À l’origine de la géométrie symplectique: les travaux de Lagrange et de Poisson sur la variation des éléments orbitaux des planètes du système solaire

Charles-Michel Marle

cmm1934@orange.fr

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

Sommaire

I. Aperçu historique

1. Le mot *symplectique*
2. La notion de *structure symplectique*

II. Bref rappel

1. Structures symplectiques
2. “Produit scalaire”° symplectique
3. Théorème de Darboux
4. Exemple standard : le fibré cotangent

III. Mouvement des planètes

1. Approximation képlérienne
2. Éléments orbitaux
3. Au delà de l’approximation keplérienne

Sommaire (suite)

IV. Variation des éléments orbitaux

1. Chronologie
2. La méthode de Lagrange
3. Les parenthèses de Lagrange
4. Les formules de variation des constantes

V. Crochets de Poisson

1. Mémoire de Poisson de 1809
2. Expression des crochets
3. Comparaison : crochets de Poisson et parenthèses de Lagrange
4. Théorème de Poisson

VI. Méthode de variation des constantes

1. Note de Cauchy de 1837
2. Rappels
3. Présentation moderne

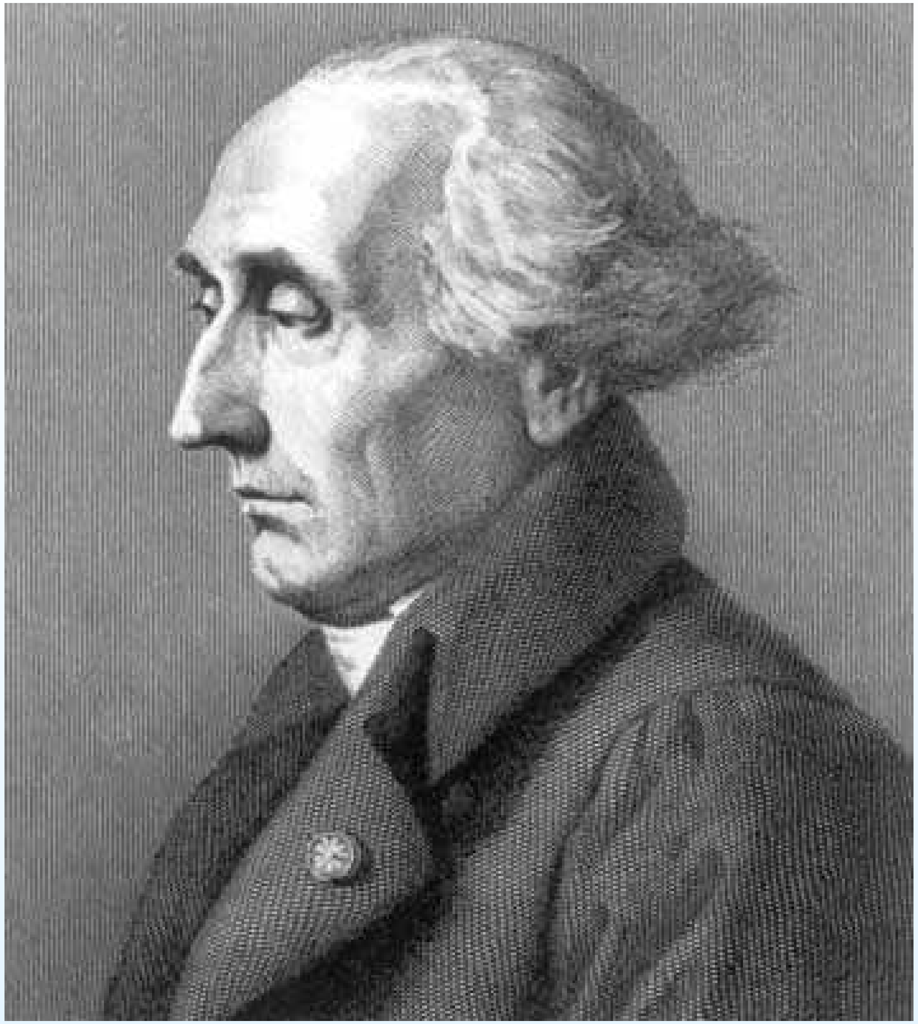
Remerciements

Bibliographie

I. Aperçu historique. 1. Le mot *symplectique*

Hermann Weyl (1885–1955)

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l'entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* publié en 1939 [16]. Il vient d'une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.



