

# *Lagrange et le mouvement des planètes*

Charles-Michel Marle

[cmm1934@orange.fr](mailto:cmm1934@orange.fr)

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

## Sommaire

# I. Planètes et géométrie symplectique

1. Le mot *symplectique*
2. La notion de *structure symplectique*

# II. Flot et variété des mouvements

1. Rappel
2. Flot modifié
3. Cas symplectique

# III. Mouvement des planètes

1. Approximation képlérienne
2. Éléments orbitaux
3. Au delà de l'approximation keplérienne

### IV. Variation des éléments orbitaux

1. La méthode de Lagrange
2. Les parenthèses de Lagrange
- . Les formules de variation des constantes

### V. Crochets de Poisson

1. Mémoire de Poisson de 1809
2. Parenthèses et crochets : comparaison

### VI. Problème de Kepler

1. Équations
2. Intégrales premières
3. Solutions
4. Hodographe pour  $E > 0$
5. L'énergie
6. Orbite et hodographe,  $\varepsilon = 0$
7. Orbite et hodographe,  $\varepsilon = 1/2$

## Sommaire (suite)

8. Orbite et hodographe,  $\varepsilon = 1$

9. Orbite et hodographe,  $\varepsilon = 2$

## VII. Mouvements du problème de Kepler

1. Mouvements à moment cinétique nul

2. Étude de la variété des mouvements

3. Mouvements à énergie fixée

4. Réduction

5. Étude de la variété réduite

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques

1. Cas  $e \neq 0$

2. Cas  $e = 0$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents

1. Généralités

2. Cas  $e \neq 0$

3. Cas  $e = 0$

4. Antisymplectomorphisme

## Sommaire (suite)

### X. Transformation du hamiltonien

1. Cas  $e \neq 0$

2. Cas  $e = 0$

3. Le flot transformé

### XI. Régularisation

1. Pourquoi pas toutes les géodésiques ?

2. Les mouvements à moment cinétique nul

3. Identification

4. Le résultat

### XII. Symétries

1. Les symétries du problème régularisé

2. Le vecteur excentricité

3. Vecteur excentricité et moment

### XIII. Projections stéréographique et cylindrique

Remerciements

Bibliographie

## Annexe I. Présentation moderne

## Annexe II. Résolution du problème de Kepler

1. Équations
2. Moment cinétique
3. Loi des aires
4. Hodographe
5. Équation de l'orbite
6. L'énergie
7. Troisième loi de Kepler

# I. Planètes et géométrie symplectique

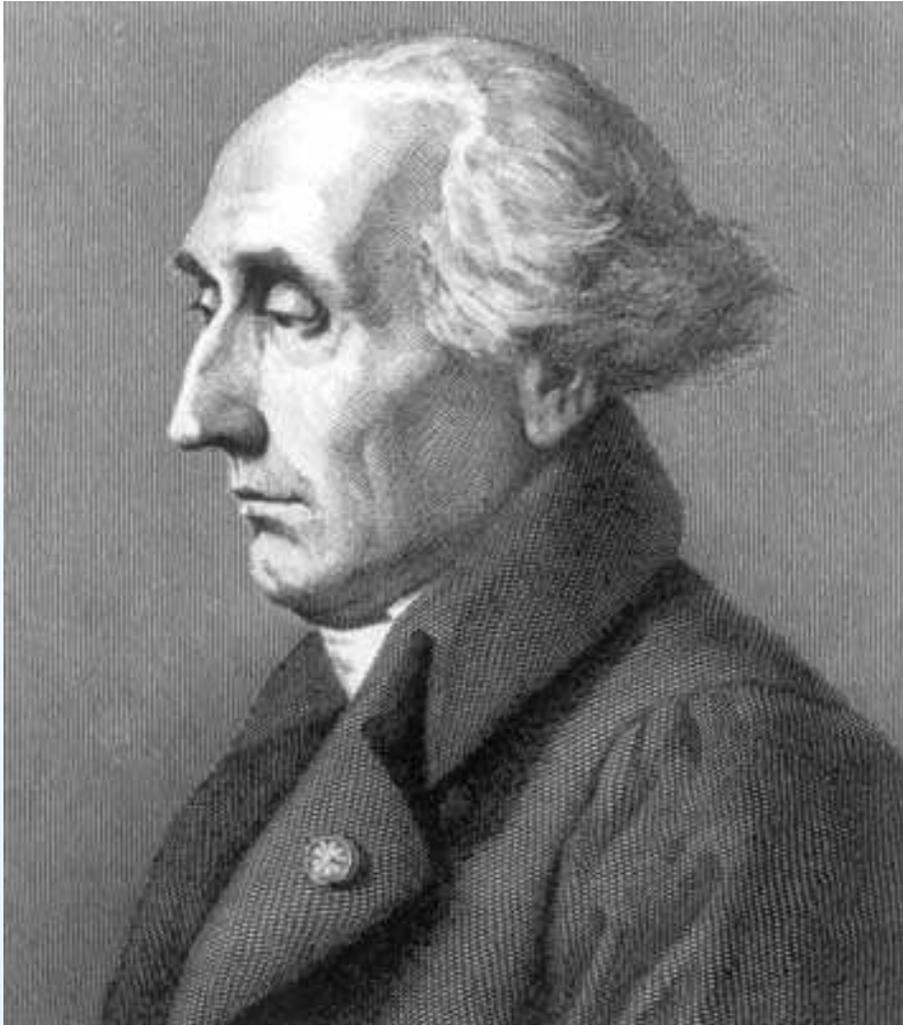


Hermann Weyl (1885–1955)

## 1. Le mot *symplectique*

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l'entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* publié en 1939 [30]. Il vient d'une racine grecque signifiant *com-plexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

# I. Planètes et géométrie symplectique



Joseph Louis Lagrange  
(1736–1813)

2. Structure symplectique  
La notion de *structure symplectique* est bien antérieure. Elle apparaît dans les travaux de Joseph Louis Lagrange (1736–1813) lors de son étude de la variation des éléments orbitaux des planètes du système solaire, puis comme une structure fondamentale existant sur l'ensemble des mouvements d'un système mécanique.

## II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel.

---

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(t, \varphi(t))$$

où  $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$ , pouvant dépendre du temps sur une variété différentiable  $M$ .

Le *flot* de cette équation différentielle est l'application, définie sur un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ , à valeurs dans  $M$ ,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que, lorsque  $t_0$  et  $x_0$  sont fixés,  $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$  soit la solution maximale de cette équation différentielle prenant la valeur  $x_0$  pour  $t = t_0$ .

## II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Donc

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0, x_0)}{\partial t} = X(t, \Phi(t, t_0, x_0)), \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

L'*espace des mouvements* de cette équation différentielle est l'ensemble  $\widehat{M}$  de ses solutions maximales  $t \mapsto \varphi(t)$ . Cet espace est le quotient de  $\mathbb{R} \times M$  par la relation d'équivalence

$(t_2, x_2)$  et  $(t_1, x_1)$  sont équivalents si  $(t_2, t_1, x_1)$  est élément de l'ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$  sur lequel le flot  $\Phi$  est défini et

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1).$$

## II. Flot et variété des mouvements. 1. Rappel (suite)

Lorsque le flot  $\Phi$  est défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ , l'espace des mouvements  $\widehat{M}$  est une variété différentiable difféomorphe à  $M$ . Mais *pas de manière canonique!* Si on choisit une valeur particulière  $t_0 \in \mathbb{R}$ , on a un difféomorphisme de  $\widehat{M}$  sur  $M$  qui fait correspondre à chaque mouvement  $\varphi \in \widehat{M}$  le point  $\varphi(t_0) \in M$ . Mais bien sûr *ce difféomorphisme dépend du choix de  $t_0$ .*

Dans le cas général, *Jean-Marie Souriau* [27] a montré que l'espace des mouvements admet une *structure de variété différentiable, qui peut ne pas être séparée*, mais dont tout élément possède un voisinage ouvert séparé difféomorphe à un ouvert de  $M$ , le difféomorphisme local étant construit comme ci-dessus.

## II Flot et variété des mouvements. 2. Flot modifié

La valeur  $\Phi(t, t_0, x_0)$  du flot au temps  $t$  dépend de  $t$  et de la *classe d'équivalence*  $a$  de  $(t_0, x_0)$ , plutôt que de  $t_0$  et  $x_0$  séparément. En effet, si  $(t_0, x_0)$  et  $(t_1, x_1)$  sont équivalents,  $x_1 = \Phi(t_1, t_0, x_0)$  et

$$\Phi(t, t_1, x_1) = \Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)) = \Phi(t, t_0, x_0).$$

On appelle *flot modifié* l'application, définie sur un ouvert de  $\mathbb{R} \times \widehat{M}$ , à valeurs dans  $M$ ,

$$(t, a) \mapsto \widehat{\Phi}(t, a) = \Phi(t, t_0, x_0),$$

avec  $a =$  classe d'équivalence de  $(t_0, x_0)$ .

Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$  fixé, l'application  $a \mapsto \widehat{\Phi}(t, a)$  est un difféomorphisme d'un ouvert de  $\widehat{M}$  (dépendant de  $t$ ) sur un ouvert de  $M$ .

## II. Flot et variété des mouvements. 3. Cas symplectique

Lorsque  $M$  est une variété symplectique et  $X$  un champ de vecteurs hamiltonien (pouvant dépendre du temps) *Jean-Marie Souriau [27, 28]* a prouvé (en donnant une forme globale au résultat local établi par *Lagrange* vers 1810) que la variété des mouvements  $\widehat{M}$  possède une structure symplectique pour laquelle les difféomorphismes locaux considérés ci-dessus,  $a \mapsto \widehat{\Phi}(t, a)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  fixé, sont des symplectomorphismes. Lorsque de plus le champ de vecteurs hamiltonien  $X$  ne dépend pas du temps, le groupe additif  $\mathbb{R}$  agit sur la variété des mouvements  $\widehat{M}$ , l'orbite d'un élément (c'est-à-dire d'une solution maximale)  $\varphi$  étant l'ensemble de toutes les solutions maximales  $\psi$  qui s'en déduisent par une translation temporelle, c'est-à-dire qui sont de la forme

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi(t + t_0), \quad \text{avec } t_0 \in \mathbb{R}.$$

### III. Mouvement des planètes. 1. Approximation képlérienne



En première (et très bonne) approximation, chaque planète du système solaire parcourt une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, suivant la *loi des aires* : l'aire balayée par le segment de droite joignant la planète au Soleil est une fonction linéaire du temps. Ce sont les deux premières lois découvertes par l'astronome et mathématicien *Johannes*

**Johannes Kepler (1571–1630)** *Kepler (1571–1630)*.

### III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux

---

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,
- un dernier pour déterminer la position de la planète sur son orbite. Par exemple, sa position à une date fixée, prise comme origine du temps.

### III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux (2)

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6. C'est la *variété des mouvements* du problème de Kepler (*J.-M. Souriau* [28]).

Autre manière de voir que cette dimension est 6 : le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Pour le moment, nous ne considérons que les mouvements elliptiques et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

### III. Mouvement des planètes. 3. Au delà de Kepler

---

Ce n'est qu'en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n'interagit gravitationnellement qu'avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

### III. Mouvement des planètes. 3. Au delà de Kepler (2)



Pour en tenir compte, les savants du XVIII-ème siècle, notamment Pierre Simon Laplace (1749–1827) et Joseph Louis Lagrange (1736–1813) ont considéré les éléments orbitaux des planètes comme lentement variables, et ont cherché à déterminer les lois qui régissent leur variation au cours du temps.

Pierre Simon Laplace (1749–1827)

## IV. Variation des élém. orbitaux. 1. Méthode de Lagrange

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \dots, r', s', u' \dots),$$

où  $r, s, u, \dots$  sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Nous noterons  $n$  leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier.

Les quantités  $r', s', u', \dots$ , sont les dérivées de  $r, s, u$ , par rapport au temps  $t$  :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad , \dots$$

## IV. Variation des élém. orbitaux. 1. Méthode de Lagrange (2)

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel  $V$ , fonction de  $r, s, u, \dots$ , mais pas de  $r', s', u', \dots$ . Dans l'exemple du mouvement d'une planète,  $V$  est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [19], s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial r'} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

et des équations analogues dans lesquelles  $r$  et  $r'$  sont remplacés par  $s$  et  $s'$ ,  $u$  et  $u'$ ,  $\dots$

La solution générale du système formé par ces  $n$  équations du second ordre dépend du temps  $t$  et de  $2n$  constantes d'intégration, que Lagrange note  $a, b, c, f, g, h, \dots$

## IV. Variation des élém. orbitaux. 1. Méthode de Lagrange (3)

Cette solution générale est de la forme

$$r = r(t, a, b, c, f, g, h, \dots), \quad s = s(t, a, b, c, f, g, h, \dots), \quad u = \dots$$

Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, les  $2n$  constantes d'intégration  $a, b, c, f, g, h, \dots$  sont les *éléments orbitaux*.

