}} f(hG_1) = f\bigl(L_{g^{-1}}(hG_1)\bigr) = f(g^{-1}hG_1)\,, \quad g \text{ et } h \in G\,,\ hG_1 \in G/G_1\,.$$

On peut donc munir le produit $G \times C^\infty(G/G_1)$ d'une structure de groupe produit semi-direct.

On pourra aussi considérer, au lieu $C^\infty(G/G_1)$ entier, des sous-espaces vectoriels de cet espace invariants par l'action de G, et faire leur produit semi-direct avec G.

Brisure de symétrie et produits semi-directs (8)

Lemme

Le sous-fibré $\operatorname{orth}\mathcal{F}$*, symplectiquement orthogonal aux orbites de l'action* $\widehat{\Phi}_1^R$*, est engendré par les champs de vecteurs fondamentaux de l'action* $\widehat{\Phi}^L$ *et par les champs de vecteurs hamiltoniens dont le hamiltonien est de la forme* $f \circ \varpi \circ \pi_G$*, où* $f \in C^\infty(G/G_1)$*,* $\varpi : G \to G/G_1$ *et* $\pi_G : T^*G \to G$ *étant les projections canoniques.*

Lemme

L'action de l'algèbre de Lie abélienne $C^\infty(G/G_1)$ *sur* T^*G *qui associe à chaque* $f \in C^\infty(G/G_1)$ *le champ de vecteurs de hamiltonien* $f \circ \varpi \circ \pi_G$ *admet, en un sens généralisé, une application moment, à valeurs dans l'espace* $\operatorname{Dist}(G/G_1)$ *des distributions sur* G/G_1*, dont la valeur en* $\xi \in T^*G$ *est la distribution de Dirac* $\delta_{\varpi\circ\pi(\xi)}$*.*

Brisure de symétrie et produits semi-directs (9)

Le dernier lemme montre qu'en combinant l'action $\widehat{\Phi}^L$ du groupe G et l'action de l'algèbre de Lie abélienne $C^\infty(G/G_1)$, on peut construire une action hamiltonienne du produit semi-direct d'algèbres de Lie $\mathcal{G} \times C^\infty(G/G_1)$ dont le moment, à valeurs dans $\mathcal{G}^* \times \mathrm{Dist}(G/G_1)$, est

$$\xi \mapsto \left(J^L(\xi), \delta_{\varpi\circ\pi(\xi)}\right), \quad \xi \in T^*G\,.$$

Malheureusement, ce moment prend ses valeurs dans un espace de dimension infinie.

Cependant, dans de nombreux exemples (par exemple le mouvement d'un corps rigide pesant ayant un point fixe), on peut remplacer $C^\infty(G/G_1)$ par une sous-algèbre de dimension finie assez grande pour que le moment *sépare* les feuilles de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire prenne des valeurs différentes sur deux éléments différents de $\mathrm{Feuilles}(\mathcal{F})$. Le mouvement après réduction est alors décrit par une équation de Hamilton sur le dual d'un produit semi-direct de $\mathcal{G}$ avec un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple : mouvement d'un corps rigide pesant autour d'un point fixe

Dans cet exemple, l'espace de configuration est le groupe G, isomorphe à $SO(3)$, des isométries linéaires de l'espace vectoriel euclidien E faisant passer le corps rigide de sa configuration de référence à une configuration quelconque. Le sous-groupe G_1 est formé par les éléments de G laissant l'énergie potentielle inchangée : c'est le *groupe des rotations autour de la verticale passant par le point fixe*, prise comme origine de E. L'espace homogène G/G_1, isomorphe à une sphère S^2, est matérialisé par la sphère, plongée dans l'espace E, parcourue par le centre de masse G du corps rigide lorsqu'il prend toutes les positions possibles.

Un espace de fonctions sur G/G_1 qui suffit à "séparer" les feuilles de $\mathrm{orth}\,\mathcal{F}$ est l'espace des fonctions sur G/G_1 composées de son plongement dans E avec une fonction linéaire sur E. Le produit semi-direct de G avec cet espace de fonctions est isomorphe au groupe (de dimension 6) des déplacements euclidiens de E (rotations et translations).

Conclusion (1)

Pour un système dont le lagrangien est hyper-régulier, la réduction dite "lagrangienne", qu'il faudrait plutôt appeler *réduction d'Euler-Poincaré*, consiste essentiellement à utiliser une action d'un groupe de Lie G (ou d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$) telle que le hamiltonien au lieu d'être constant sur les orbites, s'écrive comme une fonction composée de l'application moment et d'une fonction définie sur $\mathcal{G}^*$. L'équivalence de cette méthode de réduction et de la réduction de Marsden et Weinstein me semble clairement établie, au moins lorsque l'espace de configuration du système est le groupe de Lie G.

L'équivalence de ces deux méthodes de réduction est probablement vraie aussi lorsque l'espace de configuration du système est un espace homogène G/G_1. Ce point me semble cependant encore à clarifier, peut-être en utilisant le fait que $T^*(G/G_1)$ peut être obtenu comme variété symplectique réduite, pour une valeur nulle de l'application moment, à partir de l'action de G_1 à droite sur T^*G.

