Quelques méthodes géométriques en Mécanique

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie

5 septembre 2013

Introduction

Dans cet exposé je présenterai plusieurs méthodes géomériques en liaison étroite avec la Mécanique.

- **Mouvements d'un système mécanique.** Dans cette partie, je présenterai la découverte, faite par Joseph Louis Lagrange vers 1810, de la structure symplectique de l'ensemble de tous les mouvements possibles d'un système mécanique.
- **Symétries et moment.** Je présenterai la notion de *moment* de l'action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, explicitée en langage moderne par Jean-Marie Souriau, et les liens qui l'unissent aux intégrales premières d'un système mécanique ayant certaines symétries.
- **Équations d'Euler-Poincaré.** Ces équations, pressenties par Leonard Euler, écrites presque dans le langage actuel par Henri Poincaré en 1901, s'obtiennent grâce à l'application moment, sans que le système mécanique considéré soit nécessairement invariant par symétries.

Introduction (2)

- **Mouvement d'un solide et Mécanique des fluides.** Je parlerai dans cette partie de l'analogie très étroite qui existe entre les équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe et les équations du mouvement d'un fluide parfait incompressible. Pressentie par Leonard Euler, cette analogie a été explicité en langage moderne par Vladimir Arnold.
- **Dynamique et et Géométrie.** Je parlerai dans cette partie de la notion de *connexion*, formalisée par Hermann Weyl et surtout par Élie Cartan à partir de l'idée de *transport parallèle* due à Tullio Levi-Civita, généralisée et exprimée en langage moderne par Charles Ehresmann. J'expliquerai comment la notion de connexion peut être employée pour exprimer le *principe de l'inertie* et comment le choix d'une connexion permet de "géométriser" un champ d'accélérations.

Mouvements d'un système mécanique

Mouvements d'un système mécanique (1)

Dans l'Avertissement (préface) placé en tête de son livre "Méchanique analitique", publié en 1788, Joseph Louis Lagrange a écrit :

"On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine".

Les méthodes géométriques sont-elles donc absentes de l'œuvre de Lagrange ? je vais montrer qu'il n'en est rien : elles sont bien présentes, mais à un niveau d'abstraction supérieur. C'est à Lagrange qu'on doit, par exemple, la découverte d'une structure géométrique nouvelle (aujourd'hui appelée *structure symplectique*) sur l'ensemble de tous les mouvements possibles d'un système mécanique.

Mouvements d'un système mécanique (2)

Rappelons la genèse de cette importante découverte. Stimulé par le mémoire de *Siméon Denis Poisson* du 20 juin 1808 intitulé "Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes", Lagrange a repris l'étude, qu'il avait laissée de côté pendant vingt ans, de la variation lente des éléments orbitaux des planètes. Voici comment il traita ce problème.

Dans une première approximation, on néglige les forces attractives exercées par chaque planète sur les autres planètes et sur le Soleil. On sait alors que dans le référentiel du Soleil et des étoiles lointaines, le mouvement de chaque planète est régi par les lois de Kepler : il a lieu sur une ellipse dont le Soleil est un foyer, selon une loi horaire bien déterminée par la loi des aires. Un mouvement possible d'une planète est entièrement décrit par six *éléments orbitaux*, qui dans l'approximation considérée, restent invariables au cours du temps. On peut donc dire que dans cette approximation, l'ensemble de tous les mouvements possibles d'une planète est un espace de dimension 6, qu'on appelera *espace des mouvements*.

Mouvements d'un système mécanique (3)

Les six éléments orbitaux usuels d'une planète peuvent être considérés comme un *système de coordonnées curvilignes* sur l'espace des mouvements. Ce sont :

- l'inclinaison de l'orbite et la position de la ligne des nœuds, qui déterminent le plan de l'orbite ;
- l'excentricité et la direction du vecteur joignant le Soleil au périhélie qui, avec les deux précédents, déterminent l'orbite à une homothétie près ;
- la dimension du grand axe, qui avec les quatre précédents finit de déterminer l'orbite ;
- la position de la planète sur son orbite à une date choisie comme origine du temps.

Neuf points de cet espace, représentant les neuf planètes du système solaire (Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton) restent, dans cette première approximation, immobiles au cours du temps.

Mouvements d'un système mécanique (4)

Lorsqu'on tient compte des forces d'interaction gravitationnelles exercées par chaque planète sur le Soleil et sur les autres planètes, les éléments orbitaux des planètes varient lentement au cours du temps. Les neuf points de l'espace des mouvements représentant les mouvements des neuf planètes du système solaire ne restent plus immobiles : ils se déplacent lentement en fonction du temps.

Lagrange a déterminé les équations différentielles qui régissent le déplacement du point représentant le mouvement d'une planète lorsque les positions occupées par les autres planètes sont des fonctions (supposées connues) du temps. Elles s'écrivent

$$\sum_{j=1}^{6}(a_i, a_j)\frac{da_i(t)}{dt} = \frac{\partial\Omega(a_1, \dots, a_6, t)}{\partial a_i}\,, \quad 1 \leq i \leq 6\,.$$

Les a_i $(1 \leq i \leq 6)$ sont les les éléments orbitaux de la planète considérée. Les (a_i, a_j) et Ω sont, respectivement, la *parenthèse de Lagrange* de a_i et de a_j, et une fonction qui exprime l'attraction exercée sur la planète considérée par les autres planètes.

Mouvements d'un système mécanique (5)

Lagrange a montré que cette méthode pouvait être appliquée à tout système mécanique dont les solutions, dans une première approximation, dépendent d'un certain nombre (toujours pair) de constantes d'intégration $a_1, \ldots, a_{2n}$, lorsque dans une meilleure approximation les quantités $a_1, \ldots, a_{2n}$ deviennent des fonctions du temps qu'on doit déterminer. Il l'a appelée *méthode de variation des constantes*.

Jean-Marie Souriau a donné aux résultats de Lagrange une forme globale : il a montré que l'espace des mouvements de tout système lagrangien est naturellement muni d'une structure de variété différentiable (pas toujours séparée) et d'une forme symplectique naturelle. La parenthèse de Lagrange (a_i, a_j) n'est autre que la (i, j)-ième composante de cette forme symplectique dans le système de coordonnées locales $(a_1, \ldots, a_{2n})$.

Mouvements d'un système mécanique (6)

Les équations différentielles

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, a_j) \frac{da_i(t)}{dt} = \frac{\partial \Omega(a_1, \dots, a_{2n}, t)}{\partial a_i}\,, \quad 1 \leq i \leq 2n$$

ne sont pas sous forme canonique, car elles ne sont pas résolues par rapport aux dérivées $\dfrac{da_i(t)}{dt}$ des fonctions inconnues. Lagrange a bien vu que la matrice $2n \times 2n$ dont les coefficients sont les parenthèses de Lagrange (a_i, a_j) était inversible et qu'on pouvait donc mettre ces équations sous forme canonique, mais dans son premier mémoire sur ce sujet, il ne l'a pas fait explicitement.

