Algèbre et Géométrie
dans le monde symplectique

I. Systèmes hamiltoniens

Charles-Michel Marle

cmm1934@orange.fr

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

Sommaire

Sommaire (2)

- Isomorphisme des fibrés tangent et cotangent
- Structure de Poisson associée
- Le crochet de Poisson

Champs hamiltoniens

- Equation de Hamilton
- Intégrales premières
- Expressions locales
- Le flot d'un champ de vecteurs
- Flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

Aperçu historique

Les éléments orbitaux des planètes

Sommaire (3)

- Au delà de l'approximation keplérienne
- Lagrange et Poisson : chronologie
- La méthode de variation des constantes
- Le mémoire de Lagrange de 1809
  - Les parenthèses de Lagrange
  - Les formules de variation des constantes
- Le mémoire de Poisson de 1809
  - Les crochets de Poisson
  - Crochets de Poisson et parenthèses de Lagrange
  - Le théorème de Poisson
  - L'identité de Jacobi

Sommaire (4)

Structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, satisfaisant les deux propriétés :

Structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

Structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v,w) \neq 0\,.$$

Structures symplectiques

Définition Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, satisfaisant les deux propriétés :

- la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

- et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v,w) \neq 0\,.$$

On dit alors que (M,ω) est une *variété symplectique*.

Fibrés tangent et cotangent

Espace tangent en un point x à une variété différentiable M : C'est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x. Notation : T_xM.

Fibrés tangent et cotangent

Espace tangent en un point x à une variété différentiable M : C'est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x. Notation : T_xM.

Espace cotangent en x : c'est l'ensemble des formes linéaires sur T_xM. Notation : T_x^*M.

Fibrés tangent et cotangent

Espace tangent en un point x à une variété différentiable M : C'est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x. Notation : T_xM.

Espace cotangent en x : c'est l'ensemble des formes linéaires sur T_xM. Notation : T_x^*M.

Fibré tangent : $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$.

Projection canonique : $\tau_M : TM \to M$.

Fibrés tangent et cotangent

Espace tangent en un point x à une variété différentiable M : C'est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x. Notation : T_xM.

Espace cotangent en x : c'est l'ensemble des formes linéaires sur T_xM. Notation : T_x^*M.

Fibré tangent : $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$.

Projection canonique : $\tau_M : TM \to M$.

Fibré cotangent : : $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$.

Projection canonique : $\pi_M : T^*M \to M$.

Multivecteurs et formes multilinéaires

Espace des multivecteurs de degré p

$$\text{en un point } x \in M \ : \quad \bigwedge^{p}(T_x M)\,.$$

Multivecteurs et formes multilinéaires

Espace des multivecteurs de degré p

en un point $x \in M$: $\displaystyle \bigwedge^p (T_x M)\,.$

Fibré des multivecteurs de degré p :

$$\bigwedge^p (TM) = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p (T_x M)\,.$$

Multivecteurs et formes multilinéaires

Espace des multivecteurs de degré p

$$\text{en un point } x \in M \ : \quad \bigwedge^{p}(T_xM)\,.$$

Fibré des multivecteurs de degré p :

$$\bigwedge^{p}(TM) = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^{p}(T_xM)\,.$$

Espace des formes de degré p

$$\text{en un point } x \in M \ : \quad \bigwedge^{p}(T_x^*M)\,.$$

Multivecteurs et formes multilinéaires

Espace des multivecteurs de degré p

$$\text{en un point } x \in M \ : \quad \bigwedge^{p}(T_x M)\,.$$

Fibré des multivecteurs de degré p :

$$\bigwedge^{p}(TM) = \bigcup_{x\in M} \bigwedge^{p}(T_x M)\,.$$

Espace des formes de degré p

$$\text{en un point } x \in M \ : \quad \bigwedge^{p}(T_x^* M)\,.$$

Fibré des formes de degré p :

$$\bigwedge^{p}(T^* M) = \bigcup_{x\in M} \bigwedge^{p}(T_x^* M)\,.$$

Champs et formes différentielles

Champ de vecteurs :

$$V : M \longrightarrow TM\,, \quad x \in M \quad x \mapsto V(x) \in T_x M\,.$$

Champs et formes différentielles

Champ de vecteurs :

$$V : M \to TM\,, \quad x \in M \quad x \mapsto V(x) \in T_xM\,.$$

Champ de p-multivecteurs :

$$P : M \to \bigwedge^p(TM)\,, \quad x \in M \quad x \mapsto P(x) \in \bigwedge^p(T_xM)\,.$$

Champs et formes différentielles

Champ de vecteurs :

$$V : M \to TM\,, \quad x \in M \quad x \mapsto V(x) \in T_x M\,.$$

Champ de p-multivecteurs :

$$P : M \to \bigwedge^p (TM)\,, \quad x \in M \quad x \mapsto P(x) \in \bigwedge^p (T_x M)\,.$$

Forme différentielle de degré p :

$$\zeta : M \to \bigwedge^p (T^* M)\,, \quad x \in M \quad x \mapsto \zeta(x) \in \bigwedge^p (T_x^* M)\,.$$

Expressions locales (1)

Cartes locales. À chaque carte de M, dont les fonctions coordonnées sont notées $x^1, \ldots, x^m$, sont naturellement associées des cartes de TM, de T^*M et des fibrés deleurs puissances extérieures.

Expressions locales (1)

Cartes locales. À chaque carte de M, dont les fonctions coordonnées sont notées $x^1, \dots, x^m$, sont naturellement associées des cartes de TM, de T^*M et des fibrés deleurs puissances extérieures.

Pour le fibré cotangent : Les valeurs en un point x du domaine de la carte des différentielles dx^i des fonctions coordonnées forment en effet une base de T^*_xM. Les m composantes, dans cette base, d'un élément courant de T^*_xM seront notées $p_1, \dots, p_m$.

Expressions locales (1)

Cartes locales. À chaque carte de M, dont les fonctions coordonnées sont notées $x^1, \ldots, x^m$, sont naturellement associées des cartes de TM, de T^*M et des fibrés deleurs puissances extérieures.

Pour le fibré cotangent : Les valeurs en un point x du domaine de la carte des différentielles dx^i des fonctions coordonnées forment en effet une base de T^*_xM. Les m composantes, dans cette base, d'un élément courant de T^*_xM seront notées $p_1, \ldots, p_m$.

Les $2m$ quantités $x^1, \ldots, x^m$, $p_1, \ldots, p_m$ forment un système de coordonnées dans une carte de T^*M, dite *associée* à la carte considérée de M.

Expressions locales (2)

Pour le fibré tangent. En chaque point x du domaine de la carte de M considérée, la base duale de la base de T^*_xM forée par les $dx^i(x)$ ($1 \leq i \leq m$) est une base de T_xM, notée

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}(x)\right) .$$

Expressions locales (2)

Pour le fibré tangent. En chaque point x du domaine de la carte de M considérée, la base duale de la base de T_x^*M forée par les $dx^i(x)$ ($1 \leq i \leq m$) est une base de T_xM, notée

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(x)\right) .$$

Les composantes dans cette base d'un élément courant de T_xM seront notées $v^1, \dots, v^m$.