Conclusion (2)

Les systèmes dont le lagrangien n'est pas hyper-régulier, ni même régulier, me semblent poser des problèmes bien plus difficiles. L'étude de l'équation d'Euler-Poincaré pour ces systèmes est abordée dans le très long article [7]. Peut-être est-il possible d'aller plus loin en utilisant les travaux de W. Tulczyjew sur les systèmes hamiltoniens implicites [20, 21].

Remerciements

Je remercie Alain Chenciner qui a attiré mon attention sur la note d'Henri Poincaré et m'a communiqué les diapos de l'exposé fait par Tudor Ratiu [18].

Je remercie Géry de Saxcé et Claude Vallée de m'avoir invité à présenter une version préliminaire de ce travail à la réunion du CITV de septembre 2012, ainsi que Maylis Irigoyen, Marc Chaperon, Laurent Lazzarini et Jean-Pierre Marco de m'avoir invité ici.

Merci à tous ceux qui m'ont écouté !

Bibliographie I

[1] Vladimir Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble, v. 16 (1966), p. 319–361*.

[2] Anthony Bloch, P.S. Krishnaprasad, Jerrold Marsden, Tudor Ratiu, The Euler-Poincaré Equations and Double Bracket Dissipation, *Comm. Math. Phys. 175 (1996) p. 175, 1–42*.

[3] Marco Castrillón López, Tudor Ratiu, Steve Shkoller, *Reduction in principal fiber bundles : covariant Euler-Poincaré equations*, arXiv :math/9908102v2, August 1999.

[4] Hernán Cendra, Darryl Holm, Jerrold Marsden, Tudor Ratiu, Lagrangian reduction, the Euler–Poincaré Equations and Semidirect Products, *Amer. Math. Soc. Transl. 186, (1998), p. 1–25*.

Bibliographie II

[5] Hernán Cendra, Darryl Holm, Mark Hoyle, Jerrold Marsden, *The Maxwell-Vlasov equations in Euler-Poincaré form*, arXiv :chao-dyn/9801016v1, January 1998.

[6] Hernán Cendra, Jerrold Marsden, Sergei Pekarsky, Tudor Ratiu, Variational principles for Lie-Poisson and Euler-Poincaré equations, *Moscow Mathematical Journal Volume 3, Number 3, July–September 2003, p. 833–867*.

[7] Darryl Holm, Jerrold Marsden, Tudor Ratiu, *The Euler–Poincaré Equations and Semidirect Products with Applications to Continuum Theories*, Adv. in Math. 137 (1998) p. 1–81 and arXiv :chao-dyn/9801015v1, January 1998.

[8] Darryl Holm, Jerrold Marsden, Tudor Ratiu, *The Euler–Poincaré Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, arXiv :chao-dyn/9903035v1, March 1999.

Bibliographie III

[9] Darryl Holm, *Euler-Poincaré Dynamics of Perfect Complex Fluids*, arXiv :nlin/0103041v01, August 2000.

[10] Darryl Holm, *Geometric Mechanics*, Part I : *Dynamics and Symmetry* (354 pages), Part II : *Rotating, Translating and Rolling* (294 pages). World Scientific, London, 2008.

[11] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[12] Paulette Libermann, Sur quelques propriétés des variétés symplectiques, *Proc. conf. on differential geometry, 1980*. Univerzita Karlova, Praha, 1981.

Bibliographie IV

[13] Paulette Libermann, Sous-variétés et feuilletages symplectiquement réguliers, *Symplectic Geometry* (A. Crumeyrolle and J. Grifone, editors), p. 81–106. Pitman, London 1983.

[14] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Reidel, Dordrecht 1987.

[15] Charles-Michel Marle, On mechanical systems with a Lie group as configuration space, in *Jean Leray '99 Conference Proceedings : the Karlskrona conference in the Honor of Jean Leray*, (Maurice de Gosson, editor), Kluwer, Dordrecht 2003, p. 183–203.

[16] Jerrold E. Marsden and Alan Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Reports on Mathematical Physics* 5, 1974, p. 121–130.

Bibliographie V

[17] Henri Poincaré, Sur une forme nouvelle des équations de la Méanique, *C. R. Acad. Sci. Paris, T. CXXXII, n. 7 (1901), p. 369–371*.

[18] Tudor Ratiu, *Poincaré and variational principles*, Centenaire Henri Poincaré, IMAR, march 23, 2012 (slides of Ratiu's lecture).

[19] Jean-Marie Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1969.

[20] Wlodzimierz M. Tulczyjev, *Geometric Formulations of Physical Theories*, Monographs and Textbooks in Physical Science, Bibliopolis, Napoli, 1989.

[21] Wlodzimierz M. Tulczyjev, *The origin of variational principles*, (2004), arXiv:math-ph/0405041v1.

Bibliographie VI

[22] Alan Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry* 18 (1983), p. 523–557.

[23] Alan Weinstein, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 16 (1987), p. 101–103.

[24] Ping Xu, On Poisson groupoids, *Internat. J. Math.*, 6-1 (1995), 101–124.