C'est *Siméon Denis Poisson* qui, peu de temps après, a comblé cette lacune. L'inverse de la matrice dont les coefficients sont les parenthèses de Lagrange (a_i, a_j) est une matrice dont les coefficients, notés $\{a_i, a_j\}$, sont aujourd'hui appelés *crochet de Poisson* des fonctions a_i et a_j.

Mouvements d'un système mécanique (7)

Dans son dernier mémoire datant de 1810, Lagrange utilise les crochets de Poisson pour écrire ces équations différentielles sous forme canonique

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega(a_1, \ldots, a_{2n}, t)}{\partial a_i}, \quad (1 \leq i \leq 2n).$$

Lagrange aurait pu écrire ces équations sous la forme plus concise

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \{a_i, \Omega\}, \quad (1 \leq i \leq 2n),$$

car on pet définir le crochet de Poisson $\{f, g\}$ de tout couple ordonné de fonctions différentiables f et g définies sur l'espace des mouvements (ou le produit de l'espace des mouvements et de la droite du temps). On voit ainsi que les a_i sont solutions d'un *système hamiltonien* de hamiltonien Ω. Dans son mémoire de 1834, William Rowan Hamilton montrera que l'évolution de tout système mécanique conservatif est régi par des équations de ce type.

Symétries et moment

Symétries et moment (1)

Très souvent l'invariance d'un système mécanique pour certaines symétries a pour conséquence l'existence d'intégrales premières. Par exemple, les grandeurs suivantes sont des intégrales premières :

- l'*énergie totale* d'un système dont le hamiltonien (ou le lagrangien) ne dépend pas du temps ;
- l'*impulsion totale* (ou quantité de mouvement) d'un système invariant par translation dans l'espace ;
- le *moment cinétique*, par rapport à un axe, d'un système invariant par rotation autour de cet axe.

Ces propriétés bien connues des mécaniciens se rattachent à la théorie des actions d'un groupe de Lie sur une variété symplectique, que je vais brièvement présenter.

Symétries et moment (2)

Une *forme symplectique* sur une variété différentiable M est une forme différentielle ω, de degré 2, fermée (c'est-à-dire vérifiant $d\omega = 0$) et partout de rang égal à la dimension de M, qui par suite est nécessairement paire. À toute fonction différentiable f définie sur une variété symplectique (M, ω) on associe le *champ de vecteurs hamiltonien* X_f, tel que

$$i(X_f)\omega = -df\,,$$

et on dit que f est un *hamiltonien* du champ X_f.

Lorsque la fonction f dépend aussi du temps t, on définit le champ de vecteurs hamiltonien X_f (qui est un champ de vecteurs sur M *dépendant du temps t*) par

$$i(X_f)\omega = -d(f_t)\,,$$

où f_t est la fonction, définie sur M, déduite de f en donnant au temps t une valeur fixée.

Symétries et moment (3)

Le *crochet de Poisson* de deux fonctions différentiables f et g définies sur la variété symplectique (M, ω) est défini par l'une des égalités équivalentes

$$\{f, g\} = i(X_f)dg = -i(X_g)df = \omega(X_f, X_g)\,.$$

Lorsque ces fonctions dépendent aussi du temps t, on calcule leur crochet de Poisson en considérant t comme une constante.

Dans le *formalisme hamiltonien*, l'évolution d'un système mécanique est mathématiquement décrite par la donnée d'une *variété symplectique* (M, ω), de dimension $2n$, l'*espace des phases*, et d'une fonction différentiable $H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ (pouvant dépendre du temps t), appelée *hamiltonien* du système. Un *état* du système est représenté par un point $x \in M$, et l'évolution de cet état en fonction du temps t, par une courbe paramétrée $t \mapsto x(t)$. Les *équations de Hamilton*, qui régissent cette évolution, s'écrivent

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_H\bigl(x(t)\bigr)\,.$$

Symétries et moment (4)

On peut aussi écrire les équations de Hamilton sous la forme

$$\frac{df\bigl(x(t)\bigr)}{dt} = \{H, f\}\bigl(x(t)\bigr)\,.$$

où $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable quelconque définie sur M.

En prenant successivement pour f les fonctions $x^1, \ldots, x^{2n}$ formant un système de coordonnées sur M, on obtient

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \{H, x^i\}\bigl(x(t)\bigr)\,, \quad 1 \leq i \leq 2n\,.$$

Au voisinage de chaque point de M, il existe toujours des coordonnées dites *de Darboux* telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i\,.$$

Symétries et moment (5)

En coordonnées de Darboux

$$X_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial x^{n+i}}\,, \quad X_{x^{n+i}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \quad \text{donc}$$

$$\{H, x^i\} = \frac{\partial H}{\partial x^{n+i}}\,, \quad \{H, x^{n+i}\} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}\,,$$

et les équations de Hamilton s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^i(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x^{n+i}}\bigl(x(t)\bigr)\,, \\ \frac{dx^{n+i}(t)}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}\bigl(x(t)\bigr)\,, \end{aligned}\right. \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

Symétries et moment (6)

Supposons maintenant qu'un groupe de Lie G agisse sur la variété M en laissant la forme symplectique ω invariante ; cela veut dire qu'il existe une application $\Phi : G \times M \to M$ ayant les propriétés :

- pour tout $g \in G$, l'application $\Phi_g : M \to M$, $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$, est un difféomorphisme vérifiant $\Phi_g^* \omega = \omega$;
- e étant l'élément neutre, g_1 et g_2 deux éléments quelconques de G,

$$\Phi_e = \mathrm{id}_M \,, \quad \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2} \,.$$

Le *champ fondamental* associé à un élément X de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est le champ de vecteurs X_M sur M défini par

$$X_M(x) = \frac{d}{ds}\Bigl(\Phi\bigl(\exp(sX), x\bigr)\Bigr)\Bigr|_{s=0} \,, \quad x \in M \,.$$

Symétries et moment (7)

L'action $\Phi : G \times M \to M$ est dite *hamiltonienne* si elle laisse ω invarante et si, de plus, le champ fondamental X_M associé à chaque élément $X \in \mathcal{G}$ est hamiltonien.

On appelle *moment* de l'action hamiltonienne Φ une application J, définie sur M et à valeurs dans le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que pour chaque $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M admette la fonction $x \mapsto \langle J(x), X \rangle$ pour hamiltonien, c'est-à-dire vérifie

$$i(X_M)\omega = -d\langle J, X\rangle \,.$$

Le moment d'une action hamiltonienne existe toujours, mais n'est pas unique : on peut lui ajouter une fonction localement constante quelconque.

La notion d'application moment figure implicitement dans les travaux de *Sophus Lie* (1842–1899). *Jean-Marie Souriau* l'a redécouverte et en a fait un usage systématique.

Symétries et moment (8)

L'application moment a de très intéressantes propriétés mathématiques et a été généralisée de diverses manières. En Mécanique, elle est utilisée surtout pour faciliter la résolution de l'équation de Hamilton, grâce au théorème suivant.