Expressions locales (2)

Pour le fibré tangent. En chaque point x du domaine de la carte de M considérée, la base duale de la base de T_x^*M forée par les $dx^i(x)$ ($1 \leq i \leq m$) est une base de T_xM, notée

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(x)\right) .$$

Les composantes dans cette base d'un élément courant de T_xM seront notées $v^1, \dots, v^m$.

Les $2m$ quantités $x^1, \dots, x^m$, $v^1, \dots, v^m$ forment un système de coordonnées dans une carte de TM, dite *associée* à la carte considérée de M.

Expressions locales (2)

Pour le fibré tangent. En chaque point x du domaine de la carte de M considérée, la base duale de la base de T_x^*M forée par les $dx^i(x)$ ($1 \leq i \leq m$) est une base de T_xM, notée

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}(x) \right) .$$

Les composantes dans cette base d'un élément courant de T_xM seront notées $v^1, \ldots, v^m$.

Les $2m$ quantités $x^1, \ldots, x^m$, $v^1, \ldots, v^m$ forment un système de coordonnées dans une carte de TM, dite *associée* à la carte considérée de M.

Les fibrés tangent TM et cotangent T^*M à une variété différentianle M de dimension m sont des variétés différentiables de dimension $2m$.

Expressions locales (3)

Pour les puissances extérieures. Dans le domaine de la carte de M considérée, les formes différentielles de degré p

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots dx^{i_p} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq m\,,$$

forment une base du module des formes différentielles de degré p définies dans ce domaine.

Expressions locales (3)

Pour les puissances extérieures. Dans le domaine de la carte de M considérée, les formes différentielles de degré p

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots dx^{i_p} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq m \,,$$

forment une base du module des formes différentielles de degré p définies dans ce domaine.

On voit ainsi que pour chaque entier p, ($1 \leq p \leq m$), $\bigwedge^p(T^*M)$ est une variété différentiable de dimension $m + \dfrac{m!}{p!(m-p)!}$, et qu'à chaque carte de M est associée une carte de $\bigwedge^p(T^*M)$.

Expressions locales (4)

De même, dans le domaine de la carte de M considérée, les champs de p-multivecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < i_p \leq m$$

forment une base du module des champs de p-multivecteurs défénis dans ce domaine.

Expressions locales (4)

De même, dans le domaine de la carte de M considérée, les champs de p-multivecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < i_p \leq m$$

forment une base du module des champs de p-multivecteurs déféfnis dans ce domaine.

On voit ainsi que pour chaque entier p, ($1 \leq p \leq m$), $\bigwedge^p(TM)$ est une variété différentiable de dimension $m + \dfrac{m!}{p!(m-p)!}$, et qu'à chaque carte de M est associée une carte de $\bigwedge^p(TM)$.

Expression de la différentielle extérieure (1

Différentielle d'une forme de degré 1. Soit α une 1-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \dots, x^m$,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, dx^j \; ;$$

Expression de la différentielle extérieure (1

Différentielle d'une forme de degré 1. Soit α une 1-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1,\dots,x^m$,

$$\alpha=\sum_{j=1}^m \alpha_j\,dx^j\,;$$

Sa différentielle extérieure a pour expression

$$\begin{aligned} d\alpha=\sum_{i=1}^m d\alpha_i\wedge dx^i &= \sum_{1\leq i\,,j\leq m}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}\,dx^i\wedge dx^j \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq m}\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}\right)\,dx^i\wedge dx^j \end{aligned} \tag{2}$$

compte tenu de $dx^j\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^j$.

Expression de la différentielle extérieure (2

Différentielle d'une forme de degré 2. Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \ldots, x^m$,

$$\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \omega_{j\,k}\, dx^j \wedge dx^k\,;$$

Expression de la différentielle extérieure (2

Différentielle d'une forme de degré 2. Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \ldots, x^m$,

$$\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \omega_{j\,k}\, dx^j \wedge dx^k\,;$$

Sa différentielle extérieure a pour expression

$$d\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq m} d\omega_{j\,k} \wedge dx^j \wedge dx^k = \sum_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j < k \leq m} \frac{\partial \omega_{j\,k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx$$

$$= \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \left(\frac{\partial \omega_{j\,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{k\,i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{i\,j}}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

compte tenu de $\omega_{j\,i} = -\omega_{i\,j}$ et de $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$.

Expression d'une 2-forme fermée

Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \ldots, x^m$,

$$\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \omega_{j\,k}\, dx^j \wedge dx^k\,;$$

Expression d'une 2-forme fermée

Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \ldots, x^m$,

$$\omega = \sum_{1\leq j<k\leq m} \omega_{j\,k}\, dx^j \wedge dx^k\,;$$

Cette forme est fermée si et seulement si, pour tous $(i,\,j,\,k)$, $1 \leq i < j < k \leq m$,

$$\frac{\partial \omega_{j\,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{k\,i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{i\,j}}{\partial x^k} = 0\,.$$

Expression d'une 2-forme fermée

Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1, \ldots, x^m$,

$$\omega = \sum_{1\leq j<k\leq m} \omega_{j\,k}\, dx^j \wedge dx^k\,;$$

Cette forme est fermée si et seulement si, pour tous $(i,\, j,\, k)$, $1 \leq i < j < k \leq m$,

$$\frac{\partial \omega_{j\,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{k\,i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{i\,j}}{\partial x^k} = 0\,.$$

En particulier, une 2-forme dont les composantes (dans des cartes bien choisies) sont des constantes est fermée.

Changements de carte (1)

Soit M une variété différentiable, $(x^1, \ldots, x^m)$ et $(y^1, \ldots, y^m)$ les coordonnées locales dans deux cartes dont les domaines U et V ont une intersection non vide.

Formules pour la variété N :

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^m) \quad \text{et inversement} \quad x^i = x^i(y^1, \ldots, y^m)\,,$$

Changements de carte (1)

Soit M une variété différentiable, $(x^1, \dots, x^m)$ et $(y^1, \dots, y^m)$ les coordonnées locales dans deux cartes dont les domaines U et V ont une intersection non vide.

Formules pour la variété N :

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^m) \quad \text{et inversement} \quad x^i = x^i(y^1, \dots, y^m)\,,$$

Formules pour le fibré tangent : Si $(x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m)$ et $(y^1, \dots, y^m, w^1, \dots, w^m)$ sont les coordonnés locales dans les cartes associées de TM :

$$w^i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} v^k\,, \quad \text{et inversement} \quad v^i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} w^k\,.$$

Changements de carte (2)

Formules pour le fibré cotangent : Si $(x^1, \ldots, x^m, p_1, \ldots, p_m)$ et $(y^1, \ldots, y^m, q_1, \ldots, q_m)$ sont les coordonnées locales dans les cartes associées de T^*M, on a

$$p_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} q_k \,, \quad \text{et inversement} \quad q_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} p_k \,.$$

Changements de carte (2)

Formules pour le fibré cotangent : Si $(x^1, \ldots, x^m, p_1, \ldots, p_m)$ et $(y^1, \ldots, y^m, q_1, \ldots, q_m)$ sont les coordonnées locales dans les cartes associées de T^*M, on a

$$p_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} q_k \,, \quad \text{et inversement} \quad q_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} p_k \,.$$

Ces formules résultent immédiatement de

$$dy^i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\, dx^k \,, \quad \text{par dualité} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\, \frac{\partial}{\partial y^k} \,,$$

et des formules réciproques obtebues en échangeant les rôles des x^i et des y^j.