Joseph Louis Lagrange
(1736–1813)

La notion de *structure symplectique* est bien antérieure. Elle apparaît dans les travaux de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), d'abord lors de son étude de la variation lente des éléments orbitaux des planètes du système solaire, puis en toute généralité, comme une structure fondamentale existant sur l'ensemble des mouvements d'un système mécanique.

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

II. Bref rappel. 1. Structure symplectique

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v, w) \neq 0\,.$$

II. Bref rappel. 1. Structure symplectique

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, antisymétrique, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v,w) \neq 0\,.$$

On dit alors que (M,ω) est une *variété symplectique*.

Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$, et tout couple (v, w) de vecteurs tangents à M au point x, l’évaluation

$$\omega(x)(v, w)$$

de la forme symplectique ω sur ce couple de vecteurs est une sorte de “produit scalaire” de v et w.

Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$, et tout couple (v, w) de vecteurs tangents à M au point x, l'évaluation

$$\omega(x)(v, w)$$

de la forme symplectique ω sur ce couple de vecteurs est une sorte de “produit scalaire” de v et w.

Ce produit scalaire est *antisymétrique*, alors que si g est une métrique pseudo-riemannienne sur M, le produit scalaire usuel associé à cette métrique :

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto g(x)(v, w)$$

est *symétrique*.

II. Bref rappel. 3. Théorème de Darboux

Les conditions imposées à la forme ω ont pour conséquences (théorème de Darboux)

II. Bref rappel. 3. Théorème de Darboux

Les conditions imposées à la forme ω ont pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,

II. Bref rappel. 3. Théorème de Darboux

Les conditions imposées à la forme ω ont pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,
- sur une variété symplectique de dimension $2n$, au voisinage de chaque point, on peut choisir les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^{2n}$ de sorte que ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \, .$$

Les conditions imposées à la forme ω ont pour conséquences (théorème de Darboux)

- toute variété symplectique est de dimension paire,
- sur une variété symplectique de dimension $2n$, au voisinage de chaque point, on peut choisir les coordonnées locales $x^1, \ldots, x^{2n}$ de sorte que ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \,.$$

- Par suite, deux variétés symplectiques de même dimension sont localement isomorphes. Il n'existe pas, pour les structures symplectiques, d'équivalent de la *signature* des structures pseudo-riemanniennes.

La 1-forme de Liouville Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η_N, ainsi définie :

$$\langle \eta_N(\xi), \zeta \rangle = \langle \xi, T\pi_N(\zeta) \rangle \, .$$

$\xi \in T^*N\,,\ x = \pi_N(\xi) \in N\,,\ \zeta \in T_\xi(T^*N)\,,\ T\pi_N(\zeta) \in T_xN\,.$

La 1-forme de Liouville Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η_N, ainsi définie :

$$\big\langle \eta_N(\xi), \zeta \big\rangle = \big\langle \xi, T\pi_N(\zeta) \big\rangle \,.$$

$\xi \in T^*N \,,\; x = \pi_N(\xi) \in N \,,\; \zeta \in T_\xi(T^*N) \,,\; T\pi_N(\zeta) \in T_xN \,.$

Expression en coordonnées locales Soient $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées locales dans une carte de N, et $p_1, \ldots, p_n$ les coordonnées associées dans les fibres de T^*N. La forme de Liouville a pouir expression

$$\eta_N = \sum_{i=1}^n p_i \, dx^i \,.$$

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \,.$$

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \,.$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \,.$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

Elle est fermée car $d \circ d = 0$, ce que confirme son expression locale puisque ses composantes sont des constantes. On vérifie aisément qu'elle est non dégénérée. C'est donc bien une forme symplectique, qui joue un rôle important en Mécanique et en Physique.