Théorème d'Emmy Noether (forme hamiltonienne).
Soit (M, ω) une variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie G agit, par une action hamiltonienne admettant un moment $J : M \to \mathcal{G}^*$. Soit $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien invariant par cette action. Le moment J garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale du champ de vecteurs X_H.

Les intégrales premières *impulsion totale* et *moment cinétique* d'un système mécanique hamiltonien isolé dans l'espace physique sont les composantes du moment de l'action du groupe des déplacements euclidiens (translations et rotations) sur l'espace des phases du système.

Symétries et moment (8)

Réduire un système hamiltonien, c'est ramener sa résolution à celle d'un (ou plusieurs) systèmes plus simples.

Jerrold Marsden et *Alan Weinstein* ont formalisé en termes géométriques, dans un article publié en 1974, une méthode de réduction qu'Euler, Lagrange, Jacobi et d'autres savants avaient employée dans des cas particuliers. Je vais brièvement la décrire.

Les hypothèses étant celles du théorème de Noether, soit $\xi \in \mathcal{G}^*$ une valeur régulère de J ; on sait alors que $J^{-1}(\xi)$ est une sous-variété de M, invariante par le flot de X_H. Sous certaines hypothèses additionnelles souvent vérifiées en pratique, l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que Φ_g applique $J^{-1}(\xi)$ dans lui-même est un sous-groupe fermé G_ξ de G, et le quotient $M_\xi = J^{-1}(\xi)/G_\xi$ est une variété différentiable.

Symétries et moment (9)

On montre alors qu'il existe sur M_ξ une forme symplectique ω_ξ et une fonction différentiable $H_\xi : M_\xi \to \mathbb{R}$ telles que

- la composé de H_ξ et de la projection $M_\xi \to M_\xi/G_\xi$, soit égale à restriction de H à M_ξ,
- la projection sur M_ξ des courbes intégrales de X_H contenues dans $J^{-1}(\xi)$ soient les courbes intégrales du champ de vecteurs de hamiltonien H_ξ, sur la variété symplectique (M_ξ, ω_ξ).

On dit alors que (M_ξ, ω_ξ) est la *variété symplectique réduite* et H_ξ le *hamiltonien réduit* pour la valeur ξ de l'application moment.

Équation d'Euler-Poincaré

Équation d'Euler-Poincaré (1)

Les équations du mouvement d'un corps rigide établies par *Euler* offrent un autre exemple de réduction, qui ne se rattache pas au procédé décrit par Marsden en Weinstein. C'est *Henri Poincaré* qui, dans une Note aux Comptes rendus publiée en 1901 intitulée "Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique", a le premier formalisé le procédé de réduction auquel se rattache cet exemple. Je vais brièvement présenter ce procédé dans le formalisme hamiltonien (Poincaré utilise le formalisme lagrangien).

Comme dans les hypothèses du théorème de Noether, (M, ω) est une variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie G agit, par une action hamiltonienne, admettant un moment $J : M \to \mathcal{G}^*$. Contrairement à ce que l'on fait lorsqu'on applique le procédé de Marsden et Weinstein, on ne suppose plus le hamiltonien H invariant par l'action du groupe G, mais on suppose que pour chaque $\xi \in \mathcal{G}^*$, H garde une valeur constante sur $J^{-1}(\xi)$, et même qu'il existe sur $\mathcal{G}^*$ une fonction différentiable $H_{\mathcal{G}^*}$ telle que

$$H = H_{\mathcal{G}^*} \circ J \,.$$

Équation d'Euler-Poincaré (2)

On montre alors que si la courbe paramétrée dans M

$$t \mapsto x(t)$$

est une courbe intégrale du système de hamiltonien H, sa projection sur $\mathcal{G}^*$ par l'application moment

$$t \mapsto \xi(t) = J\bigl(x(t)\bigr)$$

est une courbe intégrale d'un système hamiltonien (en sens généralisé) sur $\mathcal{G}^*$, ayant pour hamiltonien (généralisé) $H_{\mathcal{G}^*}$. L'équation différentielle correspondante est l'*équation d'Euler-Poincaré* (dans le formalisme hamiltonien). Elle s'écrit, $f : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ étant une fonction différentiable quelconque,

$$\frac{df\bigl(\xi(t)\bigr]}{dt} = \{H_{\mathcal{G}^*}, f\}\bigl(\xi(t)\bigr)\,.$$

Équation d'Euler-Poincaré (3)

Remarques

1. L'espace tangent en un point $x \in M$ à l'orbite de ce point et le noyau de T_xJ sont deux sous-espaces vecoriels symplectiquement orthogonaux de $\bigl(T_xM, \omega(x)\bigr)$. Les procédures de réduction de Marsden et Weinstein d'une part, d'Euler-Poincaré d'autre part, s'appliquent lorsque, pour tout $x \in M$, $dH(x)$ s'annule, respectivement, sur l'espace tangent à l'orbite de x, et sur son orthogonal symplectique, le noyau de T_xJ.

2. La dimension de $\mathcal{G}^*$ est souvent inférieure à celle de M ; de plus, sur l'espace vectoriel $\mathcal{G}^*$ on peut utiliser une carte globale. C'est pourquoi la recherche des courbes intégrales de l'équation d'Euler-Poincaré sur $\mathcal{G}^*$ est souvent plus facile que celle des courbes intégrales de l'équation de Hamilton sur M.

3. Le dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ n'est pas une variété symplectique, mais une variété de Poisson. Mais on peut, sur une variété de Poisson, définir les notions de crochet de Poisson et de système hamiltonien.

Mouvement d'un Solide
et
Mécanique des Fluides

Mouvement d'un solide et Mécanique des fluides

Pour marquer le bicentenaire de la publication, par *Leonard Euler*, des équations du mouvement d'un solide, *Vladimir Arnold* a écrit un très intéressant article publié en 1966 par les Annales de l'Institut Fourier, intitulé "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits".

À la fin de l'introduction, il écrit

> Dans ce qui suit, j'ai tâché, conformément à l'appel de N. Bourbaki, de substituer toujours les calculs aveugles aux idées lucides d'Euler.

Bien sûr il faut comprendre cette phrase comme une petite pique visant l'école bourbakiste, car loin de noyer le lecteur dans des calculs aveugles, l'article d'Arnold fourmille d'idées géométriques lumineusement exposées. Je vais essayer d'en présenter quelques unes.

Equations comparées

Arnold met clairement en évidence la très grande similitude qui existe entre les équations qui régissent le mouvement d'un corps solide et celles (découvertes elles aussi par Euler) qui régissent le mouvement d'un fluide parfait incompressible. Dans les deux cas, ces équations peuvent être formulées sur une algèbre de Lie (ou sur son dual) : pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, l'algèbre de Lie du groupe des rotations ; et pour le mouvement d'un fluide parfait, l'algèbre de Lie (de dimension infinie) du groupe des difféomorphismes de l'espace conservant le volume.

