L'optique géométrique de Hamilton

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie

Séminaire "Histoires de Géométries", 23 juin 2014

Sommaire

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours

Au XVII-ème siècle, les lois de la réflexion et de la réfraction étaient déjà connues, mais la nature de la lumière restait mystérieuse : pour certains c'était un flux de corpuscules, et pour d'autres une vibration se propageant par ondes.

Dans l'annexe au *Discours de la méthode* intitulée *Dioptrique* (1637), *René Descartes* (1596–1650) explique les lois de la réfraction dans le cadre d'une théorie corpusculaire de la lumière, et en revendique la découverte.

La théorie de Descartes ne convainc pas *Pierre de Fermat* (1601–1665) qui, sans se prononcer sur la nature de la lumière, énonce en 1657 le principe qui porte son nom : **le chemin pris par la lumière pour aller d'un point à un autre est toujours tel que le temps de trajet soit le plus petit possible**. Ce principe explique la propagation de la lumière en ligne droite dans un milieu homogène, ainsi que les lois de la réflexion et de la réfraction. On sait aujourd'hui que dans l'énoncé correct de ce principe il faut remplacer "le plus petit possible" par "stationnaire".

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours (2)

Pour *Christiaan Huygens* (1629-1695), la lumière est une vibration se propageant par ondes. Il imagine que l'espace est rempli de particules d'une matière subtile qui, lorsqu'elles sont frappées par une onde lumineuse, entrent en résonance avec elle et deviennent les sources d'ondelettes. Celles-ci se combinent et c'est leur réunion qui constitue l'onde lumineuse qui se propage. Sa théorie, élaborée vers 1678 et publiée en 1690, permet d'expliquer les lois de la réflexion et de la réfraction, dont il attribue la découverte non pas à Descartes, mais à *Willebrord Snell* (1580–1626). Ces lois étaient peut-être déjà connues par Ptolémée (90–168).

Pour *Isaac Newton* (1643–1727), la lumière est constituée de particules se déplaçant à très grande vitesse, capables de traverser le vide et les milieux transparents. Son traité *Optiks*, publié en 1704, explique les lois de la réflexion et de la réfraction dans le cadre d'une théorie corpusculaire de la lumière. Pour expliquer la diffraction, Newton associe cependant aussi une onde à la lumière.

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours (3)

En 1801, *Thomas Young* (1773–1829) découvre le phénomène d'interférences et conclut à la nature ondulatoire de la lumière.

Étienne Louis Malus (1775–1812) étudie les congruences de droites, en vue d'applications aux rayons lumineux. Il perfectionne la théorie ondulatoire de la lumière de Huygens. Il découvre et étudie la polarisation de la lumière et le phénomène de biréfringence. Ses travaux sur les congruences de droites serviront de point de départ à l'Optique géométrique de *William Rowan Hamilton*.

Augustin Louis Fresnel (1788–1827), encouragé par *François Arago* (1786–1853) qui crée pour lui un laboratoire à l'Observatoire de Paris et l'aide à présenter ses travaux à l'Académie des sciences, malgré l'opposition des partisans de la théorie corpusculaire de la lumière comme *Siméon Denis Poisson* (1781–1840) ou *Pierre-Simon de Laplace* (1749–1827), alors majoritaires, étudie les interférences et développe la théorie ondulatoire de la la lumière.

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours (4)

Observant que deux faisceaux lumineux polarisés dans deux directions orthogonales ne donnent pas lieu à des interférences, *Fresnel* affirme que les ondes lumineuses sont transversales.

Dans les travaux sur l'Optique, effectués de 1824 à 1844, *William Rowan Hamilton* (1805–1865) ne fait pas d'hypothèse sur la nature de la lumière ; il s'arrange pour que les notions qu'il utilise aient une interprétation aussi bien dans le cadre des théories corpusculaires que dans celui des théories ondulatoires.

Pour expliquer la réfraction, les théories corpusculaires de la lumière doivent admettre que la vitesse des grains de lumière est plus grande dans l'eau que dans l'air. Les théories ondulatoires, au contraire, expliquent ce phénomène par le fait que l'onde lumineuse se propage moins vite dans l'eau que dans l'air. *François Arago* imagine un appareil pour mesurer la vitesse de la lumière dans l'air et dans l'eau, mais ce n'est qu'en 1850 que *Léon Foucault* (1819–1868) puis *Hippolyte Fizeau* (1819–1896) prouvent que la lumière se propage moins vite dans l'eau que dans l'air.

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours (4)

En 1864, *James Clerk Maxwell* (1831–1879) présente une théorie de l'électromagnétisme conduisant aux équations qui portent son nom. Il s'aperçoit que ces équations ont une importante conséquence : une perturbation du champ électromagnétique se propage, dans toutes les directions, comme une onde, à une vitesse proche de celle de la lumière. Il en conclut que la lumière n'est pas autre chose qu'une onde électromagnétique. Les ondes élecromagnétiques de longueur d'onde métrique ou décamétrique seront mises en évidence expérimentalement en 1887 par *Heinrich Rudolf Hertz* (1857–1894).

La théorie ondulatoire de la lumière semble alors avoir triomphé. Mais dans le cadre de la cinématique classique, le fait que la lumière se propage à la même vitesse dans toutes les directions n'est possible que dans un référentiel privilégié : celui dans lequel l'éther, support des vibrations lumineuses, est au repos.

Théories de la lumière du XVII-ème siècle à nos jours (5)

L'échec des tentatives de mise en évidence du mouvement de la Terre par rapport à l'éther est à l'origine de la *théorie de la Relativité* d'*Albert Einstein* (1879–1955), qui a profondément modifié notre conception de l'espace et du temps.

D'autre part, pour expliquer l'effet photoélectrique découvert en 1886 par *Heinrich Rudolf Hertz*, *Albert Einstein* a, en 1905, ressuscité la théorie corpusculaire de la lumière, en admettant que les interactions lumière-matière se font par quanta discrets.