Johannes Kepler (1571–1630)

En première (et très bonne) approximation, chaque planète du système solaire parcourt une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, suivant la *loi des aires* : l'aire balayée par le segment de droite joignant la planète au Soleil est une fonction linéaire du temps. Ce sont les deux premières lois découvertes par l'astronome et mathématicien *Johannes Kepler (1571–1630)*.

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux

Dans cette approximation, le mouvement d'une planète est déterminé par ses *éléments orbitaux*, au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,
- un dernier pour déterminer la position de la planète sur son orbite. Par exemple, sa position à une date fixée, prise comme origine du temps.

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux (2)

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6, appelée *variété des mouvements* du problème de Kepler (*J.-M. Souriau* [14]).

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux (2)

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6, appelée *variété des mouvements* du problème de Kepler (*J.-M. Souriau* [14]).

Autre manière de voir que cette dimension est 6 : le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux (2)

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6, appelée *variété des mouvements* du problème de Kepler (*J.-M. Souriau* [14]).

Autre manière de voir que cette dimension est 6 : le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

III. Mouvement des planètes. 2. Éléments orbitaux (3)

La connaissance des éléments orbitaux d'une planète suffit pour déterminer la position de cette planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C'est la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période du mouvement d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

III. Mouvement des planètes. 3. Au delà de Kepler

Ce n’est qu’en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n’interagit gravitationnellement qu’avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

III. Mouvement des planètes. 3. Au delà de Kepler

Ce n'est qu'en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n'interagit gravitationnellement qu'avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

III. Mouvement des planètes. 3. Au delà de Kepler (2)

Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Pour en tenir compte, les savants du XVIII-ème siècle, notamment Pierre Simon Laplace(1749–1827) et Joseph Louis Lagrange (1736–1813) ont considéré les éléments orbitaux des planètes comme lentement variables, et ont cherché à déterminer les lois qui régissent leur variation au cours du temps.

IV. Variation des éléments orbitaux. 1. Chronologie

1773 : Laplace, Mémoire lu à l'Académie des Sciences (constance du demi-grand axe)

1776, 1781, 1782, . . . : Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin

20 juin 1808 : Poisson, *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*.

22 août 1808 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*.

13 mars 1809 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*.

IV. Variation des éléments orbitaux. 1. Chronologie (2)

16 octobre 1809 : Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*.

19 février 1810 : Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*.

15 janvier 1835 : Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*.

1831 ou 1837 : Cauchy, Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots)\,,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots)\,,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Les quantités r', s', u', $\ldots$, sont les dérivées de r, s, u, par rapport au temps t :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad , \ldots$$

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

La solution générale du système formé par ces n équations du second ordre dépend du temps t et de $2n$ constantes d'intégration, que Lagrange note a, b, c, f, g, h, $\ldots$.

Cette solution générale est de la forme

$$r = r(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad s = s(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad u = \ldots .$$

Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, les $2n$ constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont les *éléments orbitaux*.

Puis Lagrange suppose que le potentiel V ne décrit les forces qui s'exercent sur le système mécanique qu'en première approximation, et qu'il doit, dans les équations du mouvement, être remplacé par $V - \Omega$, où Ω est une fonction de r, s, u, $\ldots$, et aussi du temps t. Dans l'exemple du mouvement d'une planète, Ω traduit les interactions gravitationnelles entre les planètes qui étaient auparavant négligées. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \ldots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\ldots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \ldots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \ldots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\ldots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \dots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\dots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \dots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\dots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Il reste à déterminer les $2n$ fonctions du temps $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$, $\dots$, qui bien entendu dépendront, outre du temps t, de $2n$ constantes arbitraires.