La forme de Liouville (1)

Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η (parfois η_N), ainsi définie :

$$\left\langle \eta(\xi), \zeta \right\rangle = \left\langle \xi, T\pi_N(\zeta) \right\rangle .$$

$$\xi \in T^*N \, , \; x = \pi_N(\xi) \in N \, , \; \zeta \in T_\xi(T^*N) \, , \; T\pi_N(\zeta) \in T_xN \, .$$

La forme de Liouville (1)

Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η (parfois η_N), ainsi définie :

$$\left\langle \eta(\xi), \zeta \right\rangle = \left\langle \xi, T\pi_N(\zeta) \right\rangle .$$

$$\xi \in T^*N\,,\ x = \pi_N(\xi) \in N\,,\ \zeta \in T_\xi(T^*N)\,,\ T\pi_N(\zeta) \in T_xN\,.$$

$$\begin{tikzcd}
T(T^*N) \arrow[r, "T\pi_N"] \arrow[d, "\tau_{T^*N}"'] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\
T^*N \arrow[r, "\pi_N"] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\zeta \arrow[r, mapsto, "T\pi_N"] \arrow[d, mapsto, "\tau_{T^*N}"'] & T\pi_N(\zeta) \arrow[d, mapsto, "\tau_N"] \\
\xi \arrow[r, mapsto, "\pi_N"] & x
\end{tikzcd}$$

La forme de Liouville (2)

Expression en coordonnées locales : Soient $(x^1, \dots, x^n)$ les coordonnées locales dans une carte de N et $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*N.

La forme de Liouville (2)

Expression en coordonnées locales : Soient $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées locales dans une carte de N et $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*N.

La forme de Liouville a pour expression locale

$$\eta_N = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx^i \, .$$

La forme de Liouville (2)

Expression en coordonnées locales : Soient $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées locales dans une carte de N et $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*N.

La forme de Liouville a pour expression locale

$$\eta_N = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx^i \, .$$

Elle prend une valeur nulle lorsqu'on l'applique à un vecteur vertical (dont la projection sur N est nulle) ; son expression locale ne comporte pas de terme en dp_i. On dit qu'elle est *semi-basique*.

La forme symplectique du fibré cotangent

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \ .$$

La forme symplectique du fibré cotangent

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \,.$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

La forme symplectique du fibré cotangent

Définition On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N \,.$$

Expression en coordonnées locales :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,.$$

Elle est fermée car $d \circ d = 0$, ce que confirme son expression locale puisque ses composantes sont des constantes.

Le théorème de Darboux

Théorème de Darboux Soit (M, ω) une variété symplectique connexe. La dimension de cette variété est nécessairement paire ; notons la $2n$. Tout point de M possède un voisinage ouvert qui est le domaine d'une carte dont les coordonnées locales, notées $(x^1, \ldots, x^{2n})$, sont telles que la forme ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \,.$$

Une telle carte est dite *canonique*, ou *de Darboux*.

Le théorème de Darboux

Théorème de Darboux Soit (M, ω) une variété symplectique connexe. La dimension de cette variété est nécessairement paire ; notons la $2n$. Tout point de M possède un voisinage ouvert qui est le domaine d'une carte dont les coordonnées locales, notées $(x^1, \ldots, x^{2n})$, sont telles que la forme ω ait pour expression

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i \, .$$

Une telle carte est dite *canonique*, ou *de Darboux*.
Ce théorème montre que localement, au voisinage de chacun de ses points, une variété symplectiqu est isomorphe à un fibré cotangent.

Produits scalaires

Il montre aussi que *deux variétés symplectique de même dimension sont localement isomorphes*.

Produits scalaires

Il montre aussi que *deux variétés symplectique de même dimension sont localement isomorphes*.

Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un "produit scalaire" : pour tout point $x \in M$,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \quad (v, w) \mapsto \omega(x)(v, w) \, .$$

Produits scalaires

Il montre aussi que *deux variétés symplectique de même dimension sont localement isomorphes*.

Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \quad (v, w) \mapsto \omega(x)(v, w)\,.$$

Ce produit scalaire est *antisymétrique*, alors que si g est une métrique pseudo-riemannienne sur M,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \quad (v, w) \mapsto g(x)(v, w)$$

est *symétrique*.

Produits scalaires

Il montre aussi que *deux variétés symplectique de même dimension sont localement isomorphes*.

Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un “produit scalaire” : pour tout point $x \in M$,

$$T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto \omega(x)(v, w) \,.$$

Ce produit scalaire est *antisymétrique*, alors que si g est une métrique pseudo-riemannienne sur M,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto g(x)(v, w)$$

est *symétrique*.

Et surtout, le théorème de Darboux montre que qu'il n'existe pas, pour les structures symplectiques, d'équivalent de la *signature* des structures pseudo-riemanniennes.

omorphisme des fibrés tangent et cotangen

Une structure symplectique ω sur M détermine un isomorphisme, noté $\omega^\flat$, de TM sur T^*M :

$$x \in M\,, \quad v \in T_xM\,, \quad \omega^\flat(v) == -i(v)\big(\omega(x)\big) \in T^*_xM\,.$$

omorphisme des fibrés tangent et cotangen

Une structure symplectique ω sur M détermine un isomorphisme, noté $\omega^\flat$, de TM sur T^*M :

$$x \in M\,, \quad v \in T_xM\,, \quad \omega^\flat(v) == -i(v)\bigl(\omega(x)\bigr) \in T_x^*M\,.$$

On note aussi $\omega^\flat$ l'isomorphisme du module des champs de vecteurs sur le module des 1-formes différentielles sur M :

$$V \in A^1(M)\,, \quad \omega^\flat(V) = -i(V)\omega \in \Omega^1(M)\,.$$

omorphisme des fibrés tangent et cotangen

Une structure symplectique ω sur M détermine un isomorphisme, noté $\omega^\flat$, de TM sur T^*M :

$$x \in M\,, \quad v \in T_xM\,, \quad \omega^\flat(v) == -i(v)\bigl(\omega(x)\bigr) \in T_x^*M\,.$$

On note aussi $\omega^\flat$ l'isomorphisme du module des champs de vecteurs sur le module des 1-formes différentielles sur M :

$$V \in A^1(M)\,, \quad \omega^\flat(V) = -i(V)\omega \in \Omega^1(M)\,.$$

On notera $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ l'isomorphisme inverse de $\omega^\flat$, et on notera aussi $\Lambda^\sharp$ l'isomorphisme correspondant de $\Omega^1(M)$ sur $A^1(M)$.