En 1924, *Louis de Broglie* (1892–1987) écrit : "toute particule, comme l'électron, doit être transportée par une onde dans laquelle elle est incorporée [...]. Mon idée essentielle était d'étendre à toutes les particules la coexistence des ondes et des corpuscules découverte par *Einstein* en 1905 dans le cas de la lumière et des photons".

Aujourd'hui la dualité *onde-corpuscule* est un ingrédient essentiel de la théorie des interactions entre lumière et matière, l'*électrodynamique quantique*.

L'Optique géométrique de Hamilton

Les travaux de Hamilton que j'ai consultés pour préparer cet exposé sont tous présents dans le volume I de l'ouvrage en quatre volumes *Sir William Rowan Hamilton Mathematical Works* publié par Cambridge University Press. Cet ouvrage contient de nombreuses notes explicatives fort utiles dues aux deux éditeurs, *A. W. Conway* et *J. L. Synge*.

Bien que de nature *essentiellement géométrique*, les ouvrages publiés de *Hamilton ne comportent aucune figure* et ses manuscrits n'en comportent que *très peu*. Les éditeurs attribuent cela à l'influence de *Lagrange* qui, dans la préface de sa *Mécanique analytique*, semble éprouver une certaine fierté pour avoir remplacé les figures par des calculs.

Je vais m'efforcer de présenter *une partie* du contenu de ce volume, celle que je comprends le mieux, en suivant l'ordre chronologique.

On Caustics (1824)

Ce mémoire d'une vingtaine de pages, présenté par *Hamilton* alors qu'il n'avait que 19 ans, n'a pas été publié de son vivant mais lui a valu des encouragements qui l'ont conduit à écrire ses articles principaux. Hamilton n'utilise pas dans ce mémoire ce qui, dans la suite, sera son principal outil mathématique : la *fonction caractéristique ("characteristic function")*.

Hamilton étudie les rayons lumineux (assimilés à des demi-droites orientées de l'espace) issus des points d'une surface lumineuse différentiable. Il suppose qu'un seul rayon part de chaque point de cette surface, dans une direction qui dépend différentiablement du point de départ, mais qui n'est pas forcément la direction normale à la surface lumineuse. C'est donc une famille à deux paramètres générale de demi-droites orientées qu'il étudie.

Il déclare avoir fait ce travail avant de connaître le *Traité d'Optique* de *Malus* (1807), que son tuteur, le Révérend *Boyton*, lui a indiqué après la remise de son mémoire.

On Caustics (1824) (2)

Hamilton écrit les deux équations d'un rayon courant et s'intéresse aux questions suivantes.

- Trouver les rayons qui passent par un point donné.
- Trouver les rayons qui rencontrent une courbe donnée.
- Trouver les rayons qui sont tangents à une surface donnée.

Il considère aussi la surface réglée formée par une sous-famille à un paramètre de la famille de rayons étudiée, et détermine dans quels cas cette surface est développable, c'est-à-dire dans quels cas tous les rayons de la sous-famille sont tangents à une même courbe. La réunion des courbes ainsi obtenue est la *surface caustique* de la famille de rayons.

Les méthodes mathématiques qu'il utilise sont celles de la *théorie du contact* : pour déterminer l'enveloppe d'une famille d'objets géométriques dépendant de paramètres, on écrit les équations de ces objets, on dérive ces équations par rapport aux paramètres et on élimine certaines variables entre les équations ainsi obtenues.

On Caustics (1824) (3)

Hamilton considère une sous-famille à un paramètre de rayons issus des points d'une courbe tracée sur la surface lumineuse, et étudie dans quels cas cette famille enveloppe une courbe. Les directions tangentes à la courbe tracée sur la surface lumineuse pour lesquelles cette enveloppe existe sont solutions d'une équation du second degré. C'est pourquoi la surface caustique, lorsqu'elle existe, comporte en général deux nappes. Chaque rayon appartient alors à deux surfaces développables formées de rayons, et les deux courbes auxquelles ces rayons sont tangents sont tracées sur les deux nappes de la surface caustique.

Hamilton écrit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre vérifiée par les sous-familles de rayons à un paramètre qui forment des surfaces développables, et remarque que la surface caustique est l'intégrale singulière de cette équation aux dérivées partielles.

Theory of systems of Rays (1827) (1)

Ce mémoire semble avoir été considéré par *Hamilton* comme la version finale du mémoire *On Caustics* soumis en 1824. Il comporte une table des matières détaillée distinguant trois parties :

- Part First : *On Ordinary Systems of Reflected Rays.*
- Part Second : *On Ordinary Systems of Refracted Rays.*
- Part Third : *On Extraordinary Systems, and Systems of Rays in general.*

Seule la première a été publiée en 1828. La seconde partie a été reconstituée par les éditeurs à partir des manuscrits non publiés de *Hamilton*. La troisième partie est introuvable : *Hamilton* en a probablement incorporé le contenu dans les trois *Suppléments* dont je parlerai plus loin.

Theory of systems of Rays (1827) (2)

Hamilton disposait sans doute déjà en 1827 de l'essentiel de ce qu'il voulait présenter dans ces trois parties, car la table des matières qu'il indique est très détaillée ; de plus la table des matières réelle de la seconde partie, reconstituée à partir de ses manuscrits non publiés, est sensiblement identique à celle publiée en 1828.

Il considère un faisceau de rayons lumineux issus d'une *source ponctuelle*. Dans la *première partie (80 pages)* ce faisceau subit un nombre quelconque (le même pour tous les rayons) de *réflexions* sur des miroirs constitués par des surfaces différentiables quelconques, disposées de manière quelconque.

Dans la *seconde partie (18 pages)*, ce sont des *réfractions* à travers des surfaces différentiables séparant des milieux d'indices de réfraction différents, que ce faisceau subit. *Hamilton* considère aussi dans cette partie les systèmes optiques comportant à la fois des miroirs et des réfracteurs.