Les  $2n$  constantes d'intégration  $a, b, c, f, g, h, \dots$  forment un *système de coordonnées locales* sur la *variété des mouvements* du problème de Kepler. Les équations ci-dessus (et leurs dérivées premières par rapport à  $t$ ) sont l'expression, au moyen de ces coordonnées locales, du *flot modifié* du champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 1. Méthode de Lagrange (4)

Puis Lagrange suppose que le potentiel  $V$  ne décrit les forces qui s'exercent sur le système mécanique qu'en première approximation, et qu'il doit, dans les équations du mouvement, être remplacé par  $V - \Omega$ , où  $\Omega$  est une fonction de  $r, s, u, \dots$ , et aussi du temps  $t$ . Dans l'exemple du mouvement d'une planète,  $\Omega$  traduit les interactions gravitationnelles entre les planètes qui étaient auparavant négligées. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial r'} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

et des équations analogues dans lesquelles  $r$  et  $r'$  sont remplacés par  $s$  et  $s'$ ,  $u$  et  $u'$ ,  $\dots$

## IV. Variation des élém. orbitaux. 1. Méthode de Lagrange (5)

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\left(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \dots\right).$$

et des expressions analogues pour  $s, u, \dots$ . La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h, \dots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour  $s, u, \dots$  sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où  $\Omega$  est remplacé par 0.

Il reste à déterminer les  $2n$  fonctions du temps  $t \mapsto a(t), t \mapsto b(t), \dots$ , qui bien entendu dépendront, outre du temps  $t$ , de  $2n$  constantes arbitraires.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(a, f)$ ,  $(b, c)$ ,  $(b, f)$ ,  $\dots$ , aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Celles-ci s'expriment au moyen des constantes d'intégration  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\dots$ , et ne dépendent ni du temps  $t$ , ni des forces additionnelles agissant sur le système, représentées par  $\Omega$ .

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (2)

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [27,29], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales  $a, b, c, f, g, h, \dots$ . Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [30].

Précisons bien qu'il s'agit ici du système mécanique dont l'énergie cinétique est  $T$  et dont les forces appliquées dérivent du potentiel  $V$  : les forces additionnelles représentées par  $\Omega$  n'entrent pas dans leurs expressions.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange(3)

L'expression des parenthèses  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ , ... initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [18]) :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a} \frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b} \frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial p_u}{\partial a} + \dots$$

Nous avons posé, comme le feront Hamilton [11, 12] et Cauchy [6] environ 30 ans plus tard :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'}, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial s'}, \quad p_u = \frac{\partial T}{\partial u'}.$$

Lagrange utilisait les notations moins parlantes  $T'$ ,  $T''$  et  $T'''$  au lieu de  $p_r$ ,  $p_s$  et  $p_u$ .

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que  $r, s, u, \dots$  sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et  $r', s', u'$  leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique  $T$ , qui dépend de  $r, s, u, \dots, r', s', u', \dots$ , est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \dots, r', s', u', \dots) \mapsto (r, s, u, \dots, p_r, p_s, p_u, \dots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système. Dans le cas le plus souvent rencontré, qui était celui considéré par Lagrange, où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive, cette application est un difféomorphisme.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (6)

D'autre part, on a vu que pour chaque valeur du temps  $t$  fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par  $(a, b, c, f, g, h, \dots)$  fait correspondre les valeurs de  $(r, s, u, \dots, r', s', u', \dots)$  à l'instant  $t$ , est un difféomorphisme local de la variété des mouvements du système sur la variété de ses états cinématiques.

En composant ce difféomorphisme avec la transformation de Legendre, nous voyons que, pour chaque instant  $t$  fixé,

$$(a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto (r, s, u, \dots, p_r, p_s, p_u, \dots)$$

(où il faut comprendre que  $r, s, u, p_r, p_s, p_u$  désignent les valeurs prises par ces grandeurs à l'instant  $t$  considéré) est un difféomorphisme.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (7)

Le fait que, pour chaque valeur fixée de  $t$ , l'application

$$(a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto (r, s, u, \dots, p_r, p_s, p_u, \dots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a} \frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b} \frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial p_u}{\partial a} + \dots$$

**Remarque importante** La parenthèse de Lagrange  $(a, b)$  n'a de sens que lorsqu'on a choisi, non seulement les deux fonctions  $a$  et  $b$  sur la variété des mouvements, mais aussi toutes les autres  $c, f, g, h, \dots$ , formant un système de coordonnées locales sur cette variété. En d'autres termes,  $(a, b)$  ne dépend pas que de  $a$  et de  $b$ , mais aussi de  $c, f, g, h, \dots$ . C'est une fonction sur la variété des mouvements.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (8)



Élie Cartan (1869–1951)

En utilisant les concepts et notations du calcul différentiel extérieur (développés au XX-ème siècle par Élie Cartan), il est facile de vérifier que les parenthèses de Lagrange sont les composantes de l'image réciproque de la forme symplectique canonique du fibré cotangent à la variété configuration.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 2. Parenthèses de Lagrange (9)

$$\begin{aligned} & (a, b) da \wedge db + (a, c) da \wedge dc + \dots + (b, c) db \wedge dc + \dots \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial a} da + \frac{\partial r}{\partial b} db + \dots \right) \wedge \left( \frac{\partial p_r}{\partial a} da + \frac{\partial p_r}{\partial b} db + \dots \right) \\ &+ \left( \frac{\partial s}{\partial a} da + \frac{\partial s}{\partial b} db + \dots \right) \wedge \left( \frac{\partial p_s}{\partial a} da + \frac{\partial p_s}{\partial b} db + \dots \right) \\ &+ \dots \\ &= dr \wedge dp_r + ds \wedge dp_s + du \wedge dp_u + \dots . \end{aligned}$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

En prouvant que ses parenthèses ne dépendent pas directement du temps, Lagrange a, du même coup, prouvé que le flot du champ de vecteurs d'évolution, sur l'espace des phases, conserve la forme symplectique canonique.

## IV. Variation des élém. orbitaux. 3. Formules

Lagrange montre que les dérivées par rapport au temps  $t$ , des “constantes qu’on fait varier”  $a, b, \dots$ , vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, a_j) \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}, \quad 1 \leq i \leq 2n,$$

où j’ai noté, pour faciliter l’écriture,  $a_i, 1 \leq i \leq 2n$  au lieu de  $a, b, c, \dots$ , et où j’ai tenu compte de l’antisymétrie  $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$ .

Lagrange indique qu’en résolvant ce système linéaire, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

## IV. Variation des élém. orbitaux. 3. Formules (2)



Siméon Denis Poisson  
(1781–1840)

Lagrange explique que les  $L_{ij}$  sont des fonctions des  $a_i$  qui ne dépendent pas explicitement du temps. En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements. Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui le fera, à peine quelques mois plus tard.

## V. Crochets de Poisson. 1. Mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [26], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $\dots$ , qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment :  $[a, b]$  au lieu de  $(a, b)$ ,  $[a, c]$  au lieu de  $(a, c)$ ,  $\dots$ .

Nous conserverons la notation  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $\dots$ , pour les parenthèses de Lagrange et nous utiliserons la notation  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\dots$  pour les crochets de Poisson.

## V. Crochets de Poisson. 2. Comparaison

### Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r} \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s} \frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u} \frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial b}{\partial p_u} + \dots$$

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b} \frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a} \frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b} \frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial p_u}{\partial a} + \dots$$

C'est au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l'espace des phases au temps  $t$  sur l'espace des mouvements que s'expriment les crochets de Poisson, alors que les parenthèses de Lagrange s'expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme inverse, de l'espace des mouvements sur l'espace des phases au temps  $t$ .

## V. Crochets de Poisson. 2. Comparaison (2)

**Conclusion** Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont  $a, b, \dots$ , de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson  $\Lambda$  associé à cette forme symplectique.

Les matrices formées, d'une part, par les parenthèses de Lagrange  $(a, b), (a, c), \dots$ , d'autre part par les crochets de Poisson  $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$  des fonctions coordonnées  $a, b, c, \dots$  sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre. Ce fait a été clairement indiqué par Augustin Louis Cauchy (1789–1857) dans un mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 [6], 22 ans après la parution des mémoires de Lagrange et Poisson.

## VI. Problème de Kepler. 1. Équations

Soit  $P$  un point matériel de masse  $m$  dans l'espace physique  $\mathcal{E}$  (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel euclidien associé  $\vec{\mathcal{E}}$ ), soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif  $O$ . Posons

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La force  $\vec{f}$  qui s'exerce sur  $P$  est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

$k$  étant la constante caractérisant le champ attractif de  $O$ . Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}.$$

## VI. Problème de Kepler. 2. Intégrales premières

C'est un champ de vecteurs hamiltonien indépendant du temps sur une variété symplectique  $M$  de dimension 6 (le fibré cotangent à un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3, privé d'un point  $O$ , le centre attractif). On identifiera les fibrés tangent et cotangent grâce au produit scalaire euclidien. Le hamiltonien est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}.$$

Le groupe de symétries naturel du problème est  $SO(3)$ . Le moment correspondant est le vecteur *moment cinétique*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

(On a identifié l'algèbre de Lie de  $SO(3)$  et son dual à l'espace vectoriel euclidien  $\vec{\mathcal{E}}$ ).

## VI. Problème de Kepler. 2. Intégrales premières

Outre l'énergie  $E$  et le moment cinétique  $\vec{L}$ , le problème de Kepler admet pour intégrale première le *vecteur excentricité*

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left( \frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p},$$

découvert par *Jakob Hermann (1678–1753)*, improprement appelé *vecteur de Laplace*, ou *vecteur de Runge-Lenz*, dont l'origine est longtemps restée mystérieuse.

En utilisant ces intégrales premières, il est facile de déterminer toutes les solutions du problème.

## VI. Problème de Kepler. 3. Solutions

On montre que l'orbite du point  $P$  est contenue dans un plan passant par le centre attractif  $O$ . En choisissant un repère affine orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  tel que  $\vec{e}_z$  soit normal au plan de l'orbite et  $\vec{e}_x$  parallèle au vecteur excentricité  $\vec{\varepsilon}$  et de même sens (si  $\vec{\varepsilon}$  est nul, on choisit  $\vec{e}_x$  arbitrairement dans le plan de l'orbite), et en notant  $\theta$  l'angle polaire de  $P$  dans le plan de l'orbite  $xOy$ , on a si  $\vec{L}$  est non nul,

$$\vec{L} = L\vec{e}_z, \quad L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Constante}.$$

$$\vec{p} = \frac{m^2 k}{L} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + c\vec{e}_y, \quad \text{avec}$$

$$c = \frac{m^2 k \|\vec{\varepsilon}\|}{L} = \text{Constante}.$$

## VI. Problème de Kepler. 3. Solutions (2)

Portons, à partir du point  $O$ , un vecteur égal à  $\overrightarrow{p}$ . L'expression de  $\overrightarrow{p}$  montre que l'extrémité de ce vecteur parcourt, lorsque  $P$  parcourt son orbite, un *cercle*, ou un *arc de cercle*. C'est l'*hodographe* du mouvement (multiplié par la masse  $m$ ). Le centre  $C$  et le rayon  $R$  du cercle  $\mathcal{C}$  portant l'hodographe sont donnés par

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m^2 k \|\overrightarrow{\varepsilon}\|}{L} \overrightarrow{e}_y, \quad R = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

On trouve aussi

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{avec}$$

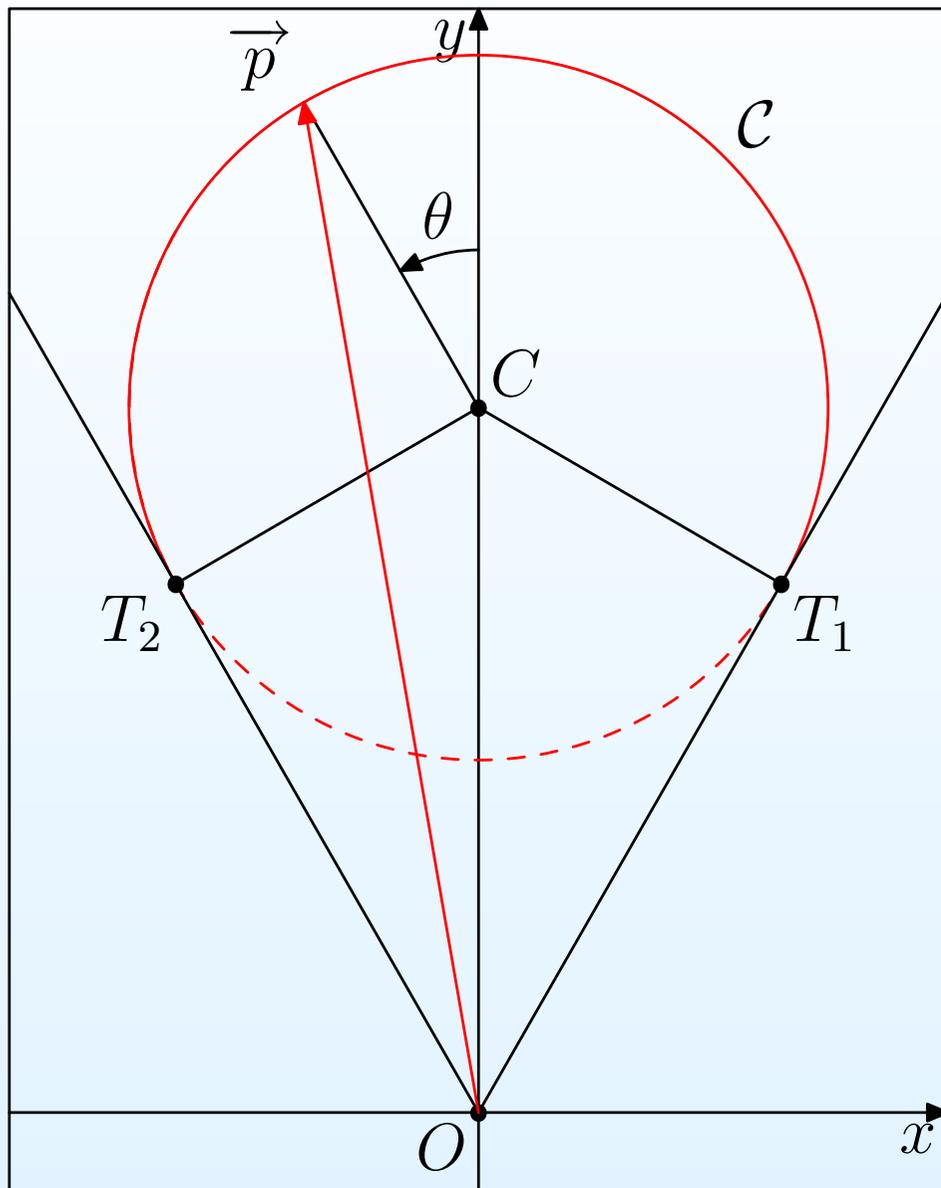
$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \|\overrightarrow{\varepsilon}\|.$$

## VI. Problème de Kepler. 3. Solutions (3)

L'expression de  $r$  n'est autre que l'équation polaire d'une conique de foyer  $O$  et d'excentricité  $\varepsilon$ .