Structure de Poisson associée

L'isomorphisme $\omega^\flat : TM \to T^*M$ et son inverse $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ se prolongent aux puissances extérieures de T^*M et de TM, donc aussi aux algèbres extérieures des formes différentielles et des multivecteurs sur M. En particulier

$$\Lambda^\sharp(\omega) = \Lambda$$

est un champ de bivecteurs sur M, appelé *structure de Poisson* associée à la structure symplectique ω.

Structure de Poisson associée

L'isomorphisme $\omega^\flat : TM \to T^*M$ et son inverse $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ se prolongent aux puissances extérieures de T^*M et de TM, donc aussi aux algèbres extérieures des formes différentielles et des multivecteurs sur M. En particulier

$$\Lambda^\sharp(\omega) = \Lambda$$

est un champ de bivecteurs sur M, appelé *structure de Poisson* associée à la structure symplectique ω.

Dans une carte de Darboux de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i \,, \qquad \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} \,.$$

Structure de Poisson associée (2)

Quelques formules :

$$\zeta \text{ et } \xi \in \Omega^1(M)\,, \quad \Lambda(\zeta,\xi) = \langle \xi, \Lambda^\sharp \zeta \rangle\,.$$

Structure de Poisson associée (2)

Quelques formules :

$$\zeta \text{ et } \xi \in \Omega^1(M)\,, \quad \Lambda(\zeta,\xi) = \langle \xi, \Lambda^\sharp \zeta\rangle\,.$$

$$V \text{ et } W \in A^1(M)\,, \quad \omega(V,W) = \langle \omega^\flat W, V\rangle\,.$$

Structure de Poisson associée (2)

Quelques formules :

$$\zeta \text{ et } \xi \in \Omega^1(M)\,, \quad \Lambda(\zeta,\xi) = \langle \xi, \Lambda^\sharp \zeta \rangle\,.$$

$$V \text{ et } W \in A^1(M)\,, \quad \omega(V,W) = \langle \omega^\flat W, V \rangle\,.$$

Propriété importante La propriété

$$d\omega = 0$$

a pour conséquence

$$[\Lambda, \Lambda] = 0\,,$$

où le crochet figurant dans la formule ci-dessus est le *crochet de Schouten-Nijenhuis*.

Le crochet de Poisson

Si f et g sont deux fonctions différentiables définies sur la variété symplectique (M, ω), la fonction

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) = \omega\big(\Lambda^\sharp(df)\Lambda^\sharp(dg)\big)$$

est appelée *crochet de Poisson* de f et de g.

Le crochet de Poisson

Si f et g sont deux fonctions différentiables définies sur la variété symplectique (M,ω), la fonction

$$\{f,g\} = \Lambda(df,dg) = \omega\big(\Lambda^\sharp(df)\Lambda^\sharp(dg)\big)$$

est appelée *crochet de Poisson* de f et de g.

Antisymétrie

$$\{g,f\} = -\{f,g\}\,.$$

Le crochet de Poisson

Si f et g sont deux fonctions différentiables définies sur la variété symplectique (M, ω), la fonction

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) = \omega\big(\Lambda^\sharp(df)\Lambda^\sharp(dg)\big)$$

est appelée *crochet de Poisson* de f et de g.

Antisymétrie

$$\{g, f\} = -\{f, g\}\,.$$

Identité de Jacobi

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0\,.$$

Le crochet de Poisson fait de l'espace des fonctions différentiables sur une variété symplectique une *algèbre de Lie*.

Champs de vecteurs hamiltoniens

Définition Le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à une fonction fonction différentiable f sur la variété symplectique (M, ω), noté X_f, est

$$X_f = \Lambda^\sharp(df)\,.$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Définition Le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à une fonction fonction différentiable f sur la variété symplectique (M, ω), noté X_f, est

$$X_f = \Lambda^\sharp(df)\,.$$

Quelques proprétés Soient f et g deux fonctions différentiables sur (M, ω). On a

$$i(X_f)\omega = -df\,; \quad \{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = \langle dg, X_f \rangle = \Lambda(df, dg)\,.$$

Champs de vecteurs hamiltoniens

Définition Le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à une fonction fonction différentiable f sur la variété symplectique (M, ω), noté X_f, est

$$X_f = \Lambda^\sharp(df)\,.$$

Quelques proprétés Soient f et g deux fonctions différentiables sur (M, ω). On a

$$i(X_f)\omega = -df\,; \quad \{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = \langle dg, X_f\rangle = \Lambda(df, dg)\,.$$

$f \mapsto X_f$ est un *homomorphisme d'algèbres de Lie* de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ muni du crochet de Poisson, dans $A^1(M)$ muni du crochet de Lie,

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}\,.$$

Equation de Hamilton

On sait que chaque champ de vecteurs X défini sur une variété différentiable M détermine une équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(\varphi(t)\bigr)\,,$$

dont les solutions sont les courbes paramétrées différentiables $\varphi : I \to M$, définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dont la dérivée en chaque point $t \in I$ est égale à la valeur de X au point $\varphi(t)$.

Equation de Hamilton

On sait que chaque champ de vecteurs X défini sur une variété différentiable M détermine une équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\big(\varphi(t)\big)\,,$$

dont les solutions sont les courbes paramétrées différentiables $\varphi : I \to M$, définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dont la dérivée en chaque point $t \in I$ est égale à la valeur de X au point $\varphi(t)$.

Sur une variété symplectique (M, ω), l'équation différentielle déterminée par le champ de vecteurs hamiltonien X_f associé à une fonction f est appelée *équation de Hamilton* associée à f, et la fonction f est appelée *hamiltonien* ou *fonction de Hamilton*.

Equation de Hamilton (2)

Soit $\varphi : I \to M$ une solution de l'équation de Hamilton, de hamiltonien f,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X_f\big(\varphi(t)\big)\,.$$

Equation de Hamilton (2)

Soit $\varphi : I \to M$ une solution de l'équation de Hamilton, de hamiltonien f,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X_f\big(\varphi(t)\big)\,.$$

La dérivée d'une autre fonction différentiable g le long d'une courbe intégrale φ de X_f s'exprime au moyen du crochet de Poisson $\{f, g\}$:

$$\frac{d\big(g \circ \varphi(t)\big)}{dt} = \Big\langle dg\big(\varphi(t)\big), X_f\big(\varphi(t)\big)\Big\rangle = \{f, g\}\big(\varphi(t)\big)\,.$$

Intégrales premières

Définition Une *intégrale première* de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\big(\varphi(t)\big)$$

est une fonction g qui garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale de cette équation.

Intégrales premières

Définition Une *intégrale première* de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(\varphi(t)\bigr)$$

est une fonction g qui garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale de cette équation.