Theory of systems of Rays (1827) (3)

Au début de la première partie, *Hamilton* considère une famille de rayons dépendant de deux paramètres qui ne sont pas forcément issus d'une source ponctuelle, et se demande s'il est possible de trouver un miroir tel qu'*après réflexion sur ce miroir, tous les rayons se concentrent en un même point*.

Il prouve que la *condition nécessaire et suffisante* que la famille de rayons doit satisfaire pour que cette construction soit possible est l'*existence d'une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons*.

En renversant le sens de parcours des rayons, *Hamilton* en déduit qu'un faisceau de lumière issu d'un point lumineux, qui admet bien sûr une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons (les sphères centrées sur le point lumineux) *conserve cette propriété après réflexion sur une surface différentiable de forme quelconque* : le faisceau réfléchi *admet encore une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons*.

Theory of systems of Rays (1827) (4)

Puis *Hamilton* prouve qu'une famille de rayons dépendant de deux paramètres qui admet une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons, *conserve cette propriété* après réflexion sur une surface différentiable de forme quelconque, et, plus généralement, après réflexion sur un nombre quelconque de surfaces différentiables de forme quelconque, disposées de manière quelconque (pourvu bien sûr que tous les rayons se réfléchissent le même nombre de fois).

Dans la *seconde partie*, *Hamilton* établit les mêmes propriétés pour les systèmes de rayons soumis à des réfractions à travers des surfaces différentiables séparant des milieux d'indices de réfraction différents. Il montre d'abord que pour qu'un système de rayons dépendant de deux paramètres puisse être concentré en un point par réfraction à travers une surface de forme convenable, *il faut et il suffit* que ce système admette *une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons*.

Theory of systems of Rays (1827) (5)

Hamilton montre que l'existence d'une telle famille de surfaces, évidemment assurée si les rayons sont issus d'une source ponctuelle, *se conserve* après réfraction à travers une surface différentiable, et, plus généralement, après plusieurs réfractions et réflexions à travers ou sur des surfaces différentiables quelconques, disposées de manière quelconque.

La preuve donnée par *Hamilton* repose sur la *stationnarité* du chemin optique total le long d'un rayon, vis-à-vis des déplacements infinitésimaux des points où ont lieu les réflexions, ou les réfractions, sur les surfaces réfléchissantes ou sur les surfaces séparant deux milieux d'indices de réfraction différents. Entre deux de ces surfaces, le rayon lumineux est un segment de droite et son chemin optique est le produit de sa longueur par l'indice de réfraction du milieu.

Theory of systems of Rays (1827) (6)

Hamilton appelle *système rectangulaire* (*Rectangular system*) un système de rayons dans un milieu transparent homogène et isotrope (donc rectilignes) admettant une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons. Il a donc prouvé qu'un système rectangulaire reste rectangulaire après réflexion sur une surface différentiable quelconque, ou réfraction à travers une surface différentiable quelconque séparant deux milieux d'indices de réfraction différents.

En Optique, cette propriété est appelée *Théorème de Malus* ou *Théorème de Malus-Dupin*.

Étienne-Louis Malus a montré que l'ensemble des rayons lumineux issus d'une source ponctuelle possédait encore une famille de surfaces orthogonales après *une réflexion* ou *une réfraction* sur (ou à travers) une surface différentiable, mais il doutait que la propriété reste vraie pour *plusieurs* réflexions ou réfractions.

Charles Dupin (1784–1873) a démontré ce théorème dans le cas général, mais je ne sais pas s'il l'a fait *avant* ou *après Hamilton*.

Theory of systems of Rays (1827) (7)

La fonction caractéristique.

Hamilton définit une *fonction caractéristique* (en anglais *characteristic function*) du système optique constitué par la source lumineuse et l'ensemble des miroirs, ou des milieux transparents d'indices différents. Il la note V.

Dans la première partie et le début de la seconde partie du mémoire, c'est une fonction définie dans la partie de l'espace située *après* le dernier miroir ou la dernière surface de réfraction, à la *sortie* du système optique (plus exactement, dans la partie éclairée de cet espace).

Hamilton généralisera ensuite sa définition, en définissant la fonction caractéristique dans tous les milieux successivement traversés par la lumière. Dans le *troisième supplément*, il considère la *position* de la source lumineuse comme variable : la fonction caractéristique devient une fonction qui dépend de *deux points* situés sur le *même rayon lumineux* : le *point d'émission* d'un rayon lumineux, et le *point d'arrivée* de ce rayon.

Theory of systems of Rays (1827) (8)

Dans la première partie (système de miroirs), la *fonction caractéristique* est la *longueur totale de la ligne brisée allant du point source au point courant considéré* en respectant les *lois de la réflexion* sur chacun des miroirs rencontrés (les rayons incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la normale à la surface réfléchissante au point où a lieu la réflexion).

Dans la seconde partie, après la dernière réfraction, la famille de rayons considérée dépendant de deux paramètres, un rayon lumineux en général unique passe par chaque point de coordonnées cartésiennes x, y, z. Les cosinus directeurs α, β, γ de ce rayon sont donc des fonctions de x, y, z. *Hamilton* utilise le fait qu'il existe une famille de surfaces orthogonales à tous les rayons. La forme différentielle $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ est donc *exacte*. La *fonction caractéristique* V est définie (à une constante additive près) par

$$dV = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz\,.$$

Theory of systems of Rays (1827) (9)

Au début de la seconde partie la fonction caractéristique V n'est donc pas le *chemin optique total* du rayon lumineux, du point source au point de coordonnées x, y, z, mais le *quotient* de ce chemin par l'indice de réfraction du dernier milieu.

Mais à la fin de cette seconde partie, *Hamilton* étudie la propagation de la lumière dans l'atmosphère, considérée comme un milieu non homogène (mais isotrope), car l'indice de réfraction dépend de la température et de la pression. Les rayons lumineux ne sont plus des droites. *Hamilton* utilise le *calcul des variations* pour obtenir le système différentiel dont ce sont des courbes intégrales. Il prend alors pour définition de la fonction caractéristique V le *chemin optique total* calculé par intégration entre deux points d'un rayon lumineux, et écrit que V est stationnaire pour les variations infinitésimales du rayon entre ces deux points astreints à rester fixes. C'est cette définition de la fonction caractéristique V qu'il utilise dans toute la suite.