- Si  $0 \leq \varepsilon < 1$ , l'orbite de  $P$  est une ellipse (un cercle pour  $\varepsilon = 0$ ) et l'hodographe est le cercle  $\mathcal{C}$  entier, le point  $O$  est à l'intérieur de ce cercle.
- Si  $\varepsilon = 1$ , l'orbite de  $P$  est une parabole, le cercle  $\mathcal{C}$  passe par le point  $O$ ; l'hodographe est ce cercle *moins le point*  $O$ .
- Si  $\varepsilon > 1$ , l'orbite de  $P$  est une branche d'hyperbole, le point  $O$  est à l'extérieur du cercle  $\mathcal{C}$ , l'hodographe est l'arc de ce cercle qui tourne sa concavité vers  $O$ .

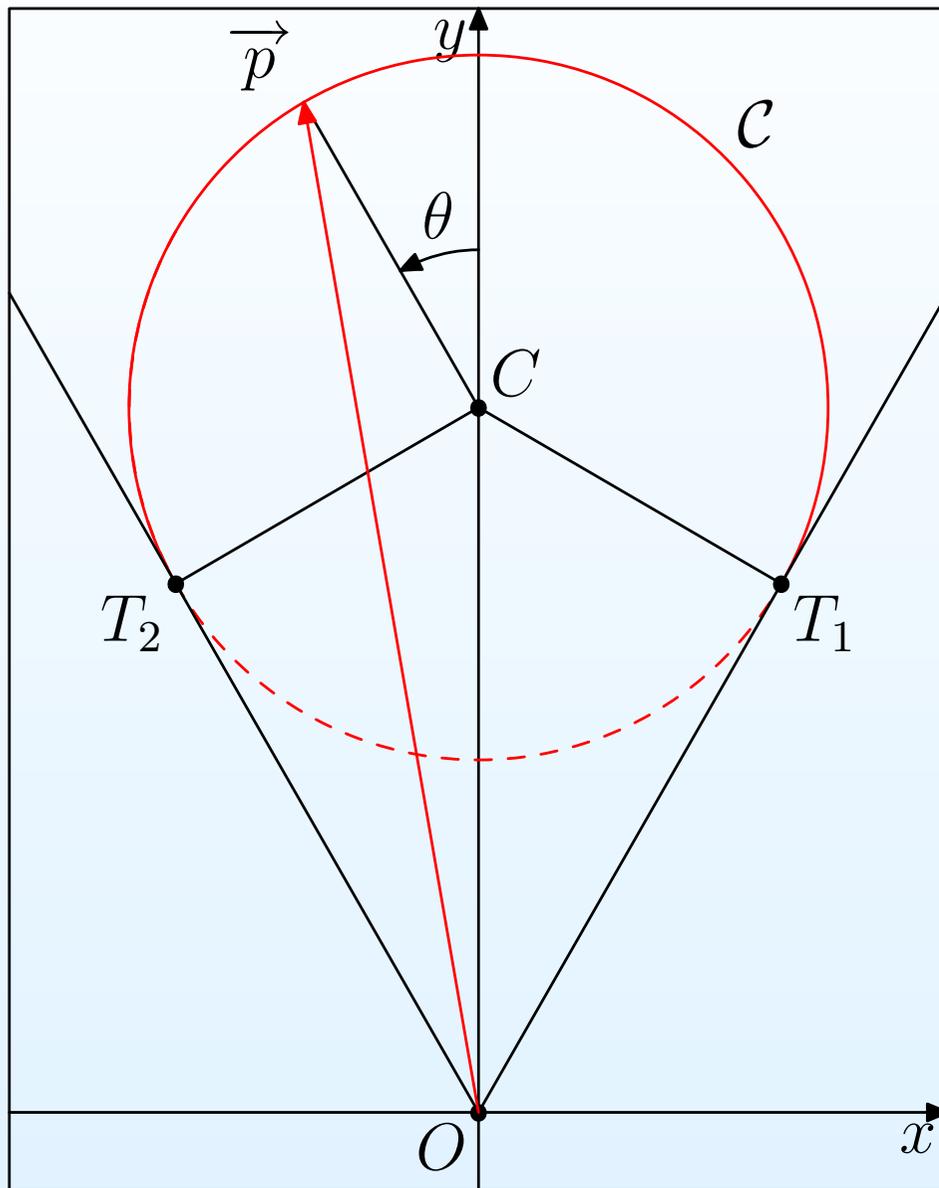
## VI. Problème de Kepler. 4. Hodographe pour $E > 0$



Soit  $\mathcal{C}$  le cercle qui porte l'hodographe, c'est-à-dire le cercle du plan  $xOy$  de centre  $C$  et de rayon  $R$ .

On voit aisément que  $\varepsilon \cos \theta$  tend vers  $-1$  lorsque l'extrémité du vecteur d'origine  $O$  égal à  $\vec{p}$  tend vers un des points de contact ( $T_1$  et  $T_2$ ) des tangentes menées du point  $O$  au cercle  $\mathcal{C}$ .

## VI. Problème de Kepler. 4. Hodographe pour $E > 0$ (2)



De même on voit que  $r$  est positif lorsque l'extrémité du vecteur d'origine  $O$  égal à  $\vec{p}$  est sur l'arc du cercle  $\mathcal{C}$ , limité par  $T_1$  et  $T_2$ , qui tourne sa concavité vers le point  $O$ . C'est cet arc de cercle qui est l'hodographe.

L'autre arc de cercle (en pointillés) est l'hodographe d'un problème de Kepler modifié, où le centre  $O$  est répulsif et où l'orbite est l'autre branche d'hyperbole.

## VI. Problème de Kepler. 5. L'énergie

Rappelons que l'hodographe du problème de Kepler est un (arc de) cercle dont le centre est à la distance  $|c|$  du point  $O$  et dont le rayon est  $R$ . L'énergie  $E$  s'exprime, en fonction de  $c$  et de  $R$ , par

$$E = \frac{1}{2m}(c^2 - R^2)$$

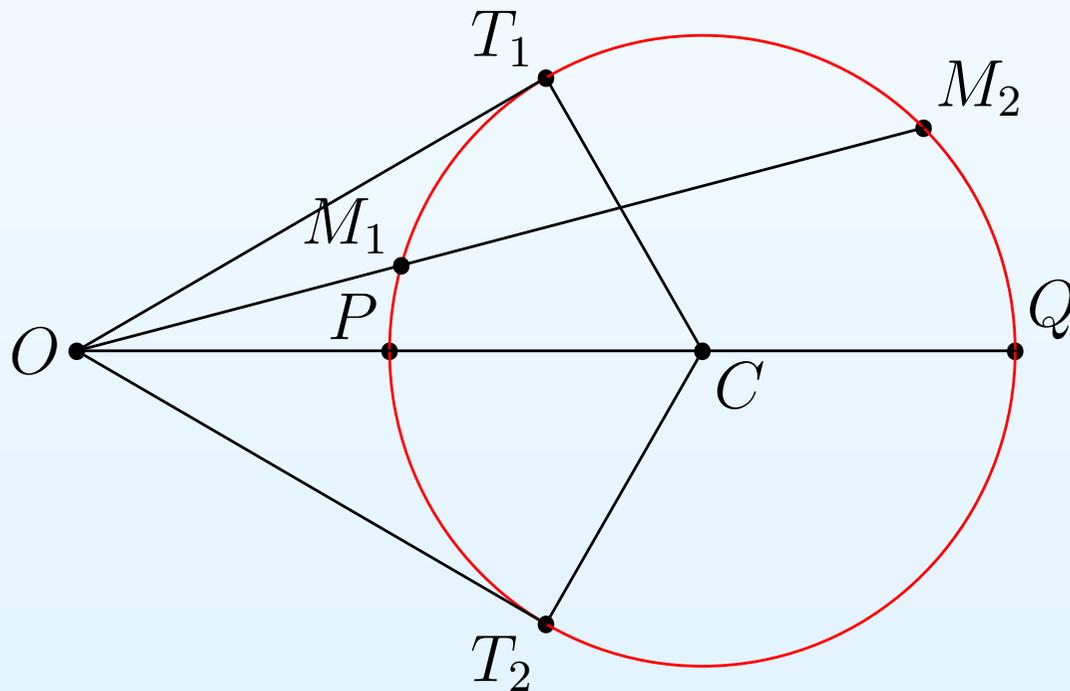
On peut donc énoncer :

**Proposition** La *puissance*  $(c^2 - R^2)$  du point  $O$  par rapport à l'hodographe, est égale à  $2mE$ , où  $E$  est l'énergie.

## Rappel : puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans un plan, on considère un cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$ , et un point  $O$  tel que  $|\overrightarrow{OC}| = d$ . Pour toute droite passant par  $O$  coupant le cercle en deux points  $M_1$  et  $M_2$ , on a

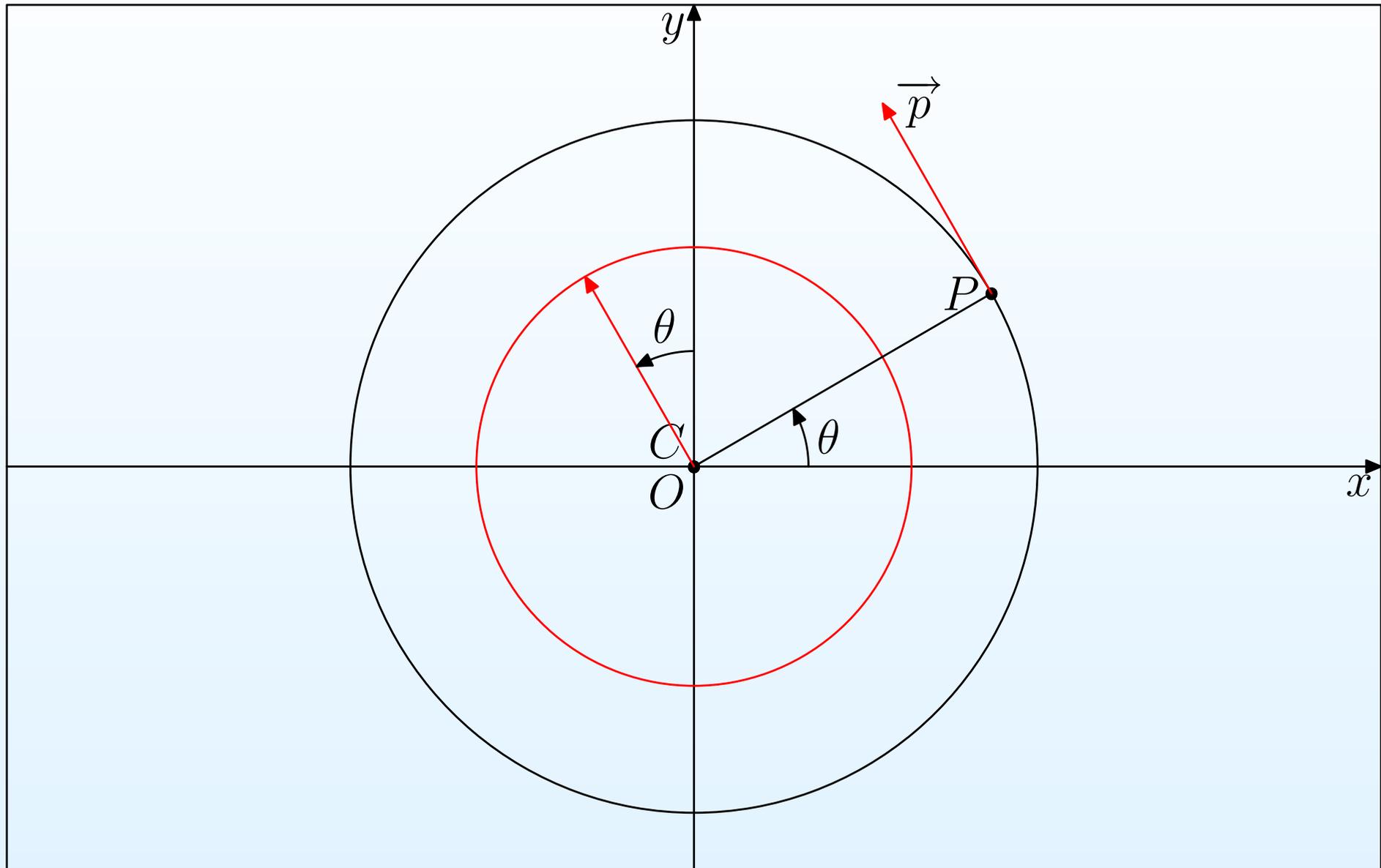
$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2 .$$