Dans les deux cas, les mouvements du système sont les géodésiques (paramétrées, de manière affine, par le temps) d'un groupe de Lie G muni d'une métrique riemannienne invariante par translation soit à gauche (c'est le cas du mouvement d'un solide), soit à droite (c'est le cas du mouvement d'un fluide incompressible).

Cas du mouvement d'un solide (1)

Chaque *mouvement* d'un corps solide autour d'un point fixe O peut être décrit comme une *courbe paramétrée par le temps* $t \mapsto g(t)$ tracée sur le groupe G des rotations de l'espace autour du point O.

En effet, une configuration de référence du solide étant choisie, une rotation g autour du point O détermine une autre configuration du solide : le point matériel qui, dans la configuration de référence était situé en x, se trouve, dans la nouvelle configuration, au point $g(x)$.

En l'absence de forces extérieures *(problème d'Euler-Poinsot)* les mouvements sont les *gédésiques* de G muni de la métrique riemannienne définie par l'*énergie cinétique* $T(V) = \frac{1}{2}\langle I(V), V \rangle$, avec $V \in TG$. On a noté $I : TG \to T^*G$ l'*opérateur d'inertie*.

Cette métrique est invariante par l'action du groupe G sur son fibré tangent TG par *translation à gauche*. L' opérateur d'inertie étant équivariant pour les actions de G sur TG et sur T^*G par translation à gauche, est lui-même déterminé par sa restriction à l'élément neutre, aussi notée $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$.

Cas du mouvement d'un solide (2)

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{dg(t)}{dt} &= V(t)\,, \quad V(t) \in T_{g(t)}G\,,\\
X(t) &= (TL_{g(t)})^{-1}\bigl(V(t)\bigr)\,, \quad X(t) \in T_eG \equiv \mathcal{G}\,,\\
M(t) &= I\bigl(X(t)\bigr)\,, \quad M(t) \in T_e^*G \equiv \mathcal{G}^*\,,\\
\frac{dM(t)}{dt} &= \mathrm{ad}^*_{X(t)} M(t)\,.
\end{aligned}$$

Ces équations ont pour conséquence l'existence d'une intégrale première. Posons

$$m(t) = \mathrm{Ad}^*_{g(t)^{-1}} M(t)\,.$$

On a alors

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0\,, \quad \text{donc } m(t) \text{ ne dépend pas de } t\,.$$

$M(t)$ est le *moment cinétique du corps solide dans un repère lié à ce corps*, tandis que $m(t)$ est le *moment cinétique du corps solide dans un repère fixe*.

Cas du mouvement d'un solide (3)

$$\frac{dM(t)}{dt} = \mathrm{ad}^*_{X(t)}\, M(t)$$

est l'équation d'Euler dans $\mathcal{G}^*$. On en déduit facilement l'équation d'Euler dans $\mathcal{G}$

$$\frac{dX(t)}{dt} = B\bigl(X(t), X(t)\bigr)\,,$$

où l'application $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est définie par

$$B(X, Y) = I^{-1} \circ \mathrm{ad}^*_Y \circ I(X)\,.$$

Remarque. Les moments cinétiques $M(t)$ dans un repére lié au solide en mouvement et $m(t)$ dans un repère fixe, sont les images de $I\left(\dfrac{dg(t)}{dt}\right)$, respectivement par le moment J_R de l'action de G sur T^*G par translation *à droite* et par le moment J_L de l'action de G sur T^*G par translation *à gauche*.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (1)

Considérons un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ constante remplissant un domaine compact simplement connexe M de l'espace dont le bord ∂M est une surface différentiable. Soit G le groupe des difféomorphismes de M conservant le volume. Une configuration de référence du fluide une fois choisie, chaque *mouvement* du fluide en fonction du temps peut être considéré comme une courbe paramétrée $t \mapsto g(t)$ dans le groupe G : la position de la particule fluide située en x dans la configuration de référence est, à l'instant t, au point $g(t)(x)$ de M, et sa vitesse est $\overrightarrow{v}\bigl(g(t)(x)\bigr) = \dfrac{d\bigl(g(t)(x)\bigr)}{dt}$. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est l'epace de tous les champs de vecteurs vitesse que peut avoir le fluide compte tenu de son incompressibilité, c'est-à-dire l'espace des champs de vecteurs différentiables $\overrightarrow{v}$ sur M, à divergence nulle, tangents au bord ∂M. Puisque G conserve le volume, l'*énergie cinétique* est

$$T\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2}\int_M \rho \|\overrightarrow{v}\bigl(g(t)(x)\bigr)\|^2 \mu(x) = \frac{1}{2}\int_M \rho\|\overrightarrow{v}(x)\|^2 \mu(x)\,.$$

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (2)

On a noté μ la forme élément de volume de l'espace. Dans un système de coordonnées orthonormé $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$.

L'énergie cinétique $T : TG \to \mathbb{R}$ est invariante par l'action de G sur TG par translation *à droite*.

Le produit scalaire euclidien de l'espace permet de considérer un vecteur $\overrightarrow{v} \in T_xM$ comme une forme linéaire notée $v^\flat$, sur T_xM : il suffit de poser, pour tout $\overrightarrow{w} \in T_xM$,

$$\langle v^\flat, \overrightarrow{w} \rangle = \overrightarrow{v} . \overrightarrow{w} \,.$$

L'énergie cinétique peut s'écrire

$$T\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2}\int_M \langle \rho v^\flat(x), \overrightarrow{v}(x) \rangle \mu(x) \,.$$

On montre que le *dual* de $\mathcal{G}$ est l'espace $\mathcal{G}^*$ des *classes d'équivalence* de 1-formes différentielles sur M, pour la relation d'équivalence où deux formes sont équivalentes si leur différence est une 1-forme exacte.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (3)

La différentielle extérieure d'une 1-forme n'est pas modifiée lorsqu'on ajoute à cette 1-forme une 1-forme exacte. C'est pourquoi on peut aussi considérer que le dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ est l'*espace des 2-formes différentielles exactes* sur M. Pour tout élément de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire pour tout champ de vecteurs à divergence nulle $\overrightarrow{v}$ sur M, on a

$$dv^\flat = i(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v})\mu\,,$$

Lorsqu'on convient que $\mathcal{G}^*$ est l'espace des classes d'équivalence de 1-formes sur M modulo les 1-formes exactes, l'*opérateur d'inertie* $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ a pour expression

$$I(\overrightarrow{v}) = \text{classe d'équivalence de } \rho v^\flat\,.$$

Lorsqu'on convient que $\mathcal{G}^*$ est l'espace des 2-formes exactes sur M cet opérateur s'exprime au moyen du *rotationnel* de $\overrightarrow{v}$:

$$I(\overrightarrow{v}) = i(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v})\mu\,.$$

Il est inversible, au moins sur la partie régulière de $\mathcal{G}^*$.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (4)

On définit le hamiltonien H, d'abord sur $T_e^* G$ en posant $H(\xi) = T\bigl(I^{-1}(\xi)\bigr)$, puis sur T^*G entier en utilisant son invariance par l'action de G sur T^*G par translation à droite.