Cas d'un champ hamiltonien Une fonction différentiable g définie sur la variété symplectique (M, ω) est intégrale première de l'équation de Hamilton associée au hamiltonien f si et seulement si

$$\{f, g\} = 0\,.$$

On dit alors que les fonctions f et g sont *en involution*.

Intégrales premières (2)

Théorème de l'énergie Sur une variété symplectique (M, ω), un hamiltonien f (indépendant du temps) est intégrale première du champ hamiltonien associé X_f.

Cela résulte immédiatement de $\{f, f\} = 0$, vu l'antisymétrie du crochet de Poisson.

Intégrales premières (2)

Théorème de l'énergie Sur une variété symplectique (M, ω), un hamiltonien f (indépendant du temps) est intégrale première du champ hamiltonien associé X_f.

Cela résulte immédiatement de $\{f, f\} = 0$, vu l'antisymétrie du crochet de Poisson.

Théorème de Poisson Le crochet de Poisson de deux intégrales premières du champ de vecteurs hamiltonien X_f est une intégrale première.

C'est une conséquence immédiate de l'identité de Jacobi

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0\,.$$

Expressions locales

L'expression de l'équation de Hamilton associée à la fonction f, au moyen des coordonnées locales $x^1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ dans une carte de Darboux de (M, ω), est

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \{f, x^i\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\,, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \{f, p_i\} = -\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

Expressions locales

L'expression de l'équation de Hamilton associée à la fonction f, au moyen des coordonnées locales $x^1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ dans une carte de Darboux de (M, ω), est

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \{f, x^i\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\,, \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = \{f, p_i\} = -\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

L'expression du crochet de Poisson de deux fonctions f et g est

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) .$$

Le flot d'un champ de vecteurs (1)

Le *flot* d'un champ de vecteurs différentialble X sur une variété différentiable M, est une application $\Phi_X : \Omega_X \longrightarrow M$, définie sur un ouvert Ω_X de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M, telle que

Le flot d'un champ de vecteurs (1)

Le *flot* d'un champ de vecteurs différentialble X sur une variété différentiable M, est une application $\Phi_X : \Omega_X \to M$, définie sur un ouvert Ω_X de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M, telle que

- pour tout $x \in M$, $\left\{t \in \mathbb{R}; (t, x) \in \Omega_X\right\}$ est l'intervalle ouvert (toujours non vide car contenant 0) sur lequel est définie la courbe intégrale maximale de X passant par x pour $t = 0$, et

$$\Phi_X(0, x) = x\,.$$

Le flot d'un champ de vecteurs (1)

Le *flot* d'un champ de vecteurs différentialble X sur une variété différentiable M, est une application $\Phi_X : \Omega_X \to M$, définie sur un ouvert Ω_X de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M, telle que

- pour tout $x \in M$, $\bigl\{t \in \mathbb{R}; (t,x) \in \Omega_X\bigr\}$ est l'intervalle ouvert (toujours non vide car contenant 0) sur lequel est définie la courbe intégrale maximale de X passant par x pour $t = 0$, et
$$\Phi_X(0,x) = x\,.$$
- pour tous $(t,x) \in \Omega_X$,
$$\frac{\partial \Phi_X(t,x)}{\partial t} = X\bigl(\Phi_X(t,x)\bigr)\,.$$

Le flot d'un champ de vecteurs (2)

L'application $t \mapsto \Phi_X(t,x)$ est donc la *courbe intégrale maximale* de X passant par le point x pour t=0.

Le flot d'un champ de vecteurs (2)

L'application $t \mapsto \Phi_X(t, x)$ est donc la *courbe intégrale maximale* de X passant par le point x pour t=0.

Propriétés

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_X(t) = \left\{x \in M; (t, x) \in \Omega_X\right\}$ est un ouvert (éventuellement vide) de M, et l'application

$$x \mapsto \Phi_{X\ t}(x) = \Phi_X(t, x)$$

est un difféomorphisme de $D_X(t)$ sur $D_X(-t)$.

Le flot d'un champ de vecteurs (2)

L'application $t \mapsto \Phi_X(t,x)$ est donc la *courbe intégrale maximale* de X passant par le point x pour t=0.

Propriétés

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_X(t) = \left\{x \in M; (t,x) \in \Omega_X\right\}$ est un ouvert (éventuellement vide) de M, et l'application

$$x \mapsto \Phi_{X\ t}(x) = \Phi_X(t,x)$$

est un difféomorphisme de $D_X(t)$ sur $D_X(-t)$.

- $\Phi_{X\ t_1} \circ \Phi_{X\ t_2} = \Phi_{X\ t_2} \circ \Phi_{X\ t_1} = \Phi_{X\ t_1+t_2}$.

Le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

Soit f une fonction différentiable sur la variété symplectique (M, ω) et X_f le champ de vecteurs hamiltonien associé.

Le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

Soit f une fonction différentiable sur la variété symplectique (M, ω) et X_f le champ de vecteurs hamiltonien associé.

Son flot Φ_{X_f} a une importante propriété : *il conserve la forme symplectique*. Cela signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme $\Phi_{X_f\ t}$ conserve la forme symplectique ω. On dit que c'est un *symplectomorphisme*.

$$\Phi^*_{X_f\ t}\omega = \omega\,.$$

Le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

Soit f une fonction différentiable sur la variété symplectique (M, ω) et X_f le champ de vecteurs hamiltonien associé.

Son flot Φ_{X_f} a une importante propriété : *il conserve la forme symplectique*. Cela signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme $\Phi_{X_f\ t}$ conserve la forme symplectique ω. On dit que c'est un *symplectomorphisme*.

$$\Phi^*_{X_f\ t}\omega = \omega\,.$$

Cette propriété (exprimée dans un autre langage) a été découverte par Joseph Louis Lagrange au début du XIXème siècle.

Aperçu historique

Origine du mot “symplectique”

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l’entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* [16]. Il vient d’une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

Aperçu historique

Origine du mot “symplectique”

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l’entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* [16]. Il vient d’une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

Première apparition des structures symplectiques La notion de structure symplectique est apparue pour la première fois dans les travaux de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), d’abord lors de son étude de la variation lente des éléments orbitaux des planètes du système solaire, puis en toute généralité, comme une structure fondamentale existant sur l’ensemble des mouvements d’un système mécanique.

Éléments orbitaux des planètes (1)

On sait qu'en première (et très bonne) approximation, chaque planète du système solaire parcourt une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, suivant une loi horaire bien déterminée, la loi des aires : l'aire balayée par le segment de droite joignant la planète au Soleil est une fonction linéaire du temps. Ce sont les deux premières lois découvertes par l'astronome et mathématicien Johannes Kepler (1571–1630). Dans cette approximation, la connaissance des *éléments orbitaux* de la planète suffit pour déterminer la position de celle-ci dans l'espace, à tout instant, passé, présent ou futur.

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,

Éléments orbitaux des planètes (2)

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

- deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
- deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
- un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,
- un dernier pour déterminer la position de la planète sur son orbite. Par exemple, sa position qu'elle occupe à une date choisie pour origine du temps.