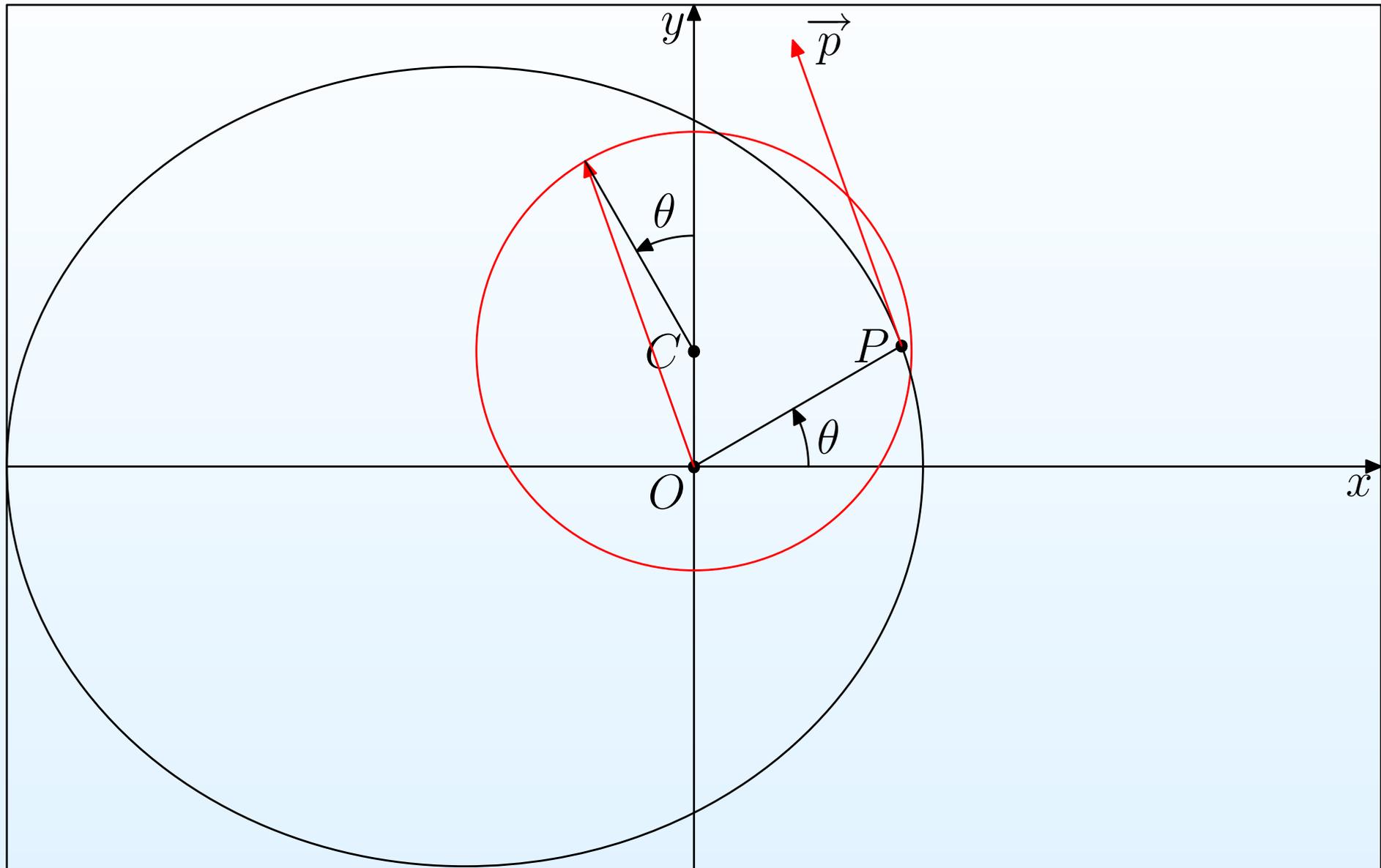
Si  $O$  est à l'extérieur du cercle,  $T_1$  et  $T_2$  les points de contact des tangentes au cercle passant par  $O$ , on a

$$|\overrightarrow{OT_1}|^2 = |\overrightarrow{OT_2}|^2 = d^2 - R^2 .$$

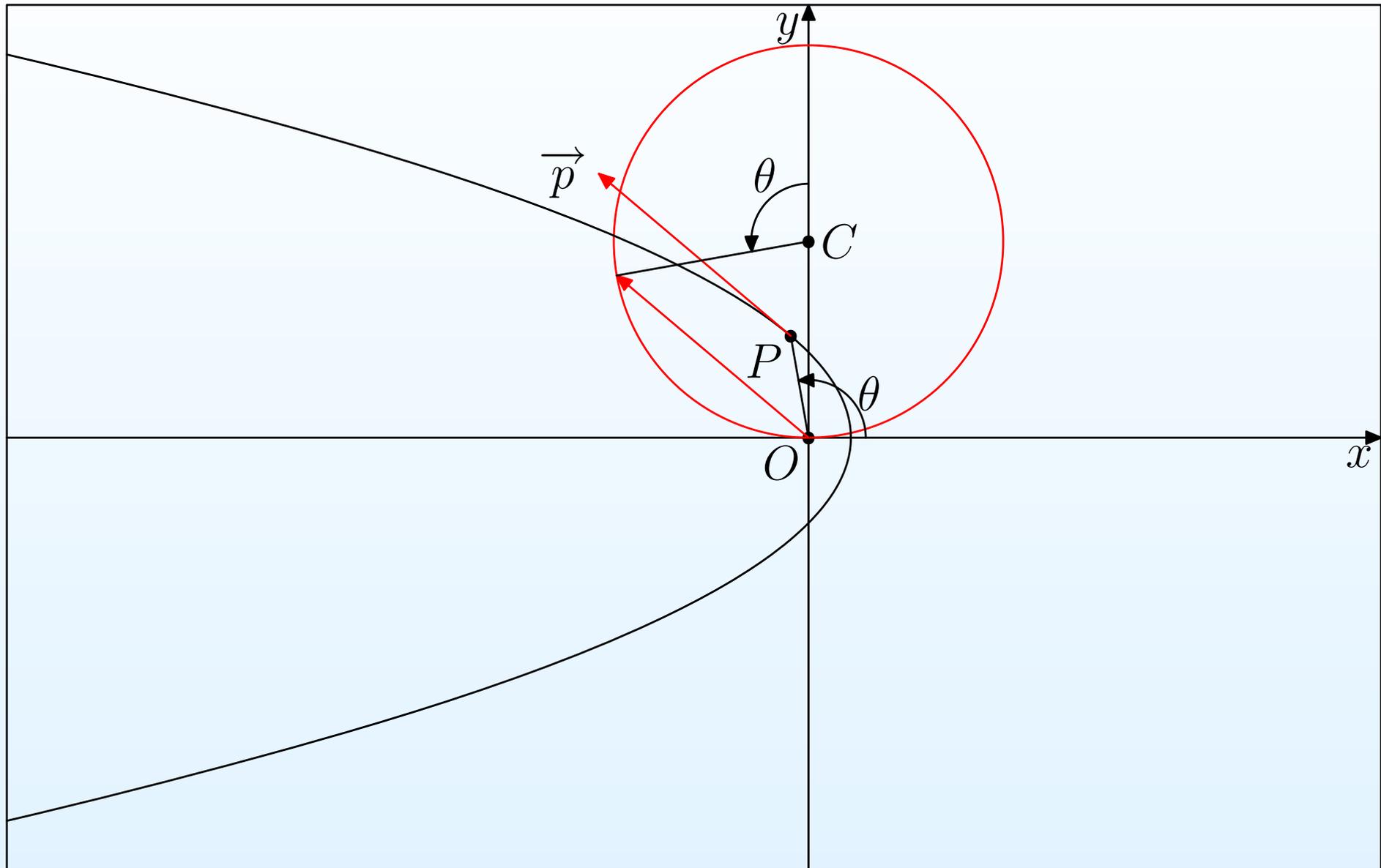
## VI. Problème de Kepler. 6. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 0$



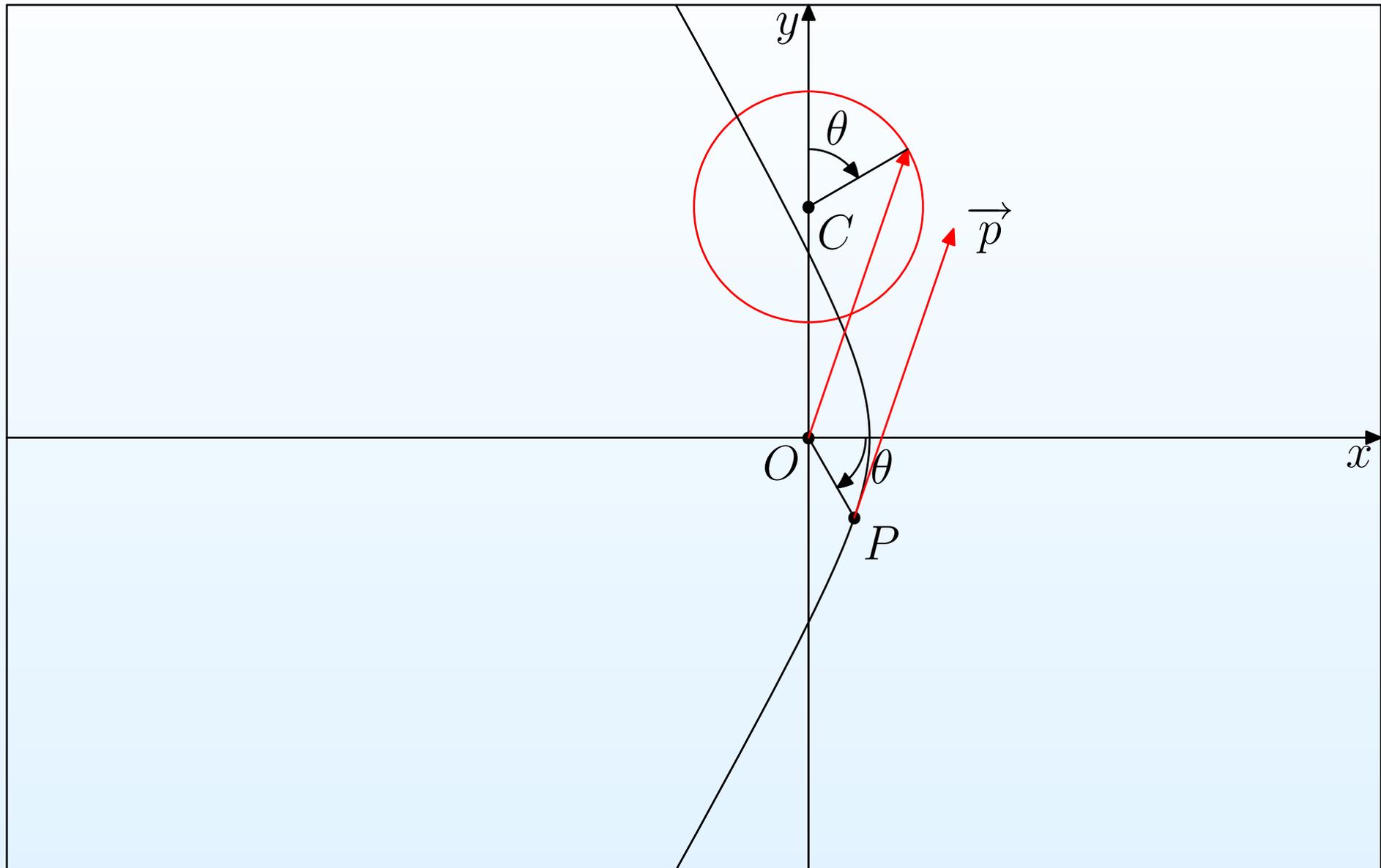
# VI. Problème de Kepler. 7. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1/2$



# VI. Problème de Kepler. 8. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1$



# VI. Problème de Kepler. 9. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 2$



## VII. Mouvements du problème de Kepler. 1. $L = 0$

Si on n'exclut pas les mouvements à moment cinétique nul, la variété  $\widehat{M}$  des mouvements du problème de Kepler *n'est pas séparée*. En effet :

Soit  $t \mapsto \varphi(t)$  un mouvement à moment cinétique nul se terminant à l'instant  $t_{coll}$  par la collision du point matériel  $P$  avec le centre attractif. Alors

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi(2t_{coll} - t)$$

est un autre mouvement, dans lequel le point matériel  $P$  est éjecté par le centre attractif à l'instant  $t_{coll}$ , avec une vitesse infinie (mais une énergie finie).

