Souvenirs de Pierre Molino

Charles-Michel Marle

Retraité de l'Université Pierre et Marie Curie (aujourd'hui Sorbonne Université)

Journées de Géométrie Différentielle
en mémoire de Pierre Molino
Couvent des Dominicaines des Tourelles
Saint-Mathieu de Tréviers
16 et 17 juin 2022

Sommaire

Introduction

J'ai fait la connaissance de Pierre Molino vers 1970-1975, lors d'un exposé dans lequel il présentait, au séminaire qu'organisait Paulette Libermann à l'Institut Henri Poincaré, certains de ses travaux sur les feuilletages [?]. Mes connaissances en géométrie différentielle étaient alors encore plus rudimentaires qu'aujourd'hui, et son exposé est passé largement au dessus de ma tête.

Cependant nous avons sympathisé et j'ai appris que, deux ans après moi, il avait été lui aussi élève de l'École Polytechnique. Je ne l'ai malheureusement pas connu dans notre École car lorsqu'il en était élève, je l'avais déjà quittée.

Ce n'est que quelques années plus tard, grâce à ma participation au *Séminaire sud-Rhodanien* dont il fut un membre fondateur, que j'ai eu avec lui des échanges scientifiques.

Introduction (2)

Ces échanges furent pour moi très instructifs et fructueux. J'ai bénéficié de sa grande culture mathématique, de sa patience et de sa bienveillance.

Pierre Molino eut la dure épreuve de perdre son père alors qu'il n'avait que trois ans. Il était à la fois un chercheur original et productif et un enseignant hors pair.

D'une grande modestie, c'était un homme courageux n'hésitant pas à prendre des risques pour les causes qui lui tenaient à cœur. Militant de gauche, il fut arrêté en 1969 par la police de Franco lors d'un transport de documents en Catalogne et passa plusieurs semaines en prison.

Jean Favart (1902–1965), qui fut Professeur d'analyse à l'école Polytechnique, disait *tous les gens bien sont allés en prison !*

Introduction (3)

Je me souviens particulièrement d'avoir échangé avec Pierre Molino sur les *variables actions-angles*, sur les *structures de contact et le crochet de Jacobi* et sur la *géométrie des systèmes mécaniques avec contraintes*.

Je dirai d'abord quelques mots de mes échanges concernant les variables actions-angles.

Je parlerai ensuite plus longuement des strucutures de contact et du crochet de Jacobi, car mes échanges avec Pierre Molino sur ce sujet m'ont conduit à proposer un *crochet de Jacobi intrinsèque*, qu'on peut définir même pour les variétés de contact dont la structure ne peut pas être définie par une unique forme de contact partout définie, ainsi d'ailleurs que pour les variétés *localement conformément symplectiques*.

Introduction (4)

Je laisserai de côté mes échanges concernant la géométrie des systèmes mécaniques avec contraintes, car si Pierre Molino y participa, c'est à Pierre Dazord et Richard Montgomery que j'ai emprunté le plus sur ce sujet.

Finalement je parlerai du *séminaire Sud Rhodanien* qui eut en France, pour la formation de jeunes (et moins jeunes) mathématiciens à la géométrie différentielle et ses applications en Mécanique, un rôle non négligeable.

Variables actions-angles

Un système hamiltonien (M, ω, H), où (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$ et $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien différentiable, est dit *complètement intégrable* au sens d'Arnold-Liouville s'il possède n intégrales premières deux à deux en involution, dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur un ouvert dense de M.

Dans les années 1975–1980, j'ai passé beaucoup de temps à étudier la preuve du théorème d'Arnold-Liouville qui, un système hamiltonien complètement intégrable (M, ω, H) étant donné, affirme l'existence de coordonnées locales privilégiées, appelées *variables actions-angles*, sur un voisinage de chaque point de l'ouvert dense de M sur lequel les différentielles des intégrales premières du système sont linéairement indépendantes.

C'est grâce à mes échanges avec Pierre Molino, ainsi qu'avec Claude Albert, Jean-Paul Dufour et Richard Cushman, que je me suis intéressé à l'existence de variables actions-angles *globales* et au comportement des solutions de ce système en dehors de cet ouvert dense.

Variables actions-angles, 2

C'est grâce à ces échanges que j'ai découvert de très intéressants travaux : la thèse d'Håkan Eliasson [?], l'article de J. Duistermaat sur les variables actions-angles globales [?], et bien sûr les articles de Jean-Paul Dufour et Pierre Molino [?] et de M. Boucetta [?] sur les variables actions-angles avec singularités présentés lors de séances du *Séminaise sud-rhodanien*.