Éléments orbitaux des planètes (3)

Dans l'approximation keplérienne, la connaissance de la position de la planète à un instant particulier, par exemple l'instant choisi pour origine du temps, et celle des autres éléments orbitaux, suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C'est la troisième loi de Kepler : le carré de la période du mouvement d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Éléments orbitaux des planètes (3)

Dans l’approximation keplérienne, la connaissance de la position de la planète à un instant particulier, par exemple l’instant choisi pour origine du temps, et celle des autres éléments orbitaux, suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C’est la troisième loi de Kepler : le carré de la période du mouvement d’une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l’ensemble des mouvements possibles d’une planète autour du Soleil est, dans l’approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

On peut effectivement montrer, de manière parfaitement rigoureuse, ainsi que l'a fait par exemple Souriau [14] que dans l'approximation keplérienne, cet ensemble est bien une variété différentiable, la *variété des mouvements* de la planète.

Éléments orbitaux des planètes (4)

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

On peut effectivement montrer, de manière parfaitement rigoureuse, ainsi que l'a fait par exemple Souriau [14] que dans l'approximation keplérienne, cet ensemble est bien une variété différentiable, la *variété des mouvements* de la planète.

On peut même (moyennant une opération appelée *régularisation des collisions*) éviter d'avoir à exclure les mouvements singuliers dans lesquels la planète entre en collision avec le Soleil ; mais alors la variété des mouvements n'est plus nécessairement séparée.

Au delà de l'approximation keplérienne (1)

Il était d'ailleurs facile de voir que cette variété était nécessairement de dimension 6, car le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Au delà de l'approximation keplérienne (1)

Il était d'ailleurs facile de voir que cette variété était nécessairement de dimension 6, car le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

Ce n'est qu'en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n'interagit gravitationnellement qu'avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

Au delà de l'approximation keplérienne (2)

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

Au delà de l'approximation keplérienne (2)

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

Pour en tenir compte, Lagrange a imaginé la *méthode de variation des constantes*.

Lagrange et Poisson : chronologie

1773 : Laplace, Mémoire lu à l'Académie des Sciences (grand axe)

1776, 1781, 1782, . . . : Lagrange, Mémoires de l'Académie de Berlin

20 juin 1808 : Poisson, *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*.

22 août 1808 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*.

13 mars 1809 : Lagrange, *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*.

Lagrange et Poisson : chronologie (suite)

16 octobre 1809 : Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*.

19 février 1810 : Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*.

15 janvier 1835 : Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*.

1831 ou 1837 : Cauchy, Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Il a cherché quelles sont les équations différentielles qui régissent cette variation [8]. Il a compris la portée très générale de ce procédé, qu'il a nommé *méthode de variation des constantes*.

Méthode de variation des constantes

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Il a cherché quelles sont les équations différentielles qui régissent cette variation [8]. Il a compris la portée très générale de ce procédé, qu'il a nommé *méthode de variation des constantes*.

Son mémoire lu à l'Académie des Sciences le 13 mars 1809 [9] présente cette méthode pour un système mécanique général.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (1)

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots)\,,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (1)

Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \ldots, r', s', u' \ldots) ,$$

où r, s, u, $\ldots$ sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Les quantités r', s', u', $\ldots$, sont les dérivées de r, s, u, par rapport au temps t :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad , \ldots$$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (2)

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (2)

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

La solution générale du système formé par ces n équations du second ordre dépend du temps t et de $2n$ constantes d'intégration, que Lagrange note a, b, c, f, g, h, $\ldots$.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (3)

Cette solution générale est de la forme

$$r = r(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad s = s(t, a, b, c, f, g, h, \ldots), \quad u = \ldots.$$

Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, les $2n$ constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont les *éléments orbitaux*.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (4)

Puis Lagrange suppose que le potentiel V ne décrit les forces qui s'exercent sur le système mécanique qu'en première approximation, et qu'il doit, dans les équations du mouvement, être remplacé par $V-\Omega$, où Ω est une fonction de r, s, u, $\ldots$, et aussi du temps t. Dans l'exemple du mouvement d'une planète, Ω traduit les interactions gravitationnelles entre les planètes qui étaient auparavant négligées. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial \Omega}{\partial r}\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Le mémoire de Lagrange de 1809 (5)

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \dots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\dots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \dots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \dots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\dots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Le mémoire de Lagrange de 1809 (5)

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \ldots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\ldots$. La fonction

$$(t, a, b, c, f, g, h, \ldots) \mapsto r(t, a, b, c, f, g, h \ldots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\ldots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Il reste à déterminer les $2n$ fonctions du temps $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$, $\ldots$, qui bien entendu dépendront, outre du temps t, de $2n$ constantes arbitraires.

Les parenthèses de Lagrange (1)

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), $b, c)$, (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Les parenthèses de Lagrange (1)

Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a, b), (a, c), (a, f), $b, c)$, (b, f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Celles-ci s'expriment au moyen des constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$, et ne dépendent ni du temps t, ni des forces additionnelles agissant sur le système, représentées par Ω.

Les parenthèses de Lagrange (2)

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Les parenthèses de Lagrange (2)

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Précisons bien qu'il s'agit ici du système mécanique dont l'énergie cinétique est T et dont les forces appliquées dérivent du potentiel V : les forces additionnelles représentées par Ω n'entrent pas dans leurs expressions.

Les parenthèses de Lagrange (3)

L'expression des parenthèses (a, b), (a, c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a, b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Les parenthèses de Lagrange (3)

L'expression des parenthèses (a,b), (a,c), $\ldots$ initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\,.$$

Nous avons posé, comme le feront Hamilton [2,3] et Cauchy [1] environ 30 ans plus tard :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'}\,,\quad p_s = \frac{\partial T}{\partial s'}\,,\quad p_u = \frac{\partial T}{\partial u'}\,.$$

Lagrange utilisait les notations moins parlantes T', T'' et T''' au lieu de p_r, p_s et p_u.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système.

Les parenthèses de Lagrange (4)

Rappelons que r, s, u, $\ldots$ sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r, s, u, \ldots, r', s', u', \ldots) \mapsto (r, s, u, \ldots, p_r, p_s, p_u, \ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système. Dans le cas le plus souvent rencontré, qui était celui considéré par Lagrange, où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive, cette application est un difféomorphisme.

Les parenthèses de Lagrange (5)

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont donnés.

Les parenthèses de Lagrange (5)

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont donnés.

Réciproquement, le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles (attribué à Cauchy et Lipschitz, mais que Lagrange considérait comme allant de soi) montre que la connaissance de r, s, u, $\ldots$, r', s', u', $\ldots$, à un instant fixé quelconque t, détermine complètement le mouvement, donc détermine a, b, c, f, g, h, $\ldots$

Les parenthèses de Lagrange (6)

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u, \ldots, r',\ s',\ u', \ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

Les parenthèses de Lagrange (6)

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u, \ldots, r',\ s',\ u', \ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

En composant ce difféomorphisme avec la transformation de Legendre, nous voyons que, pour chaque instant t fixé,

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

(où il faut comprendre que r, s, u, p_r, p_s, p_u désignent les valeurs prises par ces grandeurs à l'instant t considéré) est un difféomorphisme.