Pour la topologie de  $\widehat{M}$  (topologie quotient), les mouvements  $\varphi$  et  $\psi$  ne possèdent pas de voisinages disjoints.

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 2. Étude de $\widehat{M}$

L'étude de la variété  $\widehat{M}$  des mouvements du problème de Kepler et de ses symétries a donné lieu à de très nombreux travaux, tant des mathématiciens que des physiciens, en liaison avec l'étude de l'atome d'hydrogène. Les résultats les plus complets sont dus à *Jean-Marie Souriau* [28]. Il a montré notamment que cette variété est *régularisable*.

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 2. Étude de $\widehat{M}$

L'étude de la variété  $\widehat{M}$  des mouvements du problème de Kepler et de ses symétries a donné lieu à de très nombreux travaux, tant des mathématiciens que des physiciens, en liaison avec l'étude de l'atome d'hydrogène. Les résultats les plus complets sont dus à *Jean-Marie Souriau* [28]. Il a montré notamment que cette variété est *régularisable*.

Dans ce qui suit, je vais plus modestement étudier, non pas la variété des mouvements entière  $\widehat{M}$ , mais des variétés réduites (au sens de Marsden et Weinstein) qui s'en déduisent en fixant un niveau de l'énergie et en effectuant un quotient. Cette étude suffit pour mettre en évidence les symétries cachées qui expliquent pourquoi le vecteur excentricité est une intégrale première.

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 3. $E = e$

Pour chaque valeur  $e$  de l'énergie  $E$ , l'ensemble des mouvements d'énergie  $E = e$  est une sous-variété  $\widehat{M}_e$  de  $\widehat{M}$ , coïso trope, de dimension 5. Nous avons vu que le groupe additif  $\mathbb{R}$  agit sur  $\widehat{M}$ . Cette action laisse invariante chaque sous-variété  $\widehat{M}_e$ .

Chaque feuille (de dimension 1) du feuilletage caractéristique de  $\widehat{M}_e$  est l'orbite d'un élément de  $\widehat{M}_e$  sous l'action de  $\mathbb{R}$ . Autrement dit, c'est *l'ensemble de tous les mouvements pour lesquels le point  $P$  se déplace sur une même orbite de l'espace physique, ne différant les uns des autres que par l'instant de passage de  $P$  en un point particulier de cette orbite.*

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 4. Réduction

L'ensemble des feuilles du feuilletage en courbes de  $\widehat{M}_e$  décrit ci-dessus est la *variété symplectique réduite*, au sens de Marsden et Weinstein [20]. Elle est de dimension 4, et elle s'identifie à l'espace des orbites orientées d'énergie fixée  $E = e$  du problème de Kepler.

Ces orbites (dans l'espace physique où a lieu le mouvement du point matériel  $P$ ) sont des coniques dont un des foyers est  $O$ , plus précisément

- des ellipses si  $e < 0$ ,
- des paraboles si  $e = 0$ ,
- des branches d'hyperbole tournant leur concavité vers  $O$  si  $e > 0$ .

Cette variété réduite sera appelée *variété réduite des mouvements d'énergie fixée  $E = e$* , et notée  $\widetilde{M}_e$ .

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 5. Étude de $\widetilde{M}_e$

L'étude de la variété réduite des mouvements d'énergie fixée  $E = e$  est considérablement simplifiée par la remarque suivante.

*Il ya a une correspondance bijective entre une orbite orientée du problème de Kepler et son hodographe orienté.*

Cette remarque simplifie l'étude pour deux raisons :

- d'abord parce que les hodographes sont des cercles, ou des arcs de cercle, c'est-à-dire des courbes plus simples que les ellipses, les paraboles ou les hyperboles,
- ensuite parce que la puissance du point  $O$  par rapport à l'hodographe est égale à  $2mE$ , où  $E$  est l'énergie du mouvement considéré.

## VII. Mouvements du problème de Kepler. 5. Étude de $\widetilde{M}_e$

Nous pouvons donc énoncer :

**Proposition** La variété réduite des mouvements d'énergie  $E = e$  s'identifie

- si  $e < 0$ , à l'espace des cercles orientés, tracés dans un plan de l'espace  $\mathcal{E}$  passant par le point  $O$ , par rapport auxquels la puissance de  $O$  est égale à  $2me$  ;
- si  $e = 0$ , à l'espace des cercles orientés passant par  $O$ , moins le point  $O$  ;
- si  $e > 0$ , à l'espace des arcs de cercle orientés, tracés dans des plans passant par  $O$  et tournant leur concavité vers  $O$ , par rapport auxquels la puissance de  $O$  est égale à  $e$ , limités par les points de contact des tangentes menées du point  $O$ .

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Utilisant une idée de Fock [8] datant de 1935, Moser [22] a montré comment, par *projection stéréographique inverse*, on peut mettre en correspondance injective les mouvements réduits d'énergie fixée  $e < 0$  avec des *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3. Ces grands cercles orientés sont des *géodésiques orientées* de cette sphère, munie de sa métrique riemannienne usuelle.

De même, grâce à une *projection stéréographique généralisée*, les mouvements réduits d'énergie fixée  $e > 0$  peuvent être mis en correspondance injective avec les *grandes hyperboles orientées* d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3. Ces grandes hyperboles orientées sont des *géodésiques orientées* de cet hyperboloïde, muni de la métrique riemannienne induite par son plongement dans un *espace de Lorentz* de dimension 4.

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On va traiter ensemble les cas d'énergie positive et négative en introduisant la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } e < 0, \\ -1 & \text{si } e > 0. \end{cases}$$

Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$  d'origine  $O$ . On construit un *espace augmenté*  $\mathcal{F}$  en ajoutant à ce repère un vecteur unitaire  $\vec{e}_h$ , la coordonnée correspondante étant notée  $h$ . L'espace  $\mathcal{E}$  est identifié à l'hyperplan de  $\mathcal{F}$  d'équation  $h = 0$ .

On considère la quadrique  $Q$  d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \rho^2, \quad \text{avec } \rho = \sqrt{2m|e|}.$$

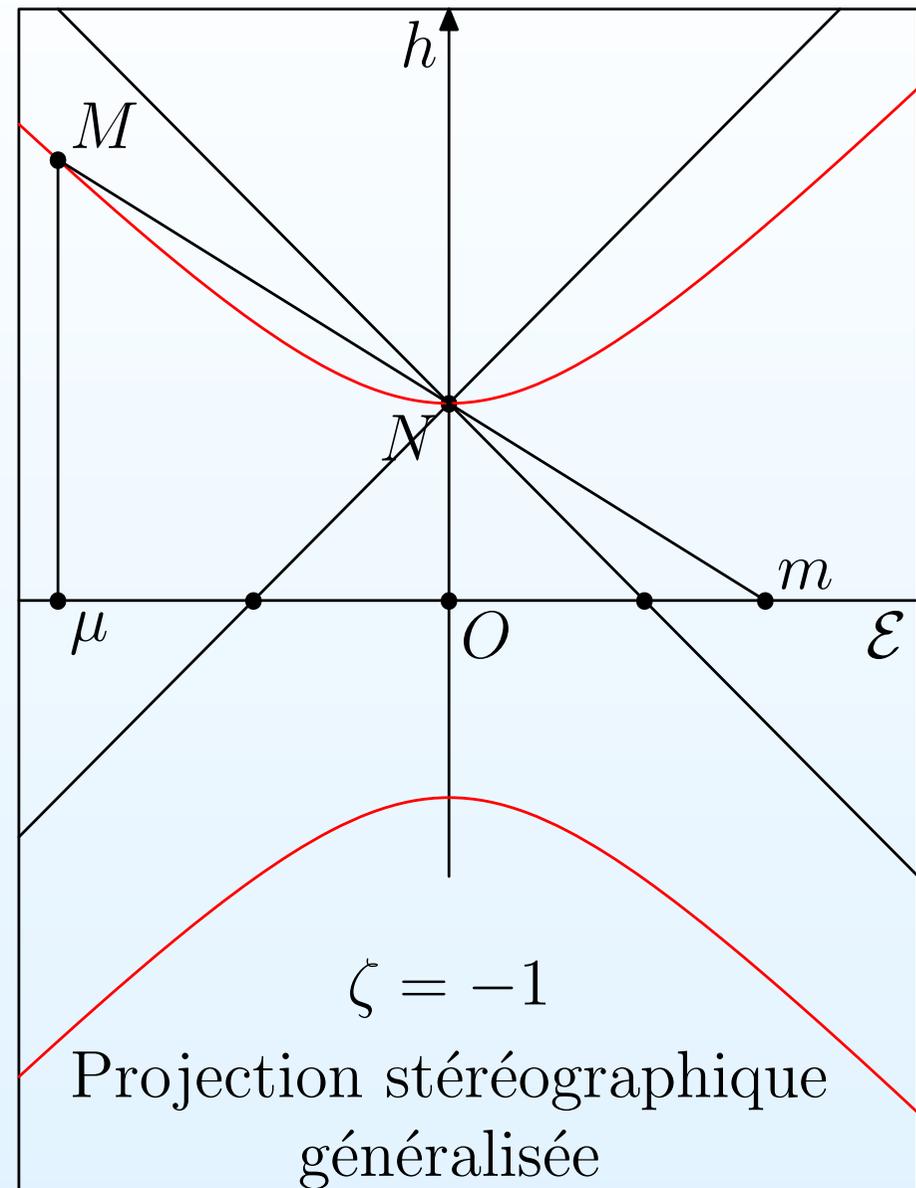
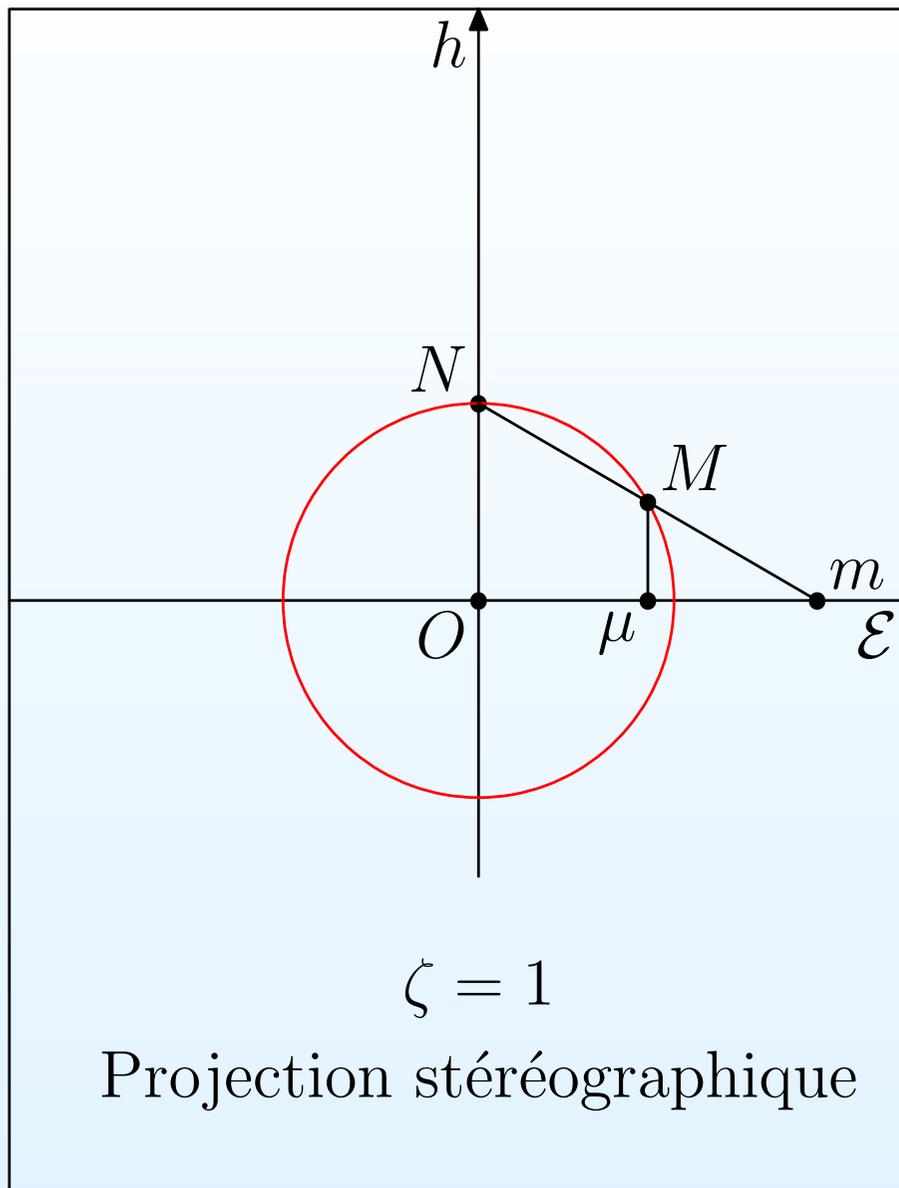
C'est une sphère si  $\zeta = 1$ , un hyperboloïde à deux nappes si  $\zeta = -1$ .