Structures de contact et formes de contact, 1

Dans le années 1970–1980, André Lichnerowicz (1915–1998) s'est intéressé aux variété symplectiques et de contact en utilisant, pour déterminer leur structure, des objets géométriques *contravariants* (champs de vecteurs et champs de bivecteurs, c'est-à-dire de tenseurs 2 fois contravariants antisymétriques) au lieu d'employer, comme on le fait habituellement, les objets géométriques *covariants* que sont les formes différentielles. Il fut ainsi conduit à introduire les *variétés de Poisson* et les *variétés de Jacobi* [?, ?], généralisant à la fois les variétés symplectiques et de contact.

À cette époque j'ignorais qu'il existait, pour les fonctions définies sur une variété munie d'une forme de contact, une loi de composition jouant, pour ces fonctions, le rôle joué par le crochet de Poisson pour les fonctions définies sur une variété symplectique. C'est, en grande partie, grâce à mes discussions avec Pierre Molino que j'ai pu clarifier mes idées à ce sujet.

Structures de contact et formes de contact, 2

Cette loi de composition fut appelée par André Lichnerowicz *crochet de Jacobi*. On trouve en effet dans les travaux de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851) [?] une loi de composition qui semble apparentée. Avant d'en indiquer la définition, quelques rappels sur les structures et les formes de contact sont nécessaires.

Une *forme de contact* définie sur un ouvert U d'une variété différentiable M est une 1-forme différentiable β telle que, pour tout $x \in U$, la restriction de la 2-forme $\mathrm{d}\beta(x)$ au sous-espace vectoriel $\ker \beta(x)$ de T_xM soit une forme symplectique.

Une *structure de contact* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'un champ différentiable d'hyperplans C (c'est-à-dire d'un sous-fibré vectoriel C du fibré tangent TM dont la fibre C_x, en chaque point $x \in M$, est un sous-espace vectoriel de codimension 1 de T_xM) tel que sur un voisinage U_x de chaque point $x \in M$, il existe une forme de contact β_{U_x} telle que $\ker \beta_{U_x}$ soit la restriction de C à U_x.

Structures de contact et formes de contact, 3

La variété M munie de la structure de contact déterminée par le champ d'hyperplans C est appelée *variété de contact* et notée (M, C).

Lorsqu'il existe, sur une variété de contact (M, C), une forme de contact β, définie et partout non nulle sur M toute entière, telle que $C = \ker \beta$, on dit que M est *strictement de contact*, et que la forme de contact β *détermine* sa structure de contact. Il importe de remarquer que dans ce cas la forme β *n'est pas déterminée de manière unique* : on peut remplacer β par $a\beta$, où a est n'importe quelle fonction différentiable partout non nulle définie sur M.

De nombreuses variétés de contact intéressantes *ne sont pas* strictement de contact. C'est notamment le cas de la *variété des éléments de contact d'une variété différentiable*, dont l'étude est à l'origine du concept de *variété de contact*.

Il convient donc, à mon avis, de toujours chercher à définir sur une variété de contact des objets géométriques ne dépendant pas du choix d'une forme de contact particuliére déterminant sa structure.

Champ de Reeb sur une variété strictement de contact

Malheureusement, les objets géométriques contravariants utilisés par André Lichnerowicz dont je vais parler *dépendent d'un tel choix !* Je vais donc considérer d'abord une variété strictement de contact (M, C) et, une fois la notion de *crochet de Jacobi intrinsèque* établie, je montrerai que cette notion est encore bien définie lorsque cette variété n'est pas strictement de contact.

Soit donc (M, C) une variété strictement de contact. On notera $\tau_M : TM \to M$ et $\pi_M : T^*M \to M$ les projections canoniques, respectivement du fibré tangent TM et du fibré cotangent T^*M, sur leur base commune M. Soit β une forme de contact telle que $\ker \beta = C$.

On appelle *champ de Reeb* associé à la forme de contact β l'unique champ de vecteurs, noté E_β, qui vérifie

$$\mathrm{i}(E_\beta)\mathrm{d}\beta = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}(E_\beta)\beta = 1\,.$$

Le champ de Reeb est ainsi nommé en l'honneur du mathématicien français Georges Reeb (1920–1993).

Champ de bivecteurs sur une variété strictement de contact

Le champ de Reeb E_β est le *premier objet géométrique contravariant* utilisé par André Lichnerowicz pour déterminer la structure de contact de la variété M.

Le *second objet géométrique contravariant* déterminant cette structure de contact est un *champ de bivecteurs*, noté Λ_β, dont la définition est subtile, tout en étant assez naturelle.