En l'absence de forces extérieures, les *mouvements* du fluide sont les géodésiques, paramétrées par le temps comme paramètre affine, sur le groupe G muni de la métrique invariante par translation à droite déterminée par l'énergie cinétique.

Les équations du mouvement, écrites précédemment lorsque la métrique est invariante par translation à gauche, s'adaptent aisément au cas où la métrique sur G est invariante par translation à droite.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (5)

Ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= V(t)\,, \quad V(t) \in T_{g(t)}G\,, \\ X(t) &= \left(TR_{g(t)}\right)^{-1}\bigl(V(t)\bigr)\,, \quad X(t) \in T_eG \equiv \mathcal{G}\,, \\ M(t) &= I\bigl(X(t)\bigr)\,, \quad M(t) \in T_e^*G \equiv \mathcal{G}^*\,, \\ \frac{dM(t)}{dt} &= -\operatorname{ad}^*_{X(t)} M(t)\,. \end{aligned}$$

Elles ont pour conséquence l'existence d'une intégrale première, car en posant

$$m(t) = \operatorname{Ad}^*_{g(t)} M(t) \quad \text{on a} \quad \frac{dm(t)}{dt} = 0\,,$$

donc $m(t)$ ne dépend pas de t. On en déduit aussi l'équation

$$\frac{dX(t)}{dt} = B\bigl(X(t), X(t)\bigr)\,, \quad \text{où } B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G} \text{ est définie par}$$

$$B(X, Y) = I^{-1} \circ \operatorname{ad}^*_Y \circ I(X)\,.$$

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (6)

Il reste à interpréter ces équations en termes du champ de vecteurs vitesse du fluide ; à chaque instant t, $\overrightarrow{v(t)}$ est un champ de vecteurs sur M, qui correspond à l'élément $X(t)$ de $\mathcal{G}$. La dérivée $\dfrac{dX(t)}{dt}$ est donc la *dérivée partielle par rapport à t*, $(t,x) \mapsto \dfrac{\partial \overrightarrow{v}(t,x)}{\partial t}$.

Soient $g \in G$, $X \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathcal{G}^*$. Si $\overrightarrow{v}$ est le champ de vecteurs sur M qui correspond à X, son *image directe* $g_*\overrightarrow{v}$ est le champ de vecteurs qui correspond à $\mathrm{Ad}_g X$. De même, si $[\alpha]$ est la classe d'équivalence de 1-formes sur M qui corrrespond à ξ, son *image réciproque* $g^*[\alpha]$ est la classe d'équivalence de 1-formes qui correspond à $\mathrm{Ad}_g^* \xi$. Ou, si on préfère travailler avec des 2-formes exactes plutôt qu'avec des classes d'équivalence de 1-formes, si $d\alpha$ est la 2-forme exacte sur M correspondant à ξ, son *image réciproque* $g^*(d\alpha) = d(g^*\alpha)$ est la 2-forme exacte qui correspond à $\mathrm{Ad}_g^* \xi$.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (7)

De même, soient X et Y deux éléments de $\mathcal{G}$, ξ un élément de $\mathcal{G}^*$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ les champs de vecteurs sur M qui correspondent, respectivement, à X et à Y et $[\alpha]$ la classe d'équivalence de 1-formes, ou $d\alpha$ la 2-forme exacte, qui correspondent à ξ. Le champ de vecteurs sur M qui correspond à l'élément $[X, Y]$ de $\mathcal{G}$ est $-[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, et la classe d'équivalence de 1 formes, ou la 2-forme exacte, qui correspondent à $\mathrm{ad}^*_X \xi$ sont les dérivées de Lie $\mathcal{L}(\overrightarrow{v})\bigl([\alpha]\bigr)$ et $\mathcal{L}(\overrightarrow{v})(d\alpha) = d\bigl(\mathcal{L}(\overrightarrow{v})(\alpha)\bigr)$.

En termes du champ de vecteurs $\overrightarrow{v}$ l'équation d'Euler sur $\mathcal{G}^*$ a pour expression

$$\frac{\partial\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}\right)}{\partial t} = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}]\,.$$

On reconnait l'*équation d'Euler-Helmholtz* qui exprime la variation du *champ de tourbillons* $\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$ en fonction du temps.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (8)

L'opérateur $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, exprimé en termes des champs de vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ correspondant à deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$, vérifie

$$I\bigl(B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\bigr) = I(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v})\,,$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel. Comme le second membre est une classe d'équivalence, deux 1-formes étant équivalentes lorsque leur différence est la différentielle d'une fonction, $B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est somme de $\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$ et d'un champ de gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}$. On peut donc écrire

$$B(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})) = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v} + \overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,,$$

la fonction f étant déterminée à addition d'une constante près.

L'équation d'Euler sur $\mathcal{G}$, exprimée au moyen du champ de vecteurs $\overrightarrow{v}$, s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}\, v} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\|\overrightarrow{v}\|^2}{2}\right)\,.$$

On reconnaît l'*équation d'Euler* pour le mouvement d'un fluide parfait incompressible, la fonction p étant la *pression*.

Cas du mouvement d'un fluide incompressible (9)

Quant à l'intégrale première $m(t)$ indépendant de t, elle s'écrit

$$\left(g(t)^{-1}\right)^*(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}) \text{ indépendant de } t\,.$$

Elle exprime le fait que le champ de tourbillons $\overrightarrow{\mathrm{rot}\, v}$ est transporté par le mouvement du fluide.

Convention de signe.

Soient $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$. Les opérateurs $\mathrm{Ad}^*_g : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ et $\mathrm{ad}^*_X : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ sont définis par

$$\left\langle \mathrm{Ad}^*_g(\xi), Y \right\rangle = \langle \xi, \mathrm{Ad}_g\, Y \rangle = \langle \xi, TL_g \circ TR_{g^{-1}} Y] \rangle\,,$$

et de même

$$\left\langle \mathrm{ad}^*_X(\xi), Y \right\rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}_X\, Y \rangle = \langle \xi, [X, Y] \rangle\,.$$

Dynamique et Géométrie

Dynamique et Géométrie. 1. Espace et Temps

Pour *Isaac Newton*, Temps et Espace avaient un caractère absolu : le Temps était mathématiquement décrit par une droite affine $\mathcal{T}$ (dont les éléments sont les *instants*) et l'Espace par un espace affine $\mathcal{E}$, de dimension 3, muni (après le choix d'une unité de longueur) d'une structure euclidienne. Le mouvement d'un point matériel dans l'Espace était décrit par une courbe, paramétrée par le Temps $\mathcal{T}$, tracée dans l'Espace $\mathcal{E}$, c'est-à-dire par une application $c : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$:

pour chaque $t \in \mathcal{T}$, $c(t)$ est la position occupée dans l'Espace $\mathcal{E}$ par le point matériel à l'instant t.

La *vitesse* du point matériel à l'instant t est la dérivée

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{\overrightarrow{dc(t)}}{dt}\,.$$

Une fois choisie une unité de temps, c'est un *vecteur* de l'espace, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$.