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Soit  $N$  le point de coordonnées  $(x = y = z = 0, h = \rho)$ . La *projection stéréographique* (usuelle si  $\zeta = 1$ , généralisée si  $\zeta = -1$ ) de la quadrique  $Q$  privée du point  $N$  sur l'espace  $\mathcal{E}$  est l'application qui, à chaque point  $m$  de  $Q \setminus \{N\}$ , fait correspondre le point  $M$  de  $\mathcal{E}$  (identifié à l'hyperplan d'équation  $h = 0$ ) où la droite qui joint  $N$  et  $m$  rencontre  $\mathcal{E}$ .

- Si  $\zeta = 1$  c'est un difféomorphisme de la 3-sphère  $Q$  privée du point  $N$  sur l'espace  $\mathcal{E}$ .
- Si  $\zeta = -1$  c'est un difféomorphisme de l'hyperboloïde  $Q$  privé du point  $N$  sur le complémentaire, dans  $\mathcal{E}$ , de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $\rho$ . La nappe supérieure ( $h > 0$ ) de l'hyperboloïde, privée du point  $N$ , a pour image la partie de  $\mathcal{E}$  extérieure et la nappe inférieure ( $h < 0$ ) la partie de  $\mathcal{E}$  intérieure à cette sphère.

# VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$



## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

On note  $(x, y, z, h)$  les coordonnées de  $m$ ,  $(u, v, w, 0)$  celles de  $M$ ,  $\mu$  le point de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x, y, z, 0)$  et  $\vec{e}_h$  le vecteur unitaire (à quatre dimensions) de base de la dimension supplémentaire ajoutée à  $\mathcal{E}$ . On peut donc écrire

$$\vec{Om} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h.$$

Moyennant quelques calculs on obtient les formules donnant les coordonnées de  $M$  en fonction de celles de  $m$  :

$$\vec{OM} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}.$$

On a aussi

$$h^2 = \rho^2 - \zeta \|\vec{O\mu}\|^2, \quad \text{avec} \quad \|\vec{O\mu}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

La transformation inverse (coordonnées de  $m$  en fonction de celles de  $M$ ) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}, \\ h = \rho \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2 - \zeta\rho^2}{\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \zeta\rho^2}, \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

En utilisant ces formules on voit que si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux points de  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 2me = -\zeta\rho^2$ , leurs images, par l'inverse de la projection stéréographique, sont deux points  $m_1$  et  $m_2$  symétriques par rapport à  $O$ . On peut d'ailleurs trouver cette propriété sans aucun calcul, en utilisant les propriétés de l'inversion.

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 1. Cas $e \neq 0$

Par suite, la projection stéréographique inverse transforme l'hodographe de chaque mouvement képlérien d'énergie  $e$  en l'intersection de la quadrique  $Q$  (de dimension 3) avec un plan (de dimension 2) passant par son centre  $O$ . C'est

- un grand cercle de la sphère  $Q$  si  $e < 0$ ,  $\zeta = 1$ ,
- une branche de “grande hyperbole” de l'hyperboloïde de révolution  $Q$  si  $e > 0$ ,  $\zeta = -1$ .

L'expression “grande hyperbole” de l'hyperboloïde de révolution  $Q$  est employée par analogie avec l'expression “grand cercle” d'une sphère : intersection de  $Q$  avec un 2-plan passant par son centre de symétrie  $O$ .

Dans les deux cas, il s'agit d'une *géodésique* de la quadrique  $Q$  munie de la métrique induite par celle de l'espace augmenté  $\mathcal{F}$  (*euclidienne* si  $\zeta = 1$ , *lorentzienne* si  $\zeta = -1$ ). Ce résultat est dû à *Osipov* et *Belbruno*.

## VIII. Mouvements réduits et géodésiques. 2. Cas $e = 0$

Les mouvements réduits d'énergie  $e = 0$  sont les cercles de l'espace  $\mathcal{E}$  passant par le point  $O$  et privés de ce point. Une inversion de pôle  $O$  et de rapport  $\lambda$  transforme ces cercles en droites, c'est-à-dire en *géodésiques* de l'espace euclidien, et on obtient ainsi toutes les droites qui ne passent pas par le point  $O$ . Par suite :

Les mouvements réduits d'énergie nulle sont des géodésiques (orientées) de l'espace euclidien de dimension 3. Ce résultat a été également obtenu par *Osipov* et *Belbruno*.

Le  $ds^2$  de la métrique (euclidienne) dont les hodographes sont les géodésiques a pour expression, au moyen des coordonnées  $u, v, w$ ,

$$ds^2 = \frac{\lambda^2 (du^2 + dv^2 + dw^2)}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} .$$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 1. Généralités

La projection stéréographique (usuelle si  $e < 0$ , généralisée si  $e > 0$ ) et l'inversion dans  $\mathcal{E}$  (si  $e = 0$ ) ont été utilisées pour transformer les *hodographes* de mouvements képlériens en *géodésiques* d'espaces à courbure constante. Moser [22] a montré qu'en prolongeant ces transformations aux fibrés cotangents, on obtient un *anti-symplectomorphisme* qui transforme

- les *hodographes* des orbites képlériennes en les *géodésiques* d'un espace à courbure constante,
- les *orbites* képlériennes en les *hodographes* des géodésiques de cet espace à courbure constante, paramétrées par la longueur d'arc.

À la *longueur d'arc* sur les géodésiques de l'espace à courbure constante correspond le *paramètre de Levi-Civita* (et non le *temps*) sur les orbites du problème de Kepler.

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Pour  $e \neq 0$ , la projection stéréographique inverse (éventuellement généralisée) associe, à chaque point  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$ , de dimension 3, un point  $m$  de la quadrique  $Q$ , de dimension 3, plongée dans l'espace étendu  $\mathcal{F}$  de dimension 4. Puisque cette application est un difféomorphisme d'un ouvert de  $\mathcal{E}$  sur  $Q \setminus \{N\}$ , elle se prolonge, de manière unique, aux fibrés cotangents, de manière telle que l'image réciproque de la forme de Liouville de  $T^*(Q \setminus \{N\})$  soit égale à la forme de Liouville de  $T^*E$  (ou plus précisément, lorsque  $e > 0$  du fibré cotangent à un ouvert de  $\mathcal{E}$ ).

Appliquons cette construction au cas où  $\overrightarrow{OM} = \vec{p}$ , vecteur impulsion d'un mouvement képlérien d'énergie  $e \neq 0$ .

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Une 1-forme sur  $\mathcal{E}$  peut s'écrire  $\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{OM}$ , où  $\overrightarrow{r}$  est un champ de vecteurs sur  $\mathcal{E}$ , ou puisque  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{p}$ ,

$$\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{p} = r_x dp_x + r_y dp_y + r_z dp_z .$$

Rappelons que  $\zeta = 1$  si  $e < 0$  et  $\zeta = -1$  si  $e > 0$ . L'équation de  $Q$  est

$$\overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{Om} = x^2 + y^2 + z^2 + \zeta h^2 = \zeta \rho^2 .$$

Une 1-forme sur  $Q$  peut s'écrire

$$\overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{Om} = w_x dx + w_y dy + w_z dz + \zeta w_h dh ,$$

où  $\overrightarrow{w}$  est un champ de vecteurs sur  $Q$ . Il doit donc vérifier

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{Om} = w_x x + w_y y + w_z z + \zeta w_h h = 0 .$$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Le prolongement aux fibrés cotangent de la projection stéréographique, noté  $\widehat{S}$ , doit donc associer au couple  $(m, \overrightarrow{w})$  formé d'un point  $m$  de  $Q$  et d'un vecteur  $\overrightarrow{w}$  tangent à  $Q$  en ce point, un couple  $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p})$  de deux vecteurs de  $\mathcal{E}$ , de manière telle que

$$\overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{p} .$$

On a déjà déterminé les équations exprimant la projection stéréographique  $S$ , donnant  $\overrightarrow{p}$  en fonction de  $m$ , ainsi que celles exprimant la transformation inverse  $S^{-1}$ . Les équations exprimant le prolongement aux fibrés cotangents  $\widehat{S}$  et son inverse  $\widehat{S}^{-1}$  s'obtiennent aisément moyennant quelques calculs.

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Prolongement aux fibrés cotangents de la projection stéréographique :

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O\mu}\|^2 = \rho^2, \\ \vec{r} = \frac{\rho - h}{\rho} \vec{w_3} + \frac{w_h}{\rho} \vec{O\mu}, \end{cases}$$

où on a posé

$$\vec{Om} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{w} = \vec{w_3} + w_h\vec{e}_h,$$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 2. Cas $e \neq 0$

Les formules exprimant le prolongement aux fibrés cotangents de la projection stéréographique inverse sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{p}\|^2} \overrightarrow{p}, \\ h = \rho \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2 - \zeta\rho^2}{\|\overrightarrow{p}\|^2 + \zeta\rho^2}, \quad \text{avec} \quad \|\overrightarrow{p}\|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \\ \overrightarrow{w_3} = \frac{\rho^2 + \zeta \|\overrightarrow{p}\|^2}{2\rho^2} \overrightarrow{r} - \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho^2} \overrightarrow{p}, \\ w_h = \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho}. \end{array} \right.$$

Comme ci-dessus on a posé

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{O\mu} + h\overrightarrow{e}_h, \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_3} + w_h\overrightarrow{e}_h,$$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 3. Cas $e = 0$

Pour les mouvements d'énergie nulle il faut remplacer la projection stéréographique par une inversion de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$ . Les formules exprimant son prolongement aux fibrés cotangents sont

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \vec{p} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{Om}\|^2} \overrightarrow{Om}, \\ \vec{r} = \frac{\|\overrightarrow{Om}\|^2}{\lambda} \vec{w} - \frac{2\vec{w} \cdot \overrightarrow{Om}}{\lambda} \overrightarrow{Om}. \end{cases}$$

Inversement  $((\vec{p}, \vec{r}) \mapsto (\overrightarrow{Om}, \vec{w}))$  est involutive)

$$\begin{cases} \overrightarrow{Om} = \frac{\lambda}{\|\vec{p}\|^2} \vec{p}, \\ \vec{w} = \frac{\|\vec{p}\|^2}{\lambda} \vec{r} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{p}}{\lambda} \vec{p}, \end{cases}$$

## IX. Prolongement aux fibrés cotangents. 4. Anti-syml.

Puisque  $\vec{w} \cdot d\vec{Om} = \vec{r} \cdot d\vec{p}$ ,

$$d\vec{w} \wedge d\vec{Om} = d\vec{r} \wedge d\vec{p} = -d\vec{p} \wedge d\vec{r}.$$

On a noté

$$d\vec{p} \wedge d\vec{r} = dp_x \wedge dr_x + dp_y \wedge dr_y + dp_z \wedge dr_z$$

et une convention analogue (avec 4 composantes) pour  $d\vec{w} \wedge d\vec{Om}$ .

Or la forme symplectique canonique de l'espace des phases du problème de Kepler est  $\omega_{T^*E} = d\vec{p} \wedge d\vec{r}$ , tandis que celle de  $T^*Q$  est  $\omega_{T^*Q} = d\vec{w} \wedge d\vec{Om}$ . L'application construite est donc un ***anti-symplectomorphisme***, non un symplectomorphisme.

## X. Transformation du hamiltonien. 1. Cas $e \neq 0$

L'image directe par  $\widehat{S}$  du champ de vecteurs de hamiltonien  $E$  sur l'espace des phases du problème de Kepler, est donc le champ de vecteurs de hamiltonien  $-E \circ \widehat{S}$  sur  $T^*Q$ . On a

$$E = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{mk}{\|\vec{r}\|}$$

Après un petit calcul on trouve, dans le cas où  $e \neq 0$ ,

$$E \circ \widehat{S} = e + \frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h)\|\vec{w}\|} \left( \|\vec{w}\| - \frac{km^2}{\rho^2} \right), \quad \text{avec} \quad e = \frac{-\zeta \rho^2}{2m}.$$

Le vecteur  $\vec{w}$  étant de genre espace, on a posé

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + \zeta w_h^2}.$$

## X. Transformation du hamiltonien. 2. Cas $e = 0$

Dans le cas où  $e = 0$ , en utilisant, au lieu de  $\widehat{S}$ , le prolongement aux fibrés cotangents de l'inversion, noté  $\widehat{S}'$ , on a une formule analogue

$$E \circ \widehat{S}' = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{w}\| \|\vec{Om}\|^2} \left( \|\vec{w}\| - \frac{2m^2 k}{\lambda} \right).$$

Le vecteur  $\vec{w}$  étant cette fois un vecteur de  $\mathcal{E}$ , on a posé

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

## X. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Ces résultats montrent que le niveau d'énergie  $E = e$  de l'espace des phases du problème de Kepler est transformé, par  $\widehat{S}^{-1}$  si  $e \neq 0$  ou par  $\widehat{S}'^{-1}$  si  $e = 0$ , en l'ensemble de couples  $(m, \vec{w})$  où la norme du vecteur  $\vec{w}$  a une valeur constante, dépendant de  $e$  :

$$\|\vec{w}\| = \begin{cases} \frac{m^2 k}{\rho^2} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{2m^2 k}{\lambda} & \text{si } e = 0. \end{cases} \quad m \in \begin{cases} Q \setminus \{N\} & \text{si } e \neq 0, \\ \mathcal{E} & \text{si } e = 0, \end{cases}$$

*Sur ce niveau d'énergie*,  $d(E \circ \widehat{S})$  si  $e \neq 0$ , ou  $d(E \circ \widehat{S}')$  si  $e = 0$ , est proportionnel à  $d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right)$ , la valeur du coefficient de proportionnalité dépendant du point  $m$  considéré.