La restriction de la 2-forme $\mathrm{d}\beta$ au sous-fibré C étant partout non dégénérée, l'application de C dans T^*M

$$v \mapsto -\mathrm{i}(v)\mathrm{d}\beta\bigl(\tau_M(v)\bigr)\,, \quad \text{où } v \in C\,,$$

est injective. Son image est l'annulateur E_β^0 de E_β, c'est-à-dire le sous-fibré vectoriel du fibré cotangent T^*M formé par les covecteurs qui, couplés avec E_β, donnent la valeur 0. Considérée comme une application de C sur E_β^0, cette application est un isomorphisme.

Soit $\Lambda_\beta^\sharp : E_\beta^0 \to C$ l'isomorphisme inverse, qu'on peut considérer comme un morphisme injectif de E_β^0 dans TM dont l'image est C.

Champ de bivecteurs sur une variété strictement de contact, 2

Puisque $\mathbb{R}\beta$ est un supplémentaire de E^0_β dans T^*M, on peut prolonger par linéarité le morphisme $\Lambda^\sharp_\beta$, pour le moment défini seulement sur le sous-fibré vectoriel E^0_β, en un morphisme (encore noté $\Lambda^\sharp_\beta$) de T^*M dans TM, en lui attribuant la valeur 0 sur $\mathbb{R}\beta$.

Le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp_\beta : T^*M \to TM$ ainsi obtenu est déterminé de manière unique par les deux égalités, vérifiées pour toute 1-forme différentielle $\xi \in \Omega^1(M)$, aisément déduites du fait que $\Lambda^\sharp_\beta$ prend ses valeurs dans C et de l'expression de la projection de T^*M sur son sous-fibré E^0_β parallèlement à $\mathbb{R}\beta$,

$$\mathrm{i}\big(\Lambda^\sharp_\beta(\xi)\big)\beta = 0\,, \quad \mathrm{i}\big(\Lambda^\sharp_\beta(\xi)\big)\mathrm{d}\beta = -\Big(\xi - \big\langle \xi, E_\beta)\big\rangle\beta\Big)\,.$$

Champ de bivecteurs sur une variété strictement de contact, 3

Le morphisme $\Lambda_\beta^\sharp$ détermine un unique champ de tenseurs deux fois contravariants Λ_β sur M, donné par la formule, dans laquelle ξ et ζ sont deux éléments d'une même fibre de T^*M,

$$\Lambda_\beta(\xi, \zeta) = \left\langle \zeta, \Lambda_\beta^\sharp(\xi) \right\rangle .$$

En raison de l'antisymétrie de $\mathrm{d}\beta$, le champ de tenseurs Λ_β est lui aussi antisymétrique. C'est donc un champ de bivecteurs, qui est le *second objet géométrique contravariant* utilisé par André Lichnerowicz pour déterminer la structure de contact de (M, C), munie de la forme de contact β.

Champs de vecteurs de contact, hamiltoniens de contact

Un *champ de vecteurs de contact*, aussi appelé *automorphisme infinitésimal* de la variété de contact (M, C), est un champ de vecteurs différentiable sur M dont le flot réduit est constitué de difféomorphismes qui, prolongés aux vecteurs, appliquent C dans lui-même. Un champ de vecteurs X est de contact si et seulement s'il vérifie

$$\mathcal{L}(X)\beta = \alpha\beta\,,$$

où $\mathcal{L}(X)\beta$ désigne la dérivée de Lie de β selon le champ de vecteurs X, et où α est une fonction différentiable définie sur M.

Chaque champ de contact est déterminé par une fonction différentiable définie sur M, appelée appelée son *hamiltonien de contact*. Lorsque cette fonction est notée f, le champ de contact qui lui correspond est souvent noté X_f. Il a pour expression

$$X_f = f\,E_\beta + \Lambda_\beta^\sharp(\mathrm{d}f)\,.$$

Crochet de Jacobi

Le hamiltonien de contact f d'un champ de contact X_f est déterminé par ce champ de manière unique, puisque l'on a

$$\mathrm{i}(X_f)\beta = f\,.$$

L'application $\Phi_\beta : f \mapsto X_f$ est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel $C^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions différentiables sur M, sur l'espace vectoriel des champs de vecteurs de contact sur cette variété, munie de sa structure de contact C.