Les parenthèses de Lagrange (7)

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\dots) \mapsto (r,\ s,\ u,\dots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\dots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\ .$$

Les parenthèses de Lagrange (7)

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Remarque importante La parenthèse de Lagrange (a,b) n'a de sens que lorsqu'on a choisi, non seulement les deux fonctions a et b sur la variété des mouvements, mais aussi toutes les autres c, f, g, h, $\ldots$, formant un système de coordonnées loales sur cette variété. En d'autres termes, (a,b) ne dépend pas que de a et de b, mais aussi de c, f, g, h, $\ldots$. C'est une fonction sur la variété des mouvements.

Les parenthèses de Lagrange (8)

En utilisant les concepts et notations du calcul différentiel extérieur (dont Lagrange ne disposait malheureusement pas, puisqu'ils ont été développés au XX-ème siècle par Élie Cartan), il est facile de vérifier que les parenthèses de Lagrange sont bien, au signe près, les composantes, dans la carte de l'espace des mouvements de coordonnées locales a, b, c, f, g, h, $\ldots$, de la forme symplectique image réciproque, par le difféomorphisme

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h, \ldots) \mapsto (r,\ s,\ u, \ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u, \ldots)$$

de la forme symplectique canonique du fibré cotangent à la variété de configuration.

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
(a,b)\,da\wedge db + (a,c)\,da\wedge dc + \cdots + (b,c)\,db\wedge dc + \cdots \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial a}da + \frac{\partial r}{\partial b}db + \cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da + \frac{\partial p_r}{\partial b}db + \cdots\right)\\
&\quad + \left(\frac{\partial s}{\partial a}da + \frac{\partial s}{\partial b}db + \cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da + \frac{\partial p_s}{\partial b}db + \cdots\right)\\
&\quad + \ldots\\
&= dr\wedge dp_r + ds\wedge dp_s + du\wedge dp_u + \cdots\,.
\end{aligned}
$$

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\ldots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

Les parenthèses de Lagrange (9)

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\ldots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots\,.
\end{aligned}
$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

En prouvant que ses parenthèses ne dépendent pas directement du temps, Lagrange a, du même coup, prouvé que le flot du champ de vecteurs d'évolution, sur l'espace des phases, conserve la forme symplectique canonique.

Les formules de variation des constantes

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des “constantes qu'on fait varier” a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, aj) \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j'ai noté, pour faciliter l'écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j'ai tenu compte de l'antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

Les formules de variation des constantes

Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des “constantes qu’on fait varier” a, b, $\ldots$, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n}(a_i, aj)\frac{da_j}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_i}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,,$$

où j’ai noté, pour faciliter l’écriture, a_i, $1 \leq i \leq 2n$ au lieu de a, b, c, $\ldots$, et où j’ai tenu compte de l’antisymétrie $(a_j, a_i) = -(a_i, a_j)$.

Lagrange indique qu’en résolvant ce système linéaire, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{i\,j}\frac{\partial\Omega}{\partial a_j}\,, \qquad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Les formules de variation des constantes (2

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

Les formules de variation des constantes (2)

Lagrange explique que les $L_{i\,j}$ sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements.

Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression.

C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui le fera, à peine quelques mois plus tard.

Le mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a, b), (a, c), $\ldots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a, b]$ au lieu de (a, b), $[a, c]$ au lieu de (a, c), $\ldots$.

Le mémoire de Poisson de 1809

Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a, b), (a, c), $\dots$, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a, b]$ au lieu de (a, b), $[a, c]$ au lieu de (a, c), $\dots$.

Nous conserverons la notation (a, b), (a, c), $\dots$, pour les parenthèses de Lagrange et nous utiliserons la notation $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\dots$ pour les crochets de Poisson.

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérés comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

Les crochets de Poisson (1)

L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots .$$

Les crochets $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\ldots$, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements qui sont considérés comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, $\ldots$.

On reconnaît l'expression, en coordonnées de Darboux, du crochet de Poisson de deux fonctions a et b définies sur une variété symplectique.

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots\,.$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\,.$$

Comparaison des crochets de Poisson et des parenthèses de Lagrange

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots\,.$$

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots\,.$$

C'est au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l'espace des phases au temps t sur l'espace des mouvements que s'expriment les crochets de Poisson, alors que les parenthèses de Lagrange s'expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme inverse, de l'espace des mouvements sur l'espace des phases au temps t.

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

ochets de Poisson – parenthèses de Lagran

Conclusion Alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

Les matrices formées, d'une part, par les parenthèses de Lagrange (a, b), (a, c), $\ldots$, d'autre part par les crochets de Poisson $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\ldots$ des fonctions coordonnées a, b, c, $\ldots$ sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre. Ce fait a été clairement indiqué par Augustin Louis Cauchy (1789–1857) dans un mémoire présenté à l'Aacadémie de Turin le 11 octobre 1831 [1], 22 ans après la parution des mémoires de Lagrange et Poisson.

Le théorème de Poisson

Remarque importante Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques a un sens, alors que les parenthèses de Lagrange de deux fonctions différentiables quelconques n'en ont pas : les parenthèses de Lagrange n'ont de sens (comme les dérivées partielles par rapport à certaines variables) que pour une famille de fonctions qui sont les fonctions coordonnées locales dans une carte.

Le théorème de Poisson

Remarque importante Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques a un sens, alors que les parenthèses de Lagrange de deux fonctions différentiables quelconques n'en ont pas : les parenthèses de Lagrange n'ont de sens (comme les dérivées partielles par rapport à certaines variables) que pour une famille de fonctions qui sont les fonctions coordonnées locales dans une carte.

Le théorème de Poisson Deux intégrales premières quelconques peuvent en général être choisies comme deux des coordonnées sur la variété des mouvements. Leur crochet de Poisson, étant une fonction sur cette variété, est aussi une intégrale première. C'est le *théorème de Poisson*.

L'identité de Jacobi

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs.

L'identité de Jacobi

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour les fonctions :

$$\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}=0\,.$$

L'identité de Jacobi

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour les fonctions :

$$\bigl\{f,\{g,h\}\bigr\}+\bigl\{g,\{h,f\}\bigr\}+\bigl\{h,\{f,g\}\bigr\}=0\,.$$

Pour les champs de vecteurs :

$$\bigl[X,[Y,Z]\bigr]+\bigl[Y,[Z,X]\bigr]+\bigl[Z,[X,Y]\bigr]=0\,.$$

L'identité de Jacobi

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour les fonctions :

$$\Big\{f,\{g,h\}\Big\}+\Big\{g,\{h,f\}\Big\}+\Big\{h,\{f,g\}\Big\}=0\,.$$

Pour les champs de vecteurs :

$$\Big[X,[Y,Z]\Big]+\Big[Y,[Z,X]\Big]+\Big[Z,[X,Y]\Big]=0\,.$$

Le *théorème de Poisson* apparaît aujourd'hui comme une conséquence directe de l'identité de Jacobi.