Theory of systems of Rays (1827) (10)

Cette importante propriété de la fonction caractéristique, la *stationnarité*, est appelée par *Hamilton* (qui fait référence à *Laplace*) *Principle of Least Action*. Mais dans des publications postérieures, il l'appellera *Principle of Stationary Action*.

Les *surfaces de niveau de la fonction caractéristique* (calculée pour un système de rayons issu d'une source lumineuse ponctuelle, par intégration du chemin optique infinitésimal $n\mathrm{d}s$ du point source au point courant le long de chaque rayon), sur chacune desquelles la fonction caractéristique a une valeur constante, sont orthogonales à tous les rayons, même dans les milieux hétérogènes (comme l'atmosphère) dans lesquels les rayons ne sont pas des segments de droites.

La première partie du mémoire comporte une étude détaillée des familles à deux paramètres de droites qui admettent une famille de surfaces orthogonales. Hamilton reprend, en les précisant, tous les résultats qu'il avait obtenus dans son mémoire *On caustics*.

Theory of systems of Rays (1827) (11)

Hamilton étudie de manière très approfondie les *aberrations* du système de rayons (défaut de convergence en un point) et la *densité géométrique* de rayons au voisinage d'un point, pouvant appartenir ou non à la surface caustique.

Le problème traité dans *On caustics* est plus général que celui traité dans *Theory of systems of rays*, car les familles de rayons à deux paramètres considérés *ne sont pas forcément des systèmes rectangulaires*. J'ai été assez surpris de voir que leurs propriétés sont cependant à peu près les mêmes : existence des surfaces caustiques, appartenance de chaque rayon à deux sous-familles de rayons formant des surfaces développables, ces rayons étant tangents à deux courbes tracées sur les deux nappes de la surface caustique. Comme je l'expliquerai plus loin, les *systèmes rectangulaires* sont des *sous-variétés lagrangiennes* de la variété symplectique formée par l'ensemble de toutes les droites orientées, tandis que les familles à deux paramètres de droites orientées en sont des sous-variétés *pas nécessairement lagrangiennes*.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830)

Dans ce mémoire de 38 pages, *Hamilton* commence par étudier la propagation de rayons lumineux issus d'une source ponctuelle dans un milieu transparent *non homogène* et *anisotrope*. Il définit la *fonction caractéristique* V comme le chemin optique total, le long d'un rayon lumineux, de la source lumineuse au point courant M considéré :

$$V(M) = \int_0^{s(M)} v\bigl(x(s), y(s), z(s), \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\bigr)\, \mathrm{d}s\,,$$

où le rayon lumineux allant du point source au point courant, de coordonnées cartésiennes (x, y, z), est paramétré par la longueur d'arc s, le point lumineux étant pris pour origine, et où

$$\alpha(s) = \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\,,\quad \beta(s) = \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}\,,\quad \gamma(s) = \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}$$

sont les *cosinus directeurs* du rayon lumineux au point de coordonnée curviligne s.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (2)

On a bien sûr $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. *Hamilton* note $v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ l'*indice de réfraction du milieu transparent* au point de coordonnées (x, y, z), pour un rayon lumineux dirigé dans la direction du vecteur unitaire de composantes (α, β, γ). Il utilise une astuce de calcul très ingénieuse, consistant à prolonger la définition de la fonction v à tous les vecteurs non nuls de composantes (α, β, γ), en imposant à v d'être *positivement homogène de degré 1*. Pour tout $\lambda > 0$,

$$v(x, y, z, \lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) .$$

On sait alors que l'intégrale, le long d'une courbe paramétrée allant d'un point P à un point Q

$$\int_{s(P)}^{s(Q)} v\left(x(s), y(s), z(s), \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s$$

ne dépend que de la courbe géométrique joignant P à Q, non de son paramétrage.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (3)

Grâce à cette convention, on n'a plus besoin d'imposer au paramètre s utilisé dans la définition de la fonction caractéristique d'être la longueur d'arc. On peut poser

$$V(M) = \int_0^{s(M)} v\bigl(x(s), y(s), z(s), \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)\bigr)\, \mathrm{d}s\,,$$

$s \mapsto \bigl(x(s), y(s), z(s)\bigr)$ étant un *paramétrage différentiable quelconque* le long du rayon allant de la source lumineuse au point M, avec bien sûr toujours

$$\alpha(s) = \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\,, \quad \beta(s) = \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}\,, \quad \gamma(s) = \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s}\,.$$

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (4)

Étant positivement homogène de degré 1, la fonction v satisfait l'*identité d'Euler*

$$v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial v}{\partial \gamma} \,.$$

La fonction caractéristique V peut donc s'exprimer comme

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_0^{s(M)} \left(\alpha(s) \frac{\partial v}{\partial \alpha}(s) + \beta(s) \frac{\partial v}{\partial \beta}(s) + \gamma(s) \frac{\partial v}{\partial \gamma}(s) \right) \mathrm{d}s \\ &= \int \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial \beta} \mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial \gamma} \mathrm{d}z \right) \,. \end{aligned}$$

On reconnaît la *forme de Poincaré-Cartan* de la Mécanique $\sum_i p_i \mathrm{d}q^i - H\mathrm{d}t$ dans le cas particulier où le hamiltonien H est nul (parce que le lagrangien v est positivement homogène de degré 1). *Paul Malliavin* l'appelle *forme de Hilbert* dans son livre *Géométrie différentielle intrinsèque.*

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (5)

En utilisant le fait que le trajet du rayon lumineux de la source au point M est *stationnaire* vis-à-vis des variations infinitésimales de ce trajet à extrémités fixées, *Hamilton* montre qu'il existe des *relations remarquables* entre les dérivées partielles de la fonction caractéristique V (considérée comme fonction des coordonnées (x, y, z) du point où elle est évaluée) et les dérivées partielles de la fonction v des variables $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}, \quad \text{ou}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial \beta}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\mathrm{d}z\,.$$