L'espace vectoriel des champs de contact est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie, dont la loi de composition est le *crochet de Lie* $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ des champs de vecteurs. En posant, pour chaque couple ordonné (f, g) de fonctions différentiables sur M,

$$\{f, g\}_\beta = \Phi_\beta^{-1}\Bigl(\bigl[\Phi_\beta(f), \Phi_\beta(g)\bigr]\Bigr)\,,$$

on obtient une loi de composition $(f, g) \mapsto \{f, g\}_\beta$ qui fait de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ une algèbre de Lie et de Φ_β un isomorphisme d'algèbres de Lie. C'est le *crochet de Jacobi*.

Crochet de Jacobi, 2

Le crochet de Jacobi de deux fonctions différentiables f et g a pour expression

$$\{f,g\}_\beta = \Lambda_\beta(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) + \big\langle (f\mathrm{d}g - g\mathrm{d}f), E_\beta\big\rangle\,.$$

Il dépend du choix de la forme de contact β choisie pour déterminer la structure de contact C de la variété M. On peut cependant définir un crochet de Jacobi *intrinsèque* ne dépendant que du champ de contact C. Ce crochet de Jacobi intrinsèque peut encore être défini pour une variété de contact *qui n'est pas strictement de contact*, pour une variété *localement conformément symplectique*, et plus généralement pour un *fibré de Jacobi*.

Lorsque la forme de contact β est remplacée par $a\beta$, où a est une fonction différentiable partout non nulle sur M, le champ de Reeb E_β et le champ de bivecteurs Λ_β sont remplacés, respectivement, par $E_{a\beta}$ et par $\Lambda_{a\beta}$, donnés par les formules

$$E_{a\beta} = a^{-1}E_\beta + \Lambda^\sharp_\beta(\mathrm{d}a^{-1})\,,\quad \Lambda_{a\beta} = a^{-1}\Lambda_\beta\,.$$

Crochet de Jacobi intrinsèque, 1

L'isomorphisme Φ_β de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ sur l'espace des champs de contact est remplacé par $\Phi_{a\beta}$, qui a pour expression

$$\Phi_{a\beta}(f) = \Phi_\beta(a^{-1}f)\,.$$

Le crochet de Jacobi $\{f, g\}_\beta$ de deux fonctions f et $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est remplacé par $\{f, g\}_{a\beta}$, qui a pour expression

$$\{f, g\}_{a\beta} = a\{a^{-1}f, a^{-1}g\}_\beta\,.$$

Soit (L, p, M) le fibré vectoriel, de base M, quotient du fibré tangent (TM, τ_M, M) par son sous-fibré vectoriel $(C, \tau_M|_C, M)$. C'est un fibré en droites, dont la fibre, en chaque point $x \in M$, est l'espace vectoriel quotient T_xM/C_x, qui est de dimension 1. Le *fibré dual* de (L, p, M) n'est autre que le sous-fibré du fibré cotangent (T^*M, π_M, M) dont la fibre, en chaque point $x \in M$, est le sous-espace vectoriel de dimension 1 de T^*_xM formé par les covecteurs nuls sur C_x.

Crochet de Jacobi intrinsèque, 2

Une *forme de contact* β déterminant la structure de contact de (M, C) est une *section partout non nulle* de ce fibré. Par dualité, β détermine une *section différentiable partout non nulle* s_β de (L, P, M), vérifiant l'identité

$$\langle \beta, s_\beta \rangle = 1 \,.$$

Toute section différentiable s de (L, p, M) s'écrit

$$s = f_\beta s_\beta \,,$$

où f_β est une fonction différentiable définie sur M, déterminée de manière unique par s. Posons

$$\Psi_\beta(s) = \Phi_\beta(f_\beta) \,.$$

L'application Ψ_β est un isomorphisme de l'espace vectoriel des sections différentiables de (L, p, M) sur l'espace des champs de vecteurs de contact sur (M, C).

Crochet de Jacobi intrinsèque, 3

Lorsque β est remplacée par $a\beta$, la section s_β, la fonction f_β, le champ de Reeb E_β et le morphisme $\Lambda_\beta^\sharp$ sont remplacés, respectivement, par

$$s_{a\beta} = a^{-1}s_\beta\,, \quad f_{a\beta} = af_\beta\,, \quad E_{a\beta} = a^{-1}E_\beta + \Lambda_\beta^\sharp(\mathrm{d}a^{-1})\,, \quad \Lambda_{a\beta}^\sharp = a^{-1}\Lambda_\beta^\sharp\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\Psi_{a\beta}(s) &= \Phi_{a\beta}(f_{a\beta}) = f_{a\beta}E_{a\beta} + \Lambda_{a\beta}^\sharp(\mathrm{d}f_{a\beta})\\ &= af_\beta\bigl(a^{-1}E_\beta + \Lambda_\beta^\sharp(\mathrm{d}a^{-1})\bigr) + a^{-1}\Lambda_\beta^\sharp\bigl(\mathrm{d}(af_\beta)\bigr)\\ &= f_\beta E_\beta + \Lambda_\beta^\sharp(\mathrm{d}f_\beta) = \Psi_\beta(s)\,.\end{aligned}$$

L'isomorphisme Ψ_β de l'espace des sections différentiables de (L, p, M) sur l'espace des champs de vecteurs de contact dépend de la structure de (M, C), mais non de la forme de contact qui la détermine. Il sera noté Ψ_C.