## X. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Si  $e \neq 0$ , *sur le niveau d'énergie*  $(E \circ \hat{S})^{-1}(e)$ , on a

$$d(E \circ \hat{S}) = \frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h) \|\vec{w}\|} d\|\vec{w}\| = \frac{\zeta \rho^7}{m^5 k^2 (\rho - h)} d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right).$$

De même, si  $e = 0$ , *sur le niveau d'énergie*  $(E \circ \hat{S}')^{-1}(0)$ , on a

$$d(E \circ \hat{S}') = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{Om}\|^2 \|\vec{w}\|} d(\|\vec{w}\|^2) = \frac{\lambda^4}{8m^5 k^2 \|\vec{Om}\|^2} d\left(\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\right).$$

Par suite, *sur ce niveau d'énergie*, le champ de vecteurs de hamiltonien  $E \circ \hat{S}$  si  $e \neq 0$ , ou  $E \circ \hat{S}'$  si  $e = 0$ , est égal au produit, par une fonction, du champ de vecteurs de hamiltonien  $\frac{\|\vec{w}\|^2}{2}$ .

## X. Transformation du hamiltonien. 3. Le flot transformé.

Cette fonction a pour expression

$$\begin{cases} \frac{\zeta \rho^7}{m^5 k^2 (\rho - h)} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\lambda^4}{8m^5 k^2 \|\vec{Om}\|^2} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

On retrouve ainsi le *paramètre de Levi-Civita* car cette fonction est égale à

$$\begin{cases} \frac{\rho^4}{m^3 k \|\vec{r}\|} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\lambda^2}{4m^3 k \|\vec{r}\|} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

Rappelons que le paramètre de Levi-Civita est l'intégrale, le long d'une trajectoire, de  $dt / \|\vec{r}\|$ .

## XI. Régularisation. 1. Pourquoi pas toutes les géodésiques ?

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les mouvements avec moment cinétique non nul. Nous avons fait correspondre aux mouvements réduits correspondants des géodésiques orientées

- d'une sphère de dimension 3 lorsque  $e < 0$ ,
- d'un espace hyperbolique de dimension 3 lorsque  $e > 0$ ,
- d'un espace euclidien de dimension 3 lorsque  $e = 0$ .

La correspondance ainsi construite est injective, mais pas surjective : les géodésiques passant par un point particulier (pôle de la projection stéréographique, ou stéréographique généralisée, lorsque  $e < 0$  ou  $e > 0$ , les droites passant par  $O$  lorsque  $e = 0$ ) ne correspondent à aucun mouvement réduit de moment cinétique non nul.

## XI. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Lors d'un mouvement à moment cinétique nul, le point matériel  $P$  se déplace sur une droite passant par le point  $O$ .

Si  $e < 0$ , le mouvement commence, pour une valeur finie du temps, l'instant où le point matériel  $P$  est éjecté par le centre attractif  $O$ , à une vitesse infinie. Immédiatement après l'éjection la vitesse devient finie, et décroît tant que la distance  $OP$  croît. Lorsque cette distance atteint son maximum, la vitesse s'annule puis change de sens. Le point matériel  $P$  se rapproche, de plus en plus vite, du centre attractif  $O$ . Le mouvement s'achève au bout d'un temps fini, lorsque  $P$  entre en collision, à une vitesse infinie, avec  $O$ .

## XI. Régularisation. 2. Les mouvements à moment cinétique nul

Si  $e \geq 0$  il existe deux sortes de mouvements à moment cinétique nul :

- ceux qui commencent pour une valeur finie du temps, l'instant où le centre attractif  $O$  éjecte le point matériel  $P$ , à une vitesse infinie. Le point matériel  $P$  s'éloigne de  $O$  de manière monotone, de moins en moins vite et son mouvement se poursuit jusqu'à ce que le temps et la distance  $OP$  tendent, tous deux, vers l'infini. La vitesse de  $P$  tend vers 0 si  $e = 0$  et vers une valeur finie si  $e > 0$ .
- ceux, déduits des précédents par changement de  $t$  en  $-t$ , définis sur un intervalle de temps non borné à gauche et qui s'achèvent, pour une valeur finie de  $t$ , par la collision de  $P$  avec le centre attractif.

## XI. Régularisation. 3. Identification.

Les mouvements à moment cinétique nul doivent être considérés comme des limites de suites de mouvements de même énergie, de moment cinétique de plus en plus petit et tendant vers 0. Deux mouvements à moment cinétique nul, de même énergie, dans lesquels le point matériel  $P$  se déplace sur la même demi-droite passant par  $O$ , l'instant où l'un se termine par la collision de  $P$  avec  $O$  étant le même que l'instant où l'autre commence par l'éjection de  $P$  par  $O$ , apparaissent alors comme deux parties d'un même mouvement.

Avec cette convention, les mouvements à moment cinétique nul deviennent définis pour toute valeur du temps. Si  $e < 0$  ils sont périodiques, le point matériel  $P$  rebondissant une infinité de fois sur le centre attractif. Si  $e \geq 0$  ils sont non périodiques, le point matériel  $P$  venant de l'infini, rebondissant une seule fois sur le centre attractif, et s'éloignant ensuite jusqu'à l'infini.

## XI. Régularisation. 4. Le résultat

Avec cette convention, la correspondance entre mouvements réduits d'énergie  $e$  fixée et géodésiques orientées d'un espace à courbure constante de dimension 3 (une sphère si  $e < 0$ , un espace euclidien si  $e = 0$  et un espace hyperbolique si  $e > 0$ ) devient *bijective*. Mais la description d'un mouvement comportant une collision avec le centre attractif, en fonction du temps, n'est plus différentiable.

On peut récupérer la différentiabilité en utilisant pour la description d'un mouvement non plus le temps, mais le *paramètre de Levi-Civita*. Si on utilise la correspondance entre mouvements réduits d'énergie fixée du problème de Kepler et géodésiques d'un espace à courbure constante, cela revient à paramétrer celles-ci par la longueur d'arc.

## XII. Symétries. 1. Les symétries du problème régularisé

Le groupe de symétries naturel du problème de Kepler est le groupe  $SO(3)$  des rotations de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$ , de dimension 3, autour du centre attractif  $O$ .

En permettant d'identifier les mouvements réduits aux géodésiques d'un espace à courbure constante, *la régularisation met en évidence des symétries supplémentaires.*

Le groupe des symétries de l'espace des mouvements réduit d'énergie  $e$ , de dimension 6, est :

- pour  $e < 0$ , le groupe  $SO(4)$  des rotations de l'espace euclidien de dimension 4,
- pour  $e = 0$ , le groupe des déplacements de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3,
- pour  $e > 0$ , le groupe de Lorentz  $SO(3, 1)$  des isométries conservant l'origine et les orientations de l'espace de Minkowski de dimension 4.

## XII. Symétries. 2. Le vecteur excentricité

Ces symétries additionnelles expliquent la constance, au cours du mouvement, du *vecteur excentricité*, improprement appelé *vecteur de Laplace* ou *vecteur de Runge-Lenz* car il a été découvert (bien avant l'invention du calcul vectoriel) par *Jakob Hermann* (1678–1753). Ce vecteur sans dimension, de module égal à l'excentricité  $\varepsilon$  de l'orbite, parallèle à son grand axe et dirigé de  $O$  vers le périhélie, a pour expression

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left( \frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p}.$$

En utilisant les équations du mouvement, on vérifie aisément que  $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = 0$ , donc que  $\vec{\varepsilon}$  est une intégrale première (vectorielle).

## XII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

**Rappel** Soit  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  une action à gauche d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété différentiable  $M$ . Son *prolongement au fibré cotangent* est une action hamiltonienne  $\widehat{\Phi} : G \times T^*M \rightarrow T^*M$  dont le moment  $J : T^*M \rightarrow \mathcal{G}^*$  a pour expression

$$\langle J(\xi), X \rangle = \langle \xi, X_M(\pi_M(\xi)) \rangle,$$

où  $X \in \mathcal{G}$ ,  $X_M$  étant le champ de vecteurs fondamental sur  $M$  associé à  $X$ ,  $\xi \in T^*M$ , et  $\pi_M : T^*M \rightarrow M$  étant la projection canonique.

## XII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

$J$  est intégrale première de tout champ de vecteurs hamiltonien sur  $T^*M$  dont le hamiltonien  $H$  est invariant par l'action  $\widehat{\Phi}$ .

Appliquons ce résultat lorsque l'action  $\Phi$  est

- l'action de  $SO(4)$  sur la sphère  $Q$ , de dimension 3, si  $e < 0$ ,
- l'action de  $SO(3, 1)$  sur l'hyperboloïde  $Q$ , de dimension 3, si  $e > 0$ ,
- l'action du groupe des déplacements euclidiens sur l'espace  $\mathcal{E}$ , de dimension 3, si  $e = 0$ .

Dans les trois cas le hamiltonien  $H$  a la même expression :

$$H = \frac{\|\vec{v}\|^2}{2},$$

c'est le hamiltonien classique d'une particule de déplacement librement sur  $Q$ , ou sur  $\mathcal{E}$ , il est bien invariant par l'action  $\widehat{\Phi}$ .

## XII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

Dans les trois cas le groupe  $G$ , de dimension 6, contient comme sous-groupe  $SO(3)$ , de dimension 3. La partie correspondante du moment  $J$  donne, en revenant au problème de Kepler, une intégrale première bien connue : le moment cinétique  $\vec{L}$ .

Mais il y a d'autres sous-groupes à un paramètre intéressants, en correspondance bijective avec les vecteurs  $\vec{v}$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  :

- dans le cas où  $e \neq 0$  la rotation (usuelle si  $e < 0$ , hyperbolique si  $e > 0$ ) du plan contenant  $O$  parallèle à  $\vec{v}$  et à  $\vec{e}_h$ , et laissant fixe l'orthogonal de ce plan ;
- dans le cas où  $e = 0$ , la translation de  $\mathcal{E}$  selon le vecteur  $\vec{v}$ .

La partie correspondante du moment  $J$ , notée  $J'$ , est une fonction qui prend ses valeurs dans l'espace des vecteurs de  $\mathcal{E}$ . Son évaluation sur un vecteur  $\vec{v}$ , considéré comme un élément de l'algèbre de Lie de  $G$ , est le produit scalaire avec  $\vec{v}$ .

## XII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

Le calcul donne

$$\begin{cases} J'(\overrightarrow{O\dot{\mu}}, h, \overrightarrow{w_3}, w_h) = \zeta(h\overrightarrow{w_3} - w_h\overrightarrow{O\dot{\mu}}) & \text{si } e \neq 0, \\ J'(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

Revenons au problème de Kepler en exprimant  $\overrightarrow{O\dot{\mu}}$ ,  $h$ ,  $\overrightarrow{w_3}$ ,  $w_h$  (dans le cas où  $e \neq 0$ ), ou  $\overrightarrow{Om}$ ,  $\overrightarrow{w}$  (dans le cas où  $e = 0$ ) en fonction de  $\overrightarrow{r}$  et  $\overrightarrow{p}$ . On trouve

$$J' = \begin{cases} \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2 - \zeta\rho^2}{\rho} \overrightarrow{r} - \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho} \overrightarrow{p} & \text{si } e \neq 0, \\ \frac{\|\overrightarrow{p}\|^2}{\lambda} \overrightarrow{r} - \frac{2\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\lambda} \overrightarrow{p} & \text{si } e = 0. \end{cases}$$

## XII. Symétries. 3. Vecteur excentricité et moment.

---

En tenant compte de  $e = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{mk}{\|\vec{r}\|}$  et, si  $e \neq 0$ , de

$\zeta \rho^2 = -2me$ , on vérifie aisément que  $J'$  est proportionnel au vecteur excentricité  $\vec{\varepsilon}$ .

## XIII. Projection stéréographique et projection cylindrique.

On a pu associer à l'hodographe d'un mouvement d'énergie non nulle un grand cercle, ou une grande hyperbole, d'une quadrique d'un espace de dimension 4, construit en ajoutant une dimension à l'espace physique  $\mathcal{E}$ .