Dynamique et Géométrie. 2. Principes

Deux principes régissent le mouvement du point matériel (le premier étant d'ailleurs un cas particulier du second) :

Principe de l'inertie

En l'absence de toute action extérieure, le mouvement du point matériel a lieu sur une droite de l'espace $\mathcal{E}$ à vitesse constante.

Principe fondamental de la dynamique

L'action extérieure exercée sur le point matériel en mouvement est, à chaque instant t, mathématiquement décrite par un vecteur $\overrightarrow{f(t)}$, et la variation de la vitesse obéit à l'équation

$$m\frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = \overrightarrow{f(t)}\,,$$

où m est une constante appelée *masse* du point matériel.

Dynamique et Géométrie. 3. Référentiels

En pratique on repère toujours le mouvement d'un objet matériel par rapport à d'autres objets matériels, et on a été conduit à introduire la notion de *référentiel*. Newton a vu que le principe de l'inertie et le principe fondamental de la dynamique, s'ils sont applicables au mouvement du point matériel dans l'espace absolu $\mathcal{E}$, sont applicables aussi au mouvement *relatif* de ce point par rapport à un référentiel en translation à une vitesse $\overrightarrow{V}$ constante par rapport à l'espace fixe $\mathcal{E}$. On peut donc formuler les principes de la dynamique sans employer l'Espace fixe $\mathcal{E}$, comme suit :

Référentiels galiléens (ou inertiels)

1. Lorsque le mouvement relatif de tout point matériel, par rapport à un certain référentiel, obéit au principe d'inertie et au principe fondamental de la dynamique, ce référentiel est dit *galiléen* (ou *inertiel*).

2. Il existe des référentiels galiléens.

Dynamique et Géométrie. 3. Équations dans un référentiel

Dans un référentiel galiléen les équations du mouvement d'un point matériel soumis à une force $\overrightarrow{f}$ pouvant dépendre du temps et de la position du point s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{x(t)}}{dt} = \overrightarrow{v(t)}\,, \\ m\dfrac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = \overrightarrow{f\big(t, x(t)\big)}\,. \end{cases}$$

Ces équations ont un inconvénient : *elles ne sont pas intrinsèques*, car elles dépendent du référentiel galiléen choisi, et si le référentiel choisi n'est pas galiléen, elles prennent une forme plus compliquée, faisant intervenir des force fictives.

En suivant la démarche utilisée par *Hermann Minkowski* en Relativité restreinte, on peut donner aux équations du mouvement une forme n'utilisant aucun référentiel privilégié. On emploie pour cela la notion d'*Espace-Temps*.

Si, comme le croyait Isaac Newton, il existe un Espace fixe $\mathcal{E}$, l'Espace-Temps est le produit $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$. C'est un espace affine de dimension 4.

On n'est pas du tout obligé de supposer l'existence d'un Espace fixe, ni d'abandonner la notion de Temps absolu, pour pouvoir utiliser la notion d'Espace-Temps. On peut employer cette notion aussi bien en Mécanique classique qu'en Mécanique relativiste. L'espace-Temps de la Mécanique classique (que j'appelle aussi *Espace-Temps de Leibniz*) est un espace affine $\mathcal{U}$, de dimension 4, structuré comme suit :

Dynamique et Géométrie. 4. Espace-Temps (2)

1. il existe une application affine non constante $\theta : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$, appelée *date*, qui à chaque événement $\xi \in \mathcal{U}$ fait correspondre l'instant $\theta(\xi) \in \mathcal{T}$ auquel a lieu cet événement ;
2. pour chaque instant $t \in \mathcal{T}$, l'ensemble de événements $\xi \in \mathcal{U}$ tels que $\theta(\xi) = t$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements possibles qui ont lieu à l'instant t (qui, automatiquement, est un sous-espace affine de dimension 3 de $\mathcal{U}$) qui possède, une fois choisie une unité de longueur, une structure d'espace affine *euclidien* ; on l'appelle *Espace à l'instant t* et on le note $\mathcal{E}_t$;
3. Chaque translation de $\mathcal{U}$, restreinte à l'Espace à un instant donné $t_1 \in \mathcal{T}$, est une isométrie de $\mathcal{E}_{t_1}$ sur l'Espace $\mathcal{E}_{t_2}$ à un autre instant t_2 ; on peut bien sûr avoir $t_2 = t_1$ si la composante temporelle de la translation est nulle.

On peut alors écrire les équations du mouvement d'un point matériel en considérant non plus la courbe qu'il décrit dans l'Espace en fonction du temps (puisqu'il n'y a plus d'Espace fixe !), mais la courbe décrite, dans l'Espace-Temps $\mathcal{U}$, par l'événement $\xi(t)$ correspondant, en fonction du temps $t \in \mathcal{T}$. Cette courbe est la *ligne d'univers* du point matériel. Ces équations sont

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\xi(t)}}{dt} = \overrightarrow{V(t)}\,, \\ m\dfrac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt} = \overrightarrow{F\bigl(\xi(t)\bigr)}\,. \end{cases}$$

Les vecteurs figurant dans ces équations sont de vecteurs d'Univers, de dimension 4, éléments de $\overrightarrow{\mathcal{U}}$: $\overrightarrow{V}(t)$ est la *vitesse d'Univers* et $\overrightarrow{F\bigl(\xi(t)\bigr)}$ la *force d'Univers* exercée par l'extérieur sur le point matériel lorsque, dans $\mathcal{U}$, il occupe l'événement $\xi(t)$.

Puisque $\theta\bigl(\xi(t)\bigr) = t$, les composantes sur le Temps $\mathcal{T}$ de la vitesse d'Univers $\overrightarrow{V(t)}$ et de la force d'Univers $\overrightarrow{F\bigl(\xi(t)\bigr)}$ sont, respectivement, 1 et 0. Quant aux composantes sur un hypothétique Espace, elles ne sont déterminées qu'une fois choisi un référentiel particulier.

Dans un important article intitulé “Sur les espaces à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée”, publié en deux parties en 1923 et 1925, Élie Cartan a forgé l'outil mathématique qui permet d'exprimer ces équations sous une forme géométrique intrinsèque, traduisible dans des coordonnées curvilignes quelconques de l'Espace-Temps, tout en les rendant utilisables même lorsque l'Espace-Temps n'est plus un espace affine.

Il s'agit du concept de *connexion infinitésimale*. Je vais esssayer d'en donner une idée intuitive, et d'expliquer comment ce concept permet d'envisager d'une manière nouvelle le principe de l'inertie.

Dynamique et Géométrie. 6. Les connexions

On considère une variété différentiable M de dimension n (nous supposerons plus tard que M est l'Espace-Temps). En chaque point $x \in M$, l'ensemble des vecteurs tangents en x à M est un espace vectoriel, de même dimension n que M, appelé *espace tangent en x à M* noté T_xM. L'ensemble de tous les vecteurs tangents à M, en tous ses points, c'est-à-dire l'union de tous les espaces tangents T_xM pour tous les points $x \in M$, est une variété de dimension $2n$, appelée *fibré tangent à M*, notée TM.