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), (b, c), (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), (b, c), (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Celles-ci s'expriment au moyen des constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$, et ne dépendent ni du temps t, ni des forces additionnelles agissant sur le système, représentées par Ω.

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Précisons bien qu'il s'agit ici du système mécanique dont l'énergie cinétique est T et dont les forces appliquées dérivent du potentiel V : les forces additionnelles représentées par Ω n'entrent pas dans leurs expressions.

L'expression des parenthèses (a,b), (a,c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots \,.$$

L'expression des parenthèses (a, b), (a, c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Nous avons posé, comme le feront Hamilton [2,3] et Cauchy [1] environ 30 ans plus tard :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'}\,, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial s'}\,, \quad p_u = \frac{\partial T}{\partial u'}\,.$$

Lagrange utilisait les notations moins parlantes T', T'' et T''' au lieu de p_r, p_s et p_u.

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système.

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système.

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système. Dans le cas le plus souvent rencontré, qui était celui considéré par Lagrange, où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive, cette application est un difféomorphisme.

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont donnés.

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont donnés.

Réciproquement, le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles (attribué à Cauchy et Lipschitz, mais que Lagrange considérait comme allant de soi) montre que la connaissance de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, à un instant fixé quelconque t, détermine complètement le mouvement, donc détermine a, b, c, f, g, h, $\ldots$

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u,\ldots,r',\ s',\ u',\ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u,\ldots,r',\ s',\ u',\ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

En composant ce difféomorphisme avec la transformation de Legendre, nous voyons que, pour chaque instant t fixé,

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots) \mapsto (r,\ s,\ u,\ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\ldots)$$

(où il faut comprendre que r, s, u, p_r, p_s, p_u désignent les valeurs prises par ces grandeurs à l'instant t considéré) est un difféomorphisme.

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots) \mapsto (r,\ s,\ u,\ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\ldots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Remarque importante La parenthèse de Lagrange (a,b) n'a de sens que lorsqu'on a choisi, non seulement les deux fonctions a et b sur la variété des mouvements, mais aussi toutes les autres c, f, g, h, $\ldots$, formant un système de coordonnées loales sur cette variété. En d'autres termes, (a,b) ne dépend pas que de a et de b, mais aussi de c, f, g, h, $\ldots$. C'est une fonction sur la variété des mouvements.

Élie Cartan (1869–1951)

En utilisant les concepts et notations du calcul différentiel extérieur (développés au XX-ème siècle par Élie Cartan), il est facile de vérifier que les parenthèses de Lagrange sont les composantes de l'image réciproque de la forme symplectique canonique du fibré cotangent à la variété configuration.

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\ldots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a,b)\,da\wedge db + (a,c)\,da\wedge dc + \cdots + (b,c)\,db\wedge dc + \cdots \\
= \left(\frac{\partial r}{\partial a}da + \frac{\partial r}{\partial b}db + \cdots\right) \wedge \left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da + \frac{\partial p_r}{\partial b}db + \cdots\right) \\
+ \left(\frac{\partial s}{\partial a}da + \frac{\partial s}{\partial b}db + \cdots\right) \wedge \left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da + \frac{\partial p_s}{\partial b}db + \cdots\right) \\
+ \ldots \\
= dr\wedge dp_r + ds\wedge dp_s + du\wedge dp_u + \cdots \,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\dots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c’est l’expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d’un fibré cotangent.

En prouvant que ses parenthèses ne dépendent pas directement du temps, Lagrange a, du même coup, prouvé que le flot du champ de vecteurs d’évolution, sur l’espace des phases, conserve la forme symplectique canonique.