Le mémoire de Lagrange du 19 février 181

Dans ce mémoire, Lagrange revient sur les résultats qu'il avait obtenus dans son premier mémoire. Il utilise les crochets de Poisson pour les exprimer de manière plus simple. Il écrit les équations différentielles qui gouvernent la variation des constantes sous la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Le mémoire de Lagrange du 19 février 181

Dans ce mémoire, Lagrange revient sur les résultats qu'il avait obtenus dans son premier mémoire. Il utilise les crochets de Poisson pour les exprimer de manière plus simple. Il écrit les équations différentielles qui gouvernent la variation des constantes sous la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n \, .$$

Pour faciliter l'écriture j'ai noté a_i, $1 \leq i \leq 2n$, les constantes qu'on fait varier (les coordonnées locales sur la variété des mouvements), au lieu de a, b, c, f, g, h comme le faisait Lagrange.

Le mémoire de Lagrange de 1810 (2)

On remarquera que Lagrange aurait pu écrire ses équations de manière plus simple

$$\frac{da_i}{dt} = \{a_i, \Omega\}, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Le mémoire de Lagrange de 1810 (2)

On remarquera que Lagrange aurait pu écrire ses équations de manière plus simple

$$\frac{da_i}{dt} = \{a_i, \Omega\}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Il ne le fait pas (pas plus, d'ailleurs, que ne l'a fait Poisson dans son mémoire de 1809). Il n'emploie le crochet de Poisson que pour les fonctions coordonnées a_i, pas pour Ω qui pourtant peut parfaitement être considérée comme une fonction définie sur la variété des mouvements (mais dépendant aussi du temps).

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

Cauchy utilise résolument le formalisme hamiltonien. Sa note est très concise (6 pages) et présente, de manière remarquablement claire et dans un langage très proche du langage moderne, l'essentiel des résultats de Lagrange et de Poisson. Cependant, lui non plus n'écrit pas de crochet de Poisson avec la fonction Ω (qu'il note d'ailleurs R).

La note de Cauchy de 1837

Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

Cauchy utilise résolument le formalisme hamiltonien. Sa note est très concise (6 pages) et présente, de manière remarquablement claire et dans un langage très proche du langage moderne, l'essentiel des résultats de Lagrange et de Poisson. Cependant, lui non plus n'écrit pas de crochet de Poisson avec la fonction Ω (qu'il note d'ailleurs R).

Cauchy prouve (sans utiliser le mot *matrice*) que les matrices formées par les parenthèses de Lagrange, et par les crochets de Poisson, des fonctions coordonnées sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre.

Retour sur la variation des constantes (1)

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Retour sur la variation des constantes (1)

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ on considère un système hamiltonien, dont le hamiltonien, dépendant éventuellement du temps, est noté $Q : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (c'est la notation utilisée par Cauchy). Soit M_0 la variété des mouvements et $\Phi : \mathbb{R} \times M_0 \to M$ $(t, a) \mapsto \Phi(t, a)$ le "flot" du champ de vecteurs de hamiltonien Q. Pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\bigl(g \circ \Phi(t, a)\bigr)}{\partial t} = \{Q, g\}\bigl(\Phi(t, a)\bigr) \,.$$

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q+R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_0 \to M_1$, $(t,b) \mapsto a = \Psi(t,b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t,b) \mapsto \Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q+R$.

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q + R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R} \times M_0 \to M_1$, $(t, b) \mapsto a = \Psi(t, b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t, b) \mapsto \Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)$ soit le "flot" du champ de vecteurs de hamiltonien $Q + R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g \circ \Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)\Bigr) = \{Q + R, g\}\Bigl(\Phi\bigl(t, \Psi(t, b)\bigr)\Bigr) .$$

Retour sur la variation des constantes (2)

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q+R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi : \mathbb{R}\times M_0 \to M_1$, $(t,b)\mapsto a=\Psi(t,b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t,b)\mapsto \Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q+R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M\to\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)=\{Q+R,g\}\Bigl(\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\,.$$

Mais pour chaque valeur particulière t_0 de t

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}+\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t_0,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)$$

Retour sur la variation des constantes (3)

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0, b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)$ est le “flot” du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q, g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big).$$

Retour sur la variation des constantes (3)

Puisque, pour t_0 fixé, $\big(t, \Psi(t_0, b)\big) \mapsto \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)$ est le “flot” du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} = \{Q, g\}\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big)\,.$$

Donc le second terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(g \circ \Phi\big(t_0, \Psi(t, b)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} &= \Big(\{Q + R, g\} - \{Q, g\}\Big)\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big) \\ &= \{R, g\}_M\Big(\Phi\big(t_0, \Psi(t_0, b)\big)\Big) \\ &= \{R \circ \Phi_{t_0}, g \circ \Phi_{t_0}\}_{M_0}\big(\Psi(t_0, b)\big)\,,\end{aligned}$$

parce que $\Phi_{t_0} : M_0 \to M$ est de Poisson.

Retour sur la variation des constantes (4)

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Bigl(g_0\bigl(\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)}{dt}\,\Big|_{t=t_0} = \{R \circ \Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\bigl(\Psi(t_0, b)$$

Retour sur la variation des constantes (4)

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Bigl(g_0\bigl(\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)}{dt}\Bigg|_{t=t_0} = \{R\circ\Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\bigl(\Psi(t_0,b)$$

Mais t_0 pouvant être quelconque, cette dernière équation montre que pour tout $b \in M_1$ (variété des mouvements du système de hamiltonien $Q + R$), $t \mapsto \Psi(t,b)$ est une courbe intégrale, sur la variété M_0 des mouvements du système de hamiltonien Q, du champ de vecteurs de hamiltonien (dépendant du temps)

$$(t,a) \mapsto R\bigl(t, \Phi(t,a)\bigr)\,, \quad (t,a) \in \mathbb{R} \times M_0\,.$$

C'est le résultat découvert par Lagrange vers 1808.

Remerciements

Je remercie le Professeur Dominique Flament de m'avoir invité à présenter ce cours à l'Ecole d'été de Brasilia.

Remerciements

Je remercie le Professeur Dominique Flament de m'avoir invité à présenter ce cours à l'Ecole d'été de Brasilia.

Merci également aux personnes qui ont eu la bienveillance et la patience de m'écouter.

Bibliographie (1)

[1] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

[2] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[3] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

Bibliographie (2)

[4] T. Hawkins, *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups*.

[5] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

[6] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, G. Reimer, Berlin, 1881–1891.

[7] J.-L. Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres de Berlin, 1775. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (3)

[8] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Mémoire lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[9] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[10] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

Bibliographie (4)

[11] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par les éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par les éditions Blanchard, Paris.

[12] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.

[13] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

Bibliographie (5)

[14] J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scie nze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.

[15] J.-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 45–54. Numérisé par Numdam, http ://www.numdam.org.

[16] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.