*Györgyi* [10] a montré que la projection cylindrique de ce grand cercle, ou de cette grande hyperbole, sur l'espace  $\mathcal{E}$  (identifié à l'hyperplan d'équation  $h = 0$ ) est une conique (ellipse ou hyperbole) de même excentricité que l'orbite. Cette projection a le point  $O$  pour centre, alors que l'orbite l'admet pour foyer.

La formule

$$\vec{r} = -\frac{\zeta m^2 k}{\rho^2} \vec{\varepsilon} + \vec{w}_3$$

explique cette propriété car  $-\frac{\zeta m^2 k}{\rho^2} \vec{\varepsilon}$  est égal au vecteur d'origine  $O$  et d'extrémité le centre de l'orbite.

# Remerciements

---

Je remercie les organisateurs de ces journées, Jean-Pierre Bourguignon, Pierre Cartier et Yvette Kosmann-Schwarzbach, de m'avoir invité à présenter ce travail.

Je dois beaucoup à Jean-Marie Souriau qui, il y a longtemps, m'a parlé des travaux de Lagrange, du vecteur excentricité et des symétries cachées du problème de Kepler. Il m'a fallu beaucoup de temps pour comprendre ce qu'il m'expliquait ! Je dois également beaucoup à Patrick Iglesias, pour avoir lu et médité son livre *Symétries et moment*.

J'ai eu des discussions intéressantes et stimulantés avec mes collègues Alain Albouy, Alain Guichardet, Alain Chenciner, Maylis Irigoyen, Jean-Pierre Marco, Alan Weinstein.

Merci enfin aux personnes qui ont eu la patience de m'écouter.

## Bibliographie (1)

1. D. V. Anosov, *A note on the Kepler problem*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 8, No. 3, July 2002, 413–442.
2. V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, Moscou, 1974, traduction française 1976.
3. H. Bacry, H. Ruegg et J.-M. Souriau, *Dynamical groups and spherical potentials in classical mechanics*, Commun. math. phys. 3 (1966), 323–333.
4. E. A. Belbruno, *Two body motion under the inverse central force and equivalent geodesic flow*, Celest. Mech. 15 (1977), 467–476.
5. E. A. Belbruno, *Regularizations and geodesic flow*, in *Classical mechanics and Dynamical Systems*, (R. L. Devaney and Z. H. Nitecki, editors) Dekker, 1981, 1–11.

## Bibliographie (2)

6. A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.
7. B. Cordani, *The Kepler problem*, Birkhäuser, Basel, 2003.
8. V. A. Fock, Zs. Phys. 98, 145 (1935).
9. V. Guillemin and S. Sternberg, *Variations on a theme by Kepler*, American mathematical society colloquium publications 42, 1990.
10. G. Györgyi, *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets, parts I and II*, Il nuovo cimento vol. LIII A, no. 3, Febbraio 1968, 717–736 and vol. LXII A, n. 2, Luglio 1969, 449–474.

## Bibliographie (3)

11. W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.
12. W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.
13. W.R. Hamilton, *The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction*, Proc. Roy. Irish Acad., 3 (1846) 344–353. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. II, 287–294, Cambridge University Press, 1940.
14. P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

## Bibliographie (4)

15. J.-L. Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres de Berlin, 1775. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.
16. J.-L. Lagrange, *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Mémoire lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.
17. J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

## Bibliographie (5)

18. J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.
19. J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par les éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par les éditions Blanchard, Paris.
20. J.E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Mathematical Physics 5 (1974), 121–130.
21. J. Milnor, *On the Geometry of the Kepler problem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 353–365.

## Bibliographie (6)

22. J. Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Commun. pure appl. math. 23 (1970), 609–636.
23. Yu. S. Osipov, *geometrical interpretation of Kepler's problem*, Uspekhi Mat. Nauk, 27, 2 (1972), P. 161.
24. Yu. S. Osipov, *The kepler problem and geodesic flows in spaces of constant curvature*, Celest. mech. 16 (1977), 191–208.
25. S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.
26. S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.
27. J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1969.
28. J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics.

# Annexe I. Présentation moderne

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$  on considère un système hamiltonien, dont le hamiltonien, dépendant éventuellement du temps, est noté  $Q : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (c'est la notation utilisée par Cauchy). Soit  $M_0$  la variété des mouvements et  $\Phi : \mathbb{R} \times M_0 \rightarrow M$   $(t, a) \mapsto \Phi(t, a)$  le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien  $Q$ . Pour toute fonction différentiable  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial (g \circ \Phi(t, a))}{\partial t} = \{Q, g\}(\Phi(t, a)).$$

## Annexe I. Présentation moderne (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit  $Q + R$  au lieu de  $Q$ ,  $R$  pouvant aussi dépendre de  $t$ .

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application  $\Psi : \mathbb{R} \times M_1 \rightarrow M_0$ ,  $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$ , où  $M_1$  est la variété des mouvements du nouveau système, telle que  $(t, b) \mapsto \Phi(t, \Psi(t, b))$  soit le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien  $Q + R$ .

On doit avoir, pour toute fonction différentiable  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t, \Psi(t, b)) \right) = \{Q + R, g\} \left( \Phi(t, \Psi(t, b)) \right).$$

Mais pour chaque valeur particulière  $t_0$  de  $t$

$$\frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t, \Psi(t, b)) \right) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t, \Psi(t_0, b)) \right) \Big|_{t=t_0} + \frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t_0, \Psi(t, b)) \right) \Big|_{t=t_0}$$

## Annexe I. Présentation moderne (3)

Puisque, pour  $t_0$  fixé,  $(t, \Psi(t_0, b)) \mapsto \Phi(t, \Psi(t_0, b))$  est le flot modifié du champ de hamiltonien  $Q$ , le premier terme du membre de droite vaut

$$\left. \frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t, \Psi(t_0, b)) \right) \right|_{t=t_0} = \{Q, g\} \left( \Phi(t_0, \Psi(t_0, b)) \right).$$

Donc le second terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left( g \circ \Phi(t_0, \Psi(t, b)) \right) \right|_{t=t_0} &= \left( \{Q + R, g\} - \{Q, g\} \right) \left( \Phi(t_0, \Psi(t_0, b)) \right) \\ &= \{R, g\}_M \left( \Phi(t_0, \Psi(t_0, b)) \right) \\ &= \{R \circ \Phi_{t_0}, g \circ \Phi_{t_0}\}_{M_0} \left( \Psi(t_0, b) \right), \end{aligned}$$

parce que  $\Phi_{t_0} : M_0 \rightarrow M$  est de Poisson.

## Annexe I. Présentation moderne (4)

Mais  $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$  peut être n'importe quelle fonction différentiable sur  $M_0$ , et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t, b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\left(g_0(\Psi(t, b))\right)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \{R \circ \Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}(\Psi(t_0, b)).$$

Mais  $t_0$  pouvant être quelconque, cette dernière équation montre que pour tout  $b \in M_1$  (variété des mouvements du système de hamiltonien  $(Q + R)$ ,  $t \mapsto \Psi(t, b)$  est une courbe intégrale, sur la variété  $M_0$  des mouvements du système de hamiltonien  $Q$ , du champ de vecteurs de hamiltonien (dépendant du temps)

$$(t, a) \mapsto R(t, \Phi(t, a)), \quad (t, a) \in \mathbb{R} \times M_0.$$

C'est le résultat découvert par Lagrange vers 1808.

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 1. Équations

Soit  $P$  un point matériel de masse  $m$ , en mouvement dans l'espace physique  $\mathcal{E}$  (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel euclidien associé  $\vec{\mathcal{E}}$ ), soumis au champ gravitationnel créé par un centre attractif  $O$ . Posons

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La force  $\vec{f}$  qui s'exerce sur  $P$  est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

$k$  étant la constante caractérisant le champ attractif de  $O$ . Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}.$$

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 2. Moment cinétique



Pour résoudre ces équations nous suivrons la méthode la plus simple, due au grand mathématicien irlandais *William Rowan Hamilton* (1805–1865) [9].

Le moment cinétique de  $P$  par rapport à  $O$  est

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

$\times$  étant le produit vectoriel.

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 2. Moment cinétique (2)

On vérifie aisément

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

donc  $\vec{L}$  est une intégrale première du mouvement.

Intéressons-nous d'abord au cas où à l'instant initial  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  ne sont pas colinéaires, donc où à l'instant initial  $\vec{L} \neq 0$ . Comme  $\vec{L}$  reste constant,  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  ne sont jamais colinéaires.

Choisissons un trièdre orthonormé, d'orientation positive, d'origine  $O$  et de vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , tels que  $\vec{L}$  soit parallèle à l'axe  $\vec{e}_z$ , et soit  $L$  sa composante sur cet axe :

$$\vec{L} = L\vec{e}_z.$$

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 2. Moment cinétique (3)

Les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  restent constamment parallèles au plan  $xOy$ . En notant  $\theta$  l'angle polaire de  $\vec{r}$ , on a

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y ,$$

$$\vec{p} = m \left( \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \vec{e}_x + m \left( \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{L} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z .$$

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 3. Loi des aires

---

On a donc

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Constante} .$$

C'est la *seconde loi de Kepler*, aussi appelée *loi des aires*, car  $\frac{L}{2m}$  est l'aire balayée par le segment de droite  $OP$  par unité de temps, comptée positivement si  $\theta$  (dont la variation est monotone) croît, et négativement s'il décroît.

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 4. Hodographe

La variation de l'angle polaire  $\theta$  étant monotone, on peut écrire

$$\frac{d\vec{p}}{d\theta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{m^2 k}{L} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y).$$

Cette équation (qui ne contient plus  $r$ ) est une équation différentielle en  $\theta$  qui s'intègre aisément :

$$\vec{p} = \frac{m^2 k}{L} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + \vec{c},$$

où  $\vec{c}$  est la constante (vectorielle) d'intégration.

On choisira  $\vec{e}_y$  de manière telle que

$$\vec{c} = c \vec{e}_y,$$

$c$  étant une constante de même signe que  $L$ .

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 4. Hodographe (2)

En prenant  $O$  pour origine traçons dans le plan  $xOy$  deux vecteurs égaux, respectivement, à  $\vec{c}$  et à  $\vec{p}$ . L'extrémité du vecteur égal à  $\vec{p}$  parcourt, lorsque  $\theta$  varie, un cercle (ou un arc de cercle) ayant pour centre l'extrémité du vecteur égal à  $\vec{c}$  et pour rayon

$$R = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

Ce cercle (ou cet arc de cercle) est (au facteur multiplicatif  $m$  près) l'*hodographe* du problème de Kepler. Pour faciliter le langage, nous dirons dans la suite *hodographe* tout court au lieu de hodographe multiplié par  $m$ .

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 5. Équation de l'orbite

Calculons  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  :

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left( \frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z. \quad \text{D'où nous déduisons :}$$

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{où nous avons posé}$$

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

C'est l'équation polaire d'une conique d'excentricité  $\varepsilon$  et de foyer  $O$ . Comme on a choisi  $c$  de même signe que  $L$ , on a  $\varepsilon \geq 0$ . C'est (dans le cas où cette orbite est une ellipse) la *première loi de Kepler*.

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 6. L'énergie

L'*énergie* du point matériel  $P$  est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}, \quad \text{avec} \quad p = \|\vec{p}\|,$$

en convenant de prendre pour niveau zéro de l'énergie, l'énergie qu'aurait le point matériel  $P$  s'il était immobile et infiniment éloigné de  $O$ .

En utilisant les équations du mouvement on vérifie aisément que  $\frac{dE}{dt} = 0$ , donc que l'énergie  $E$  est une intégrale première.

Quelques petits calculs permettent d'exprimer l'énergie  $E$  au moyen de  $m$ ,  $k$ ,  $L$  et  $\varepsilon$  :

$$E = \frac{m^3 k^2}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1).$$

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 6. L'énergie (2)

---

Rappelons que l'hodographe du problème de Kepler est un (arc de) cercle dont le centre est à la distance  $|c|$  du point  $O$  et dont le rayon est  $R$ . L'énergie  $E$  s'exprime, en fonction de  $c$  et de  $R$ , par

$$E = \frac{1}{2m}(c^2 - R^2)$$

La *puissance*  $(c^2 - R^2)$  du point  $O$  par rapport à l'hodographe, est égale à  $2mE$ , où  $E$  est l'énergie.

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 7. Troisième loi

Lorsque  $E < 0$ , l'orbite est une ellipse, le mouvement est périodique. La loi des aires permet un calcul facile de la période  $T$  puisque l'aire balayée par  $OP$  par unité de temps est

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

En intégrant sur une période on trouve

$$\frac{|L|T}{2m} = \text{aire intérieure à l'orbite.}$$

Le demi-grand axe  $a$  et le demi-petit axe  $b$  de l'orbite ont pour expressions

$$a = \frac{\Lambda}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

## Annexe II. Résolution pb de Kepler. 7. Troisième loi (suite)

On a donc

$$\frac{|L|T}{2m} = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi m a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|L|}.$$

Mais en tenant compte de  $L^2 = m^2 k a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ , on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

C'est la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe.

L'énergie  $E$  s'exprime très simplement en fonction de  $a$  :

$$|E| = \frac{km}{2a}.$$