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des “constantes qu’on fait varier” a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n}(a_i, aj)\frac{da_j}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j’ai noté, pour faciliter l’écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j’ai tenu compte de l’antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

IV. Variation des élém. orbitaux. 4. Formules

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des "constantes qu'on fait varier" a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, aj) \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j'ai noté, pour faciliter l'écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j'ai tenu compte de l'antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

Lagrange indique qu'en résolvant ce système linéaire, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{i\,j} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

IV. Variation des élém. orbitaux. 4. Formules (2)

Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps. En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements. Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

IV. Variation des élém. orbitaux. 4. Formules (2)

Siméon Denis Poisson
(1781–1840)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps. En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements. Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui le fera, à peine quelques mois plus tard.

V. Crochets de Poisson. 1. Mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a,b), (a,c), $\ldots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a,b]$ au lieu de (a,b), $[a,c]$ au lieu de (a,c), $\ldots$.

V. Crochets de Poisson. 1. Mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a, b), (a, c), $\ldots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a, b]$ au lieu de (a, b), $[a, c]$ au lieu de (a, c), $\ldots$.

Nous conserverons la notation (a, b), (a, c), $\ldots$, pour les parenthèses de Lagrange et nous utiliserons la notation $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\ldots$ pour les crochets de Poisson.

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

V. Crochets de Poisson. 2. Expression des crochets

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérées comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérées comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

On reconnaît l'expression, en coordonnées de Darboux, du crochet de Poisson de deux fonctions a et b définies sur une variété symplectique.

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots \,.$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots \,.$$

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

C'est au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l'espace des phases au temps t sur l'espace des mouvements que s'expriment les crochets de Poisson, alors que les parenthèses de Lagrange s'expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme inverse, de l'espace des mouvements sur l'espace des phases au temps t.

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

V. Crochets de Poisson. 3. Comparaison (2)

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

Les matrices formées, d'une part, par les parenthèses de Lagrange (a, b), (a, c), $\ldots$, d'autre part par les crochets de Poisson $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\ldots$ des fonctions coordonnées a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre. Ce fait a été clairement indiqué par Augustin Louis Cauchy (1789–1857) dans un mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 [1], 22 ans après la parution des mémoires de Lagrange et Poisson.

Ce théorème est souvent présenté, de nos jours, comme une conséquence de l'*identité de Jacobi*, vérifiée par le crochet de Poisson. Cette identité, découverte par *Carl Gustav Jacobi (1804–1851)* n'était connue ni par Poisson, ni par Lagrange.

Ce théorème est souvent présenté, de nos jours, comme une conséquence de l'*identité de Jacobi*, vérifiée par le crochet de Poisson. Cette identité, découverte par *Carl Gustav Jacobi (1804–1851)* n'était connue ni par Poisson, ni par Lagrange.

Deux intégrales premières quelconques peuvent en général être choisies comme deux des coordonnées sur la variété des mouvements. Leur crochet de Poisson, étant une fonction sur cette variété, est aussi une intégrale première. C'est le *théorème de Poisson*. Pour Lagrange et Poisson, ce théorème était une évidence, conséquence immédiate du fait que le crochet de Poisson est défini sur la variété des mouvements du système mécanique considéré.

VI. Variation des constantes. 1. Note de Cauchy 1837

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

En 1810, Lagrange donne à sa méthode une expression plus simple en utilisant les crochets de Poisson. Cependant, sa méthode reste mal comprise par ses contemporains.

VI. Variation des constantes. 1. Note de Cauchy 1837

Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

En 1810, Lagrange donne à sa méthode une expression plus simple en utilisant les crochets de Poisson. Cependant, sa méthode reste mal comprise par ses contemporains.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) en a donné un nouvel exposé dans une courte note publiée en 1837 [1], extraite d'un mémoire présenté à l'Académie de Turin en 1831.

VI. Variation des constantes. 2. Rappels

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\big(t, \varphi(t)\big)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(t, \varphi(t)\bigr)$$

avec X champ de vecteurs C^∞ (pouvant dépendre du temps $t \in \mathbb{R}$).