Dans ses publications ultérieures il appelle cette propriété *Principle of varied action*. C'est une conséquence du fait que les vecteurs tangents aux extrémales régulières sont contenus dans le noyau de la différentielle extérieure de la forme de Poincaré-Cartan.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (6)

Hamilton considère ensuite une famille à deux paramètres de rayons issus d'une source ponctuelle qui, après avoir s'être propagés à travers un milieu transparent hétérogène et anisotrope et ayant éventuellement subi des réflexions ou des réfractions, se propagent enfin dans un milieu homogène, mais pouvant être anisotrope. Dans ce milieu l'indice de réfraction (c'est-à-dire la fonction v) ne dépend pas du point considéré, *mais peut éventuellement dépendre de la direction* du rayon lumineux, c'est-à-dire des cosinus directeurs α, β et γ. Comme précédemment *Hamilton* la prolonge à tous les vecteurs non nuls en lui imposant d'être positivement homogène de degré 1. La différentielle de la fonction caractéristique V vérifie toujours

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial \beta}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\mathrm{d}z\,,$$

et on voit que chaque rayon est une droite sur laquelle V varie linéairement.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (7)

Hamilton suppose alors que sur la famille de rayons considérée on peut prendre la *direction* du rayon comme système de coordonnées. Il définit une *nouvelle fonction caractéristique* W en posant

$$
\begin{aligned}
W &= x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} - V \\
&= x\frac{\partial v}{\partial \alpha} + y\frac{\partial v}{\partial \beta} + z\frac{\partial v}{\partial \gamma} - V\,.
\end{aligned}
$$

On voit que W est la *transformée de Legendre* de V. C'est une fonction constante sur chaque rayon, ne dépendant que de la direction de ce rayon.

Hamilton détermine les relations qui existent entre les dérivées partielles premières et secondes de V et de W, et utilise la fonction W pour étudier les propriétés géométriques de la famille de rayons, en particulier les *caustiques*.

Supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1830) (8)

Hamilton étudie aussi comment les fonctions caractéristiques V et W sont affectées par la *réflexion* ou la *réfraction* des rayons sur, ou à travers, une surface différentiable. La fonction V est évidemment continue puisque donnée par une intégrale le long de chaque rayon, mais ses dérivées partielles ont une discontinuité à la traversée de la surface réfléchissante ou réfractante. La fonction W elle-même est discontinue.

Pour le cas de la réfraction, je pense que ses calculs consistent, en langage moderne, à interpréter les formules

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

au *sens des distributions* (de *Laurent Schwartz*), l'indice de réfraction v ayant une discontinuité à la traversée de la surface réfractante, sa dérivée au sens des distributions comportant alors une distribution de Dirac concentrée sur cette surface.

2nd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1831) (1)

Dans ce mémoire de 19 pages, *Hamilton* considère une famille à deux paramètres de rayons lumineux issus d'une source ponctuelle qui, après une propagation dans un milieu transparent éventuellement hétérogène et anisotrope, et après des réflexions et des réfractions, se propagent dans un milieu *isotrope, mais éventuellement hétérogène*. L'indice de réfraction de ce milieu final, noté μ, dépend du point considéré, mais pas de la direction du rayon.

La différentielle de la fonction caractéristique V a pour expression

$$\mathrm{d}V = \mu(\alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}y + \gamma \mathrm{d}z)\,,$$

où α, β et γ sont les cosinus directeurs du rayon. *Hamilton* suppose que ce sont, ainsi que μ, des fonctions de (x, y, z).

2nd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1831) (2)

Puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, la fonction caractéristique V satisfait l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (aujourd'hui appelée *équation d'Hamilton-Jacobi*)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \mu^2 \,.$$

La fonction notée $v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ dans le précédent mémoire s'exprime au moyen de $\mu(x, y, z)$ comme

$$v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \mu(x, y, z)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2} \,,$$

où (α, β, γ) sont les composantes d'un vecteur non nul, *pas forcément unitaire*, puisque la définition de v est prolongée à tous les vecteurs non nuls en imposant à cette fonction d'être positivement homogène de degré 1.

2nd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (publié en 1831) (3)

L'autre fonction caractéristique W définie dans le premier supplément est

$$W = \mu \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} - V \,.$$

Alors que V n'est pas une fonction quelconque puisqu'elle doit être solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, *Hamilton* montre qu'on peut prendre pour W une fonction différentiable quelconque de (α, β, γ), et que les relations entre les dérivées partielles de V et de W qu'il a établies dans le premier supplément permettent d'en déduire la fonction caractéristique V.

Le reste du mémoire suppose donné un développement en série de W, en déduit le développement correspondant de V et applique ce résultat au calcul des aberrations d'un faisceau lumineux après la traversée d'une lentille.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837)

Dans ce long mémoire de 131 pages, *Hamilton* expose à nouveau toute sa théorie de l'Optique géométrique, sans utiliser les résultats de ses précédentes publications. Il étudie la propagation de la lumière dans un milieu hétérogène et anisotrope, mais il ne considère plus la source lumineuse comme un point fixé une fois pour toutes :

Il considère un rayon lumineux partant du point M', de coordonnées (x', y', z') dans la direction du vecteur unitaire de composantes $(\alpha', \beta', \gamma')$ et arrivant au point M, de coordonnées (x, y, z) dans la direction du vecteur unitaire de composantes (α, β, γ). La *fonction caractéristique* V est maintenant la longueur optique de ce rayon lumineux

$$V(M', M) = \int_{s(M')}^{s(M)} v\bigl(x(s), y(s), z(s), \alpha(s), \beta(s), \gamma(s), \chi\bigr)\,\mathrm{d}s\,,$$

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (2)

Hamilton considère la fonction caractéristique V comme *dépendant des deux points* M' et M, de départ et d'arrivée du rayon lumineux. Il suppose implicitement que lorsque M' et M sont donnés, les vecteurs unitaires directeurs du rayon lumineux aux points M' et M sont déterminés.