Deux idées sont à l'origine de la notion de *connexion affine*

- l'espace tangent T_xM à la variété M en un de ses points x est un *modèle local*, c'est-à-dire une *approximation* de M utilisable au voisinage du point de contact x ;
- pour toute courbe différentiable tracée sur M, la connexion doit permettre de comparer entre eux les modèles locaux formés par les espaces tangents en différents points de cette courbe.

Dynamique et Géométrie. 6. Les connexions (2)

Dès que l'espace tangent à M en l'un des points de cette courbe est choisi, une *loi de transport parallèle* s'eprimant par des équations différentielles doit préciser comment s'en déduisent les repères affines des espaces tangents à M en tous les autres points de la courbe. Au moyen de ces repères affines, on pourra alors identifier entre eux tous ces espaces tangents.

Un repère affine de l'espace tangent T_xM étant constitué par un point de cet espace pris pour origine, et n vecteurs linéairement indépendants formant une base, la loi de transport parallèle doit indiquer comment l'origine et chacun des vecteurs de la base sont transportés. Grâce à une identification naturelle de l'espace tangent à M en un point x avec l'espace tangent à T_xM en le vecteur nul en x, appelée *isomorphisme de soudure*, il suffit pour déterminer la connexion que l'on ait l'équation différentielle régissant le transport parallèle d'un vecteur quelconque de $T_{\gamma(s)}M$; on utilisera cette équation pour chacun des vecteurs d'une base, et on montre que l'équation régissant le transport parallèle de l'origine s'en déduit.

Dynamique et Géométrie. 7. Symboles de Christoffel

La donnée d'un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ sur M détermine automatiquement un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ sur TM. Une courbe paramétrée différentiable $\gamma : I \to M$ s'écrit, en coordonnées locales, $s \mapsto \bigl(x^1(s), \ldots, x^n(s)\bigr)$. Le système différentiel que doit vérifier le vecteur $\bigl(x^1(s), \ldots, x^n(s), v^1(s), \ldots, v^n(s)\bigr)$ pour être transporté parallèlement le long de cette courbe s'écrit

$$\frac{dv^i(s)}{ds} = - \sum_{(k,h)=(1,1)}^{(n,n)} \Gamma^i_{k\,h} v^h(s) \frac{dx^k(s)}{ds}\,, \quad 1 \leq i \leq n\,.$$

Les $\Gamma^i_{k\,h}$ sont des fonctions des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, définies sur l'ouvert de M sur lequel on a ce système de coordonnées locales. On les appelle *symboles de Christoffel*.

Une courbe géométrique différentiable C tracée dans la variété M (munie d'une connexion affine) est appelée *géodésique* s'il existe un paramétrage $\gamma : I \to M$ de cette courbe, dit *paramétrage affine*, tel que le vecteur tangent $\dfrac{d\gamma(s)}{ds}$ soit transporté le long de cette courbe parallèlement à lui-même. En coordonnées locales, les équations différentielles d'une géodésique avec paramétrage affine sont

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i(s)}{ds} = v^i(s)\,, \\ \dfrac{dv^i(s)}{ds} = -\displaystyle\sum_{(k,h)=(1,1)}^{(n,n)} \Gamma^i_{k\,h} v^h(s) \dfrac{dx^k(s)}{ds}\,. \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

Revenons à l'Espace-Temps $\mathcal{U}$ de la Mécanique classique. En utilisant la notion de connexion, on peut donner un énoncé nouveau du *principe de l'inertie* ayant l'avantage de ne faire intervenir que des données locales.

Principe de l'inertie. Il existe sur l'Espace-Temps $\mathcal{U}$ de la Mécanique classique une connexion affine pour laquelle la ligne d'univers de tout point matériel libre (c'est à dire un point matériel qui n'est soumis à aucune action extérieure) est une géodésique, dont le temps est un paramètre affine.

Lorsqu'on admet que l'Espace-Temps $\mathcal{U}$ est un espace affine, cette connexion est la connexion naturelle associée à la structure d'espace affine. Ainsi que l'a remarqué Élie Cartan, on peut en modifiant cette connexion inclure certaines forces (comme par exemple la pesanteur) dans la géométrie l'Espace-Temps.

Dynamique et Géométrie. 9. Champ d'accélération

S'il existe, dans l'Espace-Temps $\mathcal{U}$, un *champ d'accélération* $\overrightarrow{G}$ exerçant, sur tout point matériel de masse m, une force d'Univers $m\overrightarrow{G}$, on peut remplacer la connexion affine naturelle de $\mathcal{U}$ par une connexion affine pour laquelle le transport parallèle d'un vecteur d'univers $\overrightarrow{V}$ le long d'une courbe paramétrée $s \mapsto \xi(s)$ tracée dans $\mathcal{U}$ soit solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\left(\overrightarrow{V\big(\xi(s)\big)}\right)}{ds} = \frac{d\Big(\theta\big(\xi(s)\big)\Big)}{ds}\,\overrightarrow{G\big(\xi(s)\big)}\,.$$

Cette équation différentielle définit une nouvelle connexion dans l'Espace-Temps $\mathcal{U}$, dont les géodésiques sont :

- les lignes d'univers des points matériels soumis à la seule action du champ d'accélération $\overrightarrow{G}$, si leur projection sur le Temps $\mathcal{T}$ n'est pas constante,
- les droites de l'Espace $\mathcal{E}_t$ si leur projection sur le temps $\mathcal{T}$ est constante, égale à t.

Remarque. Puisque $\overrightarrow{G}$ est un champ d'accélération d'Univers, sa projection sur le Temps $\mathcal{T}$ est toujours nulle.

Exemples. Dans ces exemple, $\mathcal{U} = \mathcal{T} \times \mathcal{E}$ est muni du système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) où $x^0 = t$, coordonnée sur $\mathcal{T}$, est le temps, et $(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ est un système de coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

1. Cas où $\overrightarrow{G}$ est constant. Prenons $\overrightarrow{G} = g\,\dfrac{\partial}{\partial x^3}$, la constante g étant l'intensité de la pesanteur. Le seul symbole de Christoffel non nul de la connexion dont les géodésique ayant sur le Temps une projection non constante sont les lignes d'univers de points matériels en chute libre est

$$\Gamma^3_{0\,0} = -g\,.$$

Cette connexion est intégrable : dans les nouvelles variables

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - \frac{1}{2}gt^2$$

tous les symboles de Christoffel sont nuls.