On appelle *flot* de cette équation différentielle l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M,

$$(t, t_0, x_0) \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$$

telle que $t \mapsto \Phi(t, t_0, x_0)$ soit la solution maximale de cette équation prenant la valeur x_0 pour $t = 0$.

$$\frac{\partial\Phi(t, t_0, x_0}{\partial t} = X\bigl(t, \Phi(t, t_0, x_0)\bigr)\,, \quad \Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0\,.$$

VI. Variation des constantes. 2. Rappels

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$.

VI. Variation des constantes. 2. Rappels

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C'est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

(t_2, x_2) et (t_1, x_1) sont équivalents si (t_2, t_1, x_1) appartient à l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si

$$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1)\,.$$

VI. Variation des constantes. 2. Rappels

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l'ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C'est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d'équivalence

> (t_2, x_2) et (t_1, x_1) sont équivalents si (t_2, t_1, x_1) appartient à l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si
>
> $$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1)\,.$$

Si Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l'espace des mouvements $\widehat{M}$ est difféomorphe à M, mais pas de manière canonique : le choix d'un instant particulier t_0 détermine un difféomorphisme qui, à chaque mouvement $t \mapsto \varphi(t)$ élément de $\widehat{M}$, fait correspondre le point $\varphi(t_0) \in M$.

On appelle *espace des mouvements* de cette équation différentielle l’ensemble $\widehat{M}$ de ses solutions maximales $t \mapsto \varphi(t)$. C’est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par la relation d’équivalence

> (t_2, x_2) et (t_1, x_1) sont équivalents si (t_2, t_1, x_1) appartient à l’ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ sur lequel Φ est défini et si
>
> $$x_2 = \Phi(t_2, t_1, x_1)\,.$$

Si Φ est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, l’espace des mouvements $\widehat{M}$ est difféomorphe à M, mais pas de manière canonique : le choix d’un instant particulier t_0 détermine un difféomorphisme qui, à chaque mouvement $t \mapsto \varphi(t)$ élément de $\widehat{M}$, fait correspondre le point $\varphi(t_0) \in M$.

Dans le cas général l’espace des mouvements admet une structure de variété différentiable, pas toujours séparée.

La valeur $\Phi(t, t_0, x_0)$ du flot au temps t dépend de t et de la *classe d'équivalence* a de (t_0, x_0), plutôt que de t_0 et x_0 séparément. En effet, si (t_0, x_0) et (t_1, x_1) sont équivalents, $x_1 = \Phi(t_1, t_0, x_0)$ et

$$\Phi(t, t_1, x_1) = \Phi\bigl(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)\bigr) = \Phi(t, t_0, x_0)\,.$$

On appelle *flot modifié* l'application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \widehat{M}$,

$$(t, a) \mapsto \widehat{\Phi}(t, a) = \Phi(t, t_0, x_0)\,,$$

avec $a =$ classe d'équivalence de (t_0, x_0).
C'est ce point de vue que Lagrange a utilisé dans son mémoire de 1809.

VI. Variation des constantes. 3. Présentation moderne

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ on considère un système hamiltonien, dont le hamiltonien, dépendant éventuellement du temps, est noté $Q : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (c'est la notation utilisée par Cauchy). Soit M_0 la variété des mouvements et $\Phi : \mathbb{R} \times M_0 \to M \ (t, a) \mapsto \Phi(t, a)$ le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien Q. Pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\big(g \circ \Phi(t, a)\big)}{\partial t} = \{Q, g\}\big(\Phi(t, a)\big) \, .$$

VI. Variation des constantes. 3. Présentation moderne

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_1 \to M_0$, $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t, b) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t, b)\big)$ soit le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien $Q + R$.