De plus, l'indice de réfraction v peut dépendre non seulement du point considéré et de la direction du rayon lumineux en ce point, mais aussi d'un *indice chromatique* χ dépendant de la *couleur* de la lumière.

Hamilton montre que la fonction caractéristique V satisfait *deux* équations aux dérivées partielles du premier ordre, l'une faisant intervenir les dérivées partielles par rapport aux coordonnées (x, y, z) du point M, l'autre les dérivées partielles par rapport aux coordonnées (x', y', z') du point M'. Ce sont *deux équations d'Hamilton-Jacobi* généralisant celle obtenue dans le deuxième supplément pour un milieu transparent isotrope.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (3)

Pour prouver que V satisfait ces deux équations aux dérivées partielles, *Hamilton* utilise les relations obtenues dans le premier supplément

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,,$$

et de même

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial \alpha'}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = -\frac{\partial v'}{\partial \beta'}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial z'} = -\frac{\partial v'}{\partial \gamma'}\,,$$

où v' signifie qu'on a pris les dérivées partielles de la fonction v au point M', de coordonnées (x', y', z'), et où $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont les cosinus directeurs du rayon lumineux au point M'. Comme il a prolongé la définition de v en en faisant une fonction positivement homogène de degré 1, les dérivées partielles de v sont des fonctions homogènes de degré 0 de (α, β, γ) ; elles ne dépendent donc que de (x, y, z) et de *deux variables*, par exemple $(\alpha/\gamma, \beta/\gamma)$.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (4)

En *éliminant ces deux variables* entre les *trois équations*

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \beta}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,,$$

on obtient donc une relation de la forme

$$\Omega\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0\,.$$

En remplaçant M par M' on voit que V vérifie aussi une relation de la forme

$$\Omega'\left(\frac{\partial V}{\partial x'}, \frac{\partial V}{\partial y'}, \frac{\partial V}{\partial z'}\right) = 0\,.$$

Remarquer que Ω et Ω' sont des fonctions définies sur le *fibré cotangent à l'espace physique* (ou plutôt sur son produit par $\mathbb{R}$ car elles dépendent aussi de l'indice chromatique χ.)

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (5)

Hamilton note (σ, τ, ν) les coordonnées sur les fibres du *fibré cotangent*, duales des coordonnées (α, β, γ) sur chaque espace tangent. Ω est donc fonction de $(x, y, z, \sigma, \tau, \nu, \chi)$ et Ω' de $(x', y', z', \sigma', \tau', \nu', \chi)$.

Hamilton explique comment déduire de V l'équation des rayons lumineux. En égalant à des constantes

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial \alpha'}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = -\frac{\partial v'}{\partial \beta'}, \quad \frac{\partial V}{\partial z'} = -\frac{\partial v'}{\partial \gamma'},$$

et en fixant (x', y', z') on obtient trois relations *(dont deux seulement sont indépendantes)* entre les coordonnées d'un point courant M sur le rayon, ce qui permet d'exprimer deux des coordonnées de M en fonction de la troisième.

En langage moderne, ce résultat indique que la connaissance d'une *intégrale complète de l'équation d'Hamilton-Jacobi* permet de déterminer *toutes les courbes intégrales d'un système hamiltonien*.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (6)

De plus, Hamilton définit *deux autres fonctions caractéristiques* secondaires W et T, qu'il appelle maintenant *fonctions auxiliaires* (*auxiliary functions*). La fonction W avait déjà été considérée dans le premier supplément, dans le cas particulier où le dernier milieu transparent dans lequel la lumière se propage est homogène (mais pas forcément isotrope). Elle est maintenant définie dans le cas général par

$$W = x\sigma + y\tau + z\nu - V\,,$$

et elle est considérée comme une fonction des coordonnées (x', y', z') du point M', des composantes du *covecteur* au point M

$$\sigma = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,, \quad \tau = \frac{\partial v}{\partial \beta}\,, \quad \nu = \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,,$$

et de l'indice chromatique χ.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (7)

Hamilton définit la fonction auxiliaire T par

$$T = W - x'\sigma' - y'\tau' - z'\nu'$$

et la considère comme une fonction des variables (σ, τ, ν), (σ', τ', ν') et de l'indice chromatique χ.

Hamilton montre que deux quelconques des fonctions V, W, T peuvent s'exprimer au moyen de la troisième. Il fait une étude détaillée des relations entre les dérivées partielles du premier et deuxième ordre de ces fonctions et explique comment elles peuvent être employées pour résoudre les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction V. Il étudie aussi les variations brusques de ces fonctions et de leurs dérivées partielles lors d'une réflexion sur une surface ou d'une réfraction à travers une surface séparant deux milieux différents. Il montre aussi que les résultats qu'il a établis en coordonnées cartésiennes restent, pour l'essentiel, valables en coordonnées curvilignes quelconques.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (8)

Le troisième supplément comporte encore une très longue étude de la géométrie d'un système de rayons utilisant les trois fonctions V, W et T où il est question d'aberrations, de distorsions et de surfaces caustiques, que je n'ai regardée que très superficiellement. J'y ai vu cependant que la notion de *points conjugués* du calcul des variations était connue de *Hamilton*. Ce supplément se termine par l'exposé de deux nouveaux sujets.

1. Lien avec la théorie ondulatoire de la lumière. Dans cette théorie, $V(M', M)$ est le *temps mis par la lumière* pour aller de M' à M, σ, τ et ν sont les composantes de l'*inverse de la vitesse normale* de l'onde lumineuse. *Hamilton* interprète ses résultats en termes de la *théorie ondulatoire de Fresnel*.

3rd supplement to an Essay on the Theory of systems of Rays (lu en 1832, publié en 1837) (9)

2.La réfraction conique. En utilisant sa théorie de l'Optique géométrique et les formules de *Fresnel* pour la vitesse d'une onde lumineuse dans un cristal biaxial, *Hamilton* montre qu'un pinceau lumineux cylindrique entrant perpendiculairement dans une lame à faces parallèles faite de ce cristal se réfracte en un *cône creux*.