2. Le problème de Kepler.

Dans cet exemple l'origine de $\mathcal{E}$ est un centre attractif exerçant, sur un point matériel de masse m situé au poin de coordonnées (x, y, z), une force dirigée vers l'origine, d'intensité $mk(x^2 + y^2 = z^2)^{-1}$. Les symboles de Christoffel non nuls de la connexion affine (définie sur l'ouvert de $\mathcal{U}$ formé par tous les événements (t, x, y, z) tels que x, y et z ne soient pas tous les trois nuls) dont les géodésiques ayant sur le Temps une projection non constante sont les lignes d'univers des planètes képlériennes sont

$$\Gamma^i_{0\,0} = -\frac{kx^i}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,, \quad 1 \leq i \leq 3\,.$$

Les composantes non nulles du tenseur de courbure de cette connexion sont

$$R^m_{i\,0\,0} = -R^m_{0\,i\,0} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{kx^m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)\,, \quad 1 \leq i,\, m \leq 3\,.$$

Conclusion

Conclusion

Les quelques exemples que j'ai présentés montrent que les problèmes rencontrés en Mécanique ont souvent été à l'origine de la découverte de notions importantes en Mathématiques, particulièrement en Géométrie : notions de *strucure symplectique*, d'*application moment*, de *connexion, ...* Ces notions se sont souvent révélées importantes en elles-mêmes, pour leur utilisation en Mathématiques. Les problèmes mécaniques à l'origine de ces notions ont été très utiles pour leur étude par les mathématiciens : ainsi par exemple, les propriétés de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible, découvertes par les Mécaniciens, sont un guide précieux pour l'étude mathématique du groupe des difféomorphismes d'une variété.

Inversement, les notions développées par les Mathématiciens peuvent-elles servir en Mécanique ? Les Mécaniciens ne connaissent-ils pas déjà, parfois sous un nom différent de celui utilisé par les Mathématiciens, tous les outils dont ils ont besoin ?

Conclusion (2)

Chacun répondra à cette question selon son expérience et ses convictions. Quant à moi, je pense que dans certains problèmes de Mécanique, raisonner dans l'Espace-Temps pourrait être préférable à l'emploi de référentiels particuliers.

Par exemple en Mécanique des milieux déformables soumis à de grandes déformations, lorsqu'on ne sait plus très bien ce qui reste fixe et qu'on a bien du mal à être sûr que les équations qu'on écrit ont une signification intrinsèque, indépendante du système de coordonnées choisi.

Ou encore lorsque, dans le problème étudié (par exemple l'origine du champ magnétique terrestre, ou la mécanique des plasmas) des phénomènes électromagnétiques interagissent avec les phénomènes mécaniques.

La présente rencontre entre Mathématiciens et Mécaniciens sera, j'en suis sûr, l'occasion d'échanges intéressants et utiles pour nos deux communautés scientifiques.

Remerciements

Je remercie les organisateurs du Congrès Français de Mécanique, particulièrement Messieurs Henri Bertin, Géry de Saxcé et Aziz Hamdouni de m'avoir invité à présenter cet exposé, et l'Université de Bordeaux, pour m'avoir accueilli si généreusement. Je remercie Madame Annie Artal qui s'est très efficacement occupée de mon hébergement.

Un grand merci à tous ceux qui ont eu la patience de m'écouter !

[1] V.I. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier 16 (1966), p. 316–361.

[2] V.I. Arnold and B.A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer, New York 1998.

[3] É. Cartan, Sur les espaces à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, partie I, *Ann. Ec. Norm., t. 40, 1923, p. 325–412.*

[4] É. Cartan, Sur les espaces à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, partie I (suite), *Ann. Ec. Norm., t. 41, 1921, p. 1–25.*

[5] É. Cartan, Sur les espaces à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée partie II, *Ann. Ec. Norm.*, t. 42, 1925, p. 17–88.

[6] É. Cartan, Les espaces à connexion conforme, *Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 2, 1923, p. 171–221.

[7] É. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, t. 52, 1924, p. 205–241.

[8] É. Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace, *Bull. Sc. Math.*, t. 48, 1924, p. 294–320.

[9] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de topologie de Bruxelles*, 1950, p. 29–55.

[10] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

[11] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[12] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[13] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[14] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

[15] B.A. Khesin, *Symplectic structures and dynamics on vortex membranes*. Moscow Mathematical Journal 12, number 2, April-June 2012, p. 413–434.

[16] J.-L. Lagrange, *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes*. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de

Paris, année 1774. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 636–709.

[17] J.-L. Lagrange, *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, Première et Seconde parties*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1781 et 1782. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 125–207 et 211–344.

[18] J.-L. Lagrange, *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1783. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 381–414.

[19] J.-L. Lagrange, *Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes, Première et Seconde parties*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1783 et 1784. Dans *Œuvres*

de Lagrange, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 347–377. et 417–489.

[20] J.-L. Lagrange, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 713–768.

[21] J.-L. Lagrange, *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 771–805.

[22] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 809–816.

[23] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par Albert Blanchard, Paris. Quatrième édition (la plus complète) en deux volumes, avec des notes par M. Poinsot, M. Lejeune-Dirichlet, J. Bertrand, G. Darboux, M. Puiseux, J. A. Serret, O. Bonnet, A. Bravais, dans *Œuvres de Lagrange*, volumes XI et XII, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[24] P. S. Laplace, *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*, Mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1773, t. VII. Dans *Œuvres complètes de Laplace*, tome huitième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891, pages 201–275.

[25] P. S. Laplace, *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes*, Mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1772, 1ère partie, 1775. Dans *Œuvres complètes de*

Laplace, tome huitième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891, pages 325–366.

[26] P. S. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*, Mémoire de l'Académie des sciences de Paris, année 1772, 2ème partie, 1776. Dans *Œuvres complètes de Laplace*, tome huitième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891, pages 369–477.

[27] Charles-Michel Marle, The works of Charles Ehresmann on connections : from Cartan connections to connections on a fibre bundle. *Banach Center Publications* volume 76, 2007, p. 65–86.

[28] Charles-Michel Marle, The inception of symplectic geometry : the works of Lagrange and Poisson during the years 1808–1810. *Letters in Mathematical Physics*, 2009, vol. 90, p. 3–21.

[29] Charles-Michel Marle, On Henri Poincaré's note "Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique". *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, vol. 29, 2013, p. 1–38

[30] Jerrold E. Marsden and Alan Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Reports on Mathematical Physics* 5, 1974, p. 121–130.

[31] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687. Numérisé par le SICD des Universités de Strasbourg, http ://num-scd-ulp.u-strasbg.fr :8080/73/. Traduction française par Madame la Marquise du Chastelet, sous le titre *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, chez Desaint et Saillant, Paris, 1759. Réimprimé par Jacques Gabay, Paris, 1990.

[32] Henri Poincaré, Sur une forme nouvelle des équations de la Méanique, *C. R. Acad. Sci. Paris, T. CXXXII, n. 7 (1901), p. 369–371*.

[33] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France. Journal de l'école Polytechnique, quinzième cahier, tome VIII, pages 1–56.

[34] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France. Journal de l'école Polytechnique, quinzième cahier, tome VIII, pages 266–344.

[35] Jean-Marie Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1969.

[36] J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia delle Scienze di Torino, 1983, pages 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.

[37] J.-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811*, Mathématiques et sciences

humaines, tome 94 (1986), pages 45–54. Numérisé par Numdam, http ://www.numdam.org.

[38] H. Weyl, *Temps, espace, matière*, traduit de la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy, 1922 ; réimprimé par la Librairtie scientifique Albert Blanchard, Paris, 1958.

[39] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.