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_1 \to M_0$, $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t, b) \mapsto \Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)$ soit le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien $Q + R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g \circ \Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)\Bigr) = \{Q + R, g\}\Bigl(\Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)\Bigr) .$$

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q+R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R}\times M_1 \to M_0$, $(t,b)\mapsto a=\Psi(t,b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t,b)\mapsto \Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)$ soit le *flot modifié* du champ de vecteurs de hamiltonien $Q+R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr) = \{Q+R,g\}\Bigl(\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\,.$$

Mais pour chaque valeur particulière t_0 de t

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0} + \frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t_0,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}$$

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0, b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)$ est le flot modifié du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q, g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\,.$$

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0,b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0,b)\big)$ est le flot modifié du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0,b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q,g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0,b)\big)\Big)\,.$$

Donc le second terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t_0, \Psi(t,b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} &= \Big(\{Q+R,g\} - \{Q,g\}\Big)\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0,b)\big)\Big)\\ &= \{R,g\}_M\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0,b)\big)\Big)\\ &= \{R\circ\Phi_{t_0}, g\circ\Phi_{t_0}\}_{M_0}\big(\Psi(t_0,b)\big)\,,\end{aligned}$$

parce que $\Phi_{t_0} : M_0 \to M$ est de Poisson.

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Big(g_0\big(\Psi(t,b)\big)\Big)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \{R\circ\Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\big(\Psi(t_0,b)\big)\,.$$

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Big(g_0\big(\Psi(t,b)\big)\Big)}{dt}\Bigg|_{t=t_0} = \{R\circ\Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\big(\Psi(t_0,b)\big)\,.$$

Mais t_0 pouvant être quelconque, cette dernière équation montre que pour tout $b \in M_1$ (variété des mouvements du système de hamiltonien $(Q+R)$, $t \mapsto \Psi(t,b)$ est une courbe intégrale, sur la variété M_0 des mouvements du système de hamiltonien Q, du champ de vecteurs de hamiltonien (dépendant du temps)

$$(t,a) \mapsto R\big(t, \Phi(t,a)\big)\,, \qquad (t,a) \in \mathbb{R} \times M_0\,.$$

C'est le résultat découvert par Lagrange vers 1808.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Alain Albouy, Alain Chenciner, Jacques Féjoz, Jacques Laskar m'ont donné l'occasion de présenter une première version de ce travail à l'Atelier de Mécanique Céleste de l'Observatoire de Paris en décembre 2007. Je remercie tout particulièrement Alain Albouy qui m'a aidé à rassembler la plupart des documents dont j'ai parlé et m'a fait bénéficier de ses vastes connaissances en Mécanique céleste.

Remerciements

Je remercie le Centre culturel français de Constantine, les Universités de Constantine et de Guelma qui m'ont invité à présenter cet exposé, et m'ont donné la possibilité de revoir les lieux où j'ai passé mon enfance et mon adolescence. Je remercie l'association Égide qui a pris en charge mon voyage et m'a aidé à obtenir un visa.

Alain Albouy, Alain Chenciner, Jacques Féjoz, Jacques Laskar m'ont donné l'occasion de présenter une première version de ce travail à l'Atelier de Mécanique Céleste de l'Observatoire de Paris en décembre 2007. Je remercie tout particulièrement Alain Albouy qui m'a aidé à rassembler la plupart des documents dont j'ai parlé et m'a fait bénéficier de ses vastes connaissances en Mécanique céleste.

Merci enfin à toutes les personnes qui m'ont fait l'honneur de venir m'écouter.

Bibliographie (1)

[1] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

[2] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[3] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

Bibliographie (2)

[4] T. Hawkins, *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups*.

[5] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

[6] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, G. Reimer, Berlin, 1881–1891.

[7] J.-L. Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres de Berlin, 1775. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (3)

[8] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Mémoire lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[9] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[10] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (4)

[11] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par les éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par les éditions Blanchard, Paris.

[12] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.

[13] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

Bibliographie (5)

[14] J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scie nze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.

[15] J.-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 45–54. Numérisé par Numdam, http ://www.numdam.org.

[16] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.