Puis, en sortant de ce cristal, ce cône lumineux creux se réfracte à nouveau pour former un *cylindre lumineux creux* d'axe perpendiculaire à la face de sortie.

Hamilton demanda à *Humphrey Lloyd*, Professeur de Philosophie expérimentale et naturelle au *Trinity College* de Dublin, de vérifier expérimentalement l'existence de ce phénomène. Deux mois après la présentation du Troisième supplément, *Humphrey Lloyd* observa le phénomène de réfraction conique en utilisant un cristal d'aragonite. Il publia ses résultats expérimentaux dans le *London and Edimburgh Philosophical magazine* en 1833.

Autres documents

Le volume I de *Sir William Rowan Hamilton Mathematical Works* contient plusieurs autres articles dignes d'intérêt.

Dans le très court article (2 pages) *On a view of mathematical optics* (1832), *Hamilton* expose les idées générales de sa théorie de l'Optique, sans écrire d'équations. Il rapproche sa fonction caractéristique V de l'emploi, par *René Descartes*, de coordonnées pour résoudre des problèmes de géométrie.

Dans l'article de 22 pages *On the paths of light, and of the planets* (1833), il évoque les théories copusculaire et ondulatoire de la lumière, parle de la réfraction conique et de sa mise en évidence par les expériences de *Humphrey Lloyd*, du théorème de *Malus*, du principe d'action stationnaire. Puis il envisage l'utilisation de la fonction caractéristique V en Mécanique céleste. Cette idée sera développée dans ses deux grands mémoires sur la dynamique, publiés en 1834 et 1835, qui figurent dans le volume IV de *Sir William Rowan Hamilton Mathematical Works*.

Commentaires

Je vais maintenant exposer quelques remarques que j'ai faites en essayant de comprendre les travaux de *Hamilton* et de les rapprocher des notions de géométrie qui me sont plus familières.

La structure symplectique de l'ensemble des droites orientées

L'ensemble de toutes les droites orientées d'un espace euclidien de dimension 3 est une *variété symplectique* de dimension 4, symplectomorphe au fibré cotangent à une sphère de dimension 2. Choisissons en effet un point O de l'espace pour origine, et traçons la sphère S de centre O et de rayon 1. Une droite orientée D est en effet déterminée par

- la donnée d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ parallèle à D et de même sens, auquel on peut faire correspondre le point P de la sphère S tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}$,
- la donnée d'une *forme linéaire* ζ sur l'espace tangent en P à la sphère S.

La droite D est en effet l'ensemble des points M de l'espace tels que, pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ tangent en P à la sphère S,

$$\zeta(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}\,.$$

La structure symplectique de l'ensemble des droites orientées (2)

On a ainsi établi une correspondance bijective entre *l'ensemble des droites orientées* de l'espace et l'ensemble des *paires* $(\overrightarrow{u}, \zeta)$ formées d'un *vecteur unitaire* $\overrightarrow{u}$ et d'une *forme linéaire* ζ sur l'espace tangent au point P de S tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire entre l'ensemble des droites orientées de l'espace et le *fibré cotangent* à la sphère de rayon 1. En rapatriant sur cet ensemble la *1-forme de Liouville* du fibré cotangent à la sphère, on obtient sur l'ensemble des droites orientées de l'espace une 1-forme différentielle η , qui *dépend du choix du point O* : si on remplace O par O' la forme η est remplacée par la somme de η et de la différentielle de la fonction

$$\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{u} \,.$$

La *différentielle extérieure* $\mathrm{d}\eta$ de la forme η *ne dépend donc pas du choix du point O* : c'est une *forme symplectique* sur la variété (de dimension 4) de *toutes les droites orientées de l'espace*.

Réflexions, réfractions et transformations symplectiques

La *réflexion* sur un miroir différentiable transforme la *droite orientée portant un rayon incident* en la *droite orientée portant le rayon réfléchi*. En utilisant les lois de la réflexion et l'expression de la forme symplectique $\mathrm{d}\eta$ de la variété de toutes les droites orientées, on montre facilement que c'est un *isomorphisme symplectique* de l'ouvert constitué par les droites orientées qui rencontrent le miroir sur lui-même.

De même, la *réfraction* d'un rayon lumineux à la traversée d'une surface différentiable Σ séparant deux milieux d'indices de réfraction différents n_1 et n_2 transforme la *droite orientée portant le rayon dans le milieu d'indice n_1* en la *droite orientée portant le rayon dans le milieu d'indice n_2*. En utilisant les lois de la réfraction et l'expression de la forme symplectique $\mathrm{d}\eta$, on montre facilement que cette transformation est un *isomorphisme symplectique* de l'ouvert constitué par les droites orientées qui rencontrent la surface Σ *muni de la forme symplectique $n_1\mathrm{d}\eta$* sur ce même ouvert *muni de la forme symplectique $n_2\mathrm{d}\eta$*.

Systèmes rectangulaires et sous-variétés lagrangiennes

Je rappelle qu'*Hamilton* appelle *système rectangulaire* une famille de droites (orientées) de l'espace dépendant de deux paramètres admettant une famille de *surfaces orthogonales à toutes ces droites*. Au XIX-ème sècle et au début du XX-ème siècle, les mathématiciens français appelaient cela une *congruence normale* de droites.

En utilisant l'expression de la forme symplectique $\mathrm{d}\eta$ de la variété de toutes les droites orientées, on montre facilement qu'une famille de droites orientées dépendant de deux paramètres est un *système rectangulaire si et seulement si* c'est une *sous-variété lagrangienne* de la variété symplectique de toutes les droites orientées.

Le théorème de Malus-Dupin

Le *théorème de Malus-Dupin* dont j'ai parlé au début de cet exposé affirme qu'un *système rectangulaire* qui subit une série de réflexions et de réfractions sur, ou à travers, des surfaces différentibles, *reste rectangulaire*.

Ce théorème est une *conséquence facile* des deux résultats précédents : puisque une réflexion ou une réfraction est une *transformation symplectique*, elle transforme une *sous-variété lagrangienne* en une autre *sous-variété lagrangienne*.

Et bien sûr, la composée d'un nombre quelconque de transformations symplectiques étant une transformation symplectique, le même résultat reste valable pour un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions successives sur, ou à travers, des surfaces différentiables.

Principe d'action stationnaire et formalisme hamiltonien

Hamilton utilise pour décrire la propagation de la lumière dans un milieu transparent la fonctionnelle d'action

$$I(f) = \int_{s_0}^{s_1} v\left(f(s), \frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s\,,$$

où f est une courbe paramétrée différentiable dans l'espace, c'est-à-dire une application différentable définie sur un intervalle $[s_0, s_1]$, à valeurs dans l'espace physique, *paramétrée par la longueur d'arc curviligne* s. La fonction intégrée v est définie sur la *partie du fibré tangent à l'espace physique* formée par les *vecteurs unitaires*.

Hamilton prolonge la définition de la fonction v à tout le fibré tangent à l'espace (moins la section nulle) en lui imposant d'être *positivement homogène de degré 1*. Il pose donc, pour tout vecteur non nul $\overrightarrow{w}$ tangent à l'espace physique en un point m,

$$v(m, \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{w}\|\; v\left(x, \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\right)\,.$$

Principe d'action stationnaire et formalisme hamiltonien (2)

Cette convention a un double avantage : elle conduit à des formules élégantes, et elle rend la fonctionnelle d'action *indépendante du choix du paramétrage*. On vérifie en effet facilement que si $f(s_0) = m_0$ et $f(s_1) = m_1$ sont les deux extrémités de la courbe paramétrée f, la valeur de $I(f)$ ne dépend que de la *courbe géométrique* tracée dans l'espace joignant les points m_0 et m_1, pas de la manière dont cette courbe est paramétrée.

En coordonnées locales, la fonction v s'écrit $v(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ et, d'après l'identité d'Euler

$$v(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)}{\partial \dot{x}_i}\,.$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial v}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0\,, \quad 1 \leq i \leq 3\,.$$

Principe d'action stationnaire et formalisme hamiltonien (3)

On peut bien sûr utiliser le formalisme lagrangien pour déterminer les rayons lumineux, la fonction v jouant le rôle de lagrangien. Le paramétrage de ces équations n'est évidemment pas déterminé par les équations d'Euler-Lagrange puisque la valeur de la fonctionnelle d'action ne dépend pas du choix de ce paramétrage, mais on peut ajouter une équation, par exemple $v =$ Constante, pour le déterminer.

Si on cherche à utiliser le formalisme hamiltonien, on a une *désagréable surprise* : à cause de l'identité d'Euler, le hamiltonien associé au lagrangien v est nul !

On peut pourtant parfaitement utiliser le formalisme hamiltonien, et d'ailleurs *Hamilton* le fait, heureusement !Je vais expliquer comment.

Principe d'action stationnaire et formalisme hamiltonien (4)

Soit $\mathcal{L}$ l'application de Legendre, qui à un élément du fibré tangent représenté en coordonnées locales par $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, fait correspondre l'élément du fibré cotangent représenté en coordonnées locales par $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$, avec

$$p_i = \frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)}{\partial \dot{x}_i}, \quad 1 \leq i \leq 3 .$$

En Mécanique on suppose souvent que l'application de Legendre est un difféomorphisme (au moins local) du fibré tangent sur le fibré cotangent. Ici, *ce n'est pas le cas*, car deux vecteurs dont l'un est le produit de l'autre par un réel positif ont la même image. Mais si on suppose (comme le fait implicitement *Hamilton*) que le lagrangien v n'a pas d'autre dégénérescence, l'application de Legendre a pour image une *sous-variété de codimension 1* du fibré cotangent, donc une sous-variété *coïsotrope*.

Principe d'action stationnaire et formalisme hamiltonien (5)

On peut alors, au moins localement, trouver sur le fibré cotangent une fonction différentiable Ω telle que cette sous-variété ait pour équation

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0\,.$$

C'est ainsi que *Hamilton* obtient l'*équation aux dérivées partielles du premier ordre* vérifiée par la fonction caractéristique V, aujourd'hui appelée *équation d'Hamilton-Jacobi*.

Il est alors parfaitement possible d'appliquer le formalisme hamiltonien en utilisant la fonction Ω pour hamiltonien. Le degré d'arbitraire qui existe sur le choix de cette fonction a pour seule conséquence une modification du paramétrage des rayons lumineux ; il n'affecte pas leur forme géométrique.

Remerciements

Je remercie Dominique Flament de m'avoir invité à présenter cet exposé au Séminaire *Histoires de Géométries*.

Je remercie Alain Albouy qui m'a prêté les volumes des œuvres de Hamilton de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, ce qui m'a permis de les étudier tranquillement chez moi, bien plus confortablement qu'à la bibliothèque de Jussieu.

Merci à toutes les personnes qui ont eu la patience de m'écouter !

Bibliographie I

[1] W. R. Hamilton, *On Caustics, Part First*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter XV, Cambridge University Press.

[2] W. R. Hamilton, *Theory of systems of rays, Part First and Part Second (1827)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter I, Cambridge University Press.

[3] W. R. Hamilton, *Supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapters II, Cambridge University Press.

[4] W. R. Hamilton, *Second supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapters III, Cambridge University Press.

Bibliographie II

[5] W. R. Hamilton, *Third supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter IV, Cambridge University Press.

[6] W. R. Hamilton, *On a view of mathematical optics (1832)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter V, Cambridge University Press.

[7] W. R. Hamilton, *On the paths of light, and of the planets (1833)*. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter XI, Cambridge University Press.

[8] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

Bibliographie III

[9] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In *S*ir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[10] P. Malliavin, *Géométrie différentielle intrinsèque*. Hermann, Paris, 1972.