Crochet de Jacobi intrinsèque, 4

De même, soient s_1 et s_2 deux sections différentiables de (L, p, M). Elles s'écrivent

$$s_1 = f_{(1,\beta)} s_\beta \,, \quad s_2 = f_{(2,\beta)} s_\beta \,,$$

où $f_{(1,\beta)}$ et $f_{(2,\beta)}$ sont deux fonctions différentiables définies sur M. Posons

$$[s_1\,, s_2]_\beta = \{f_{(1,\beta)}, f_{(2,\beta)}\}_\beta s_\beta \,.$$

Cette loi de composition est antisymétrique, locale (le support de crochet de deux sections est contenu dans l'intersection des supports de ces sections) et vérifie l'identité de Jacobi. Elle fait de cet espace une *algèbre de Lie locale*, au sens d'Alexander Kirillov [?]. Elle dépend de C, *mais pas du choix de la forme de contact* β. En effet, lorsque β est remplacée par $a\beta$, la section s_β et les fonctions $f_{(1,\beta)}$, $f_{(2,\beta]}$ sont remplacées, respectivement, par

$$s_{a\beta} = a^{-1} s_\beta \,, \quad f_{(1,a\beta)} = a f_{(1,\beta)} \,, \quad f_{(2,a\beta)} = a f_{(2,\beta)} \,.$$

Crochet de Jacobi intrinsèque, 5

On a donc

$$[s_1, s_2]_{a\beta} = \{f_{(1,a\beta)}, f_{(2,a\beta)}\}_{a\beta} s_{a\beta} = \{af_{(1,\beta)}, af_{(2,\beta)}\}_{a\beta} a^{-1} s_\beta$$
$$= \{f_{(1,\beta)}, f_{(2,\beta)}\}_\beta s_\beta = [s_1, s_2]_\beta$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Le crochet de Jacobi intrinsèque sera donc noté $(s_1, s_2) \mapsto [s_1, s_2]_C$. Il vérifie

$$[s_1, s_2]_C = \Psi_C^{-1}\Big(\big[\Psi_C(s_1), \Psi_C(s_2)\big]\Big).$$

On voit que Ψ_C est un isomorphisme de l'algèbre de Lie des sections différentialbles de (L, p, M) (avec pour loi de composition le crochet de Jacobi intrinsèque) sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur M.

Sur une variété de contact (M, C) qui n'est pas strictement de contact, il existe toujours un recouvrement $(U_i, i \in I)$ de M par des ouverts U_i, indexés par l'ensemble d'indices I, sur chacun desquels existe une forme de contact dont le noyau est la restriction de C à cet ouvert.

Crochet de Jacobi intrinsèque, 6

On peut donc définir un crochet de Jacobi intrinsèque sur l'espace des sections différentiables de la restriction du fibré (L, p, M) à chacun des ouverts U_i.

Pour chaque couple (U_i, U_j) d'ouverts dont l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, le crochet de Jacobi des sections de L restreint à U_i et de L restreint à U_j coïncident sur $U_i \cap U_j$. Les crochets de Jacobi définis sur les restrictions de L aux ouverts du recouvrement $(U_i, i \in I)$ se recollent donc, et on obtient ainsi un *crochet de Jacobi intrinsèque* sur l'espace des sections différentiables de (L, p, M).

De même, les isomorphismes d'algèbres de Lie $\Psi_{C|_{U_i}}$ se recollent en un isomorphisme Ψ_C de l'algèbre de Lie des sections différentiables de $L, p, M)$ (avec pour loi de composition le *crochet de Jacobi intrinsèque*) sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur (M, C).

Crochet de Jacobi intrinsèque, 7

Dernière remarque. Il existe sur L un champ de bivecteurs Λ_L qui en fait une variété de Poisson, de rang maximum, dim $M+1$, sauf sur l'image $s_0(M)$ de la section nulle $s_0 : M \to L$, sur laquelle $\Lambda_L = 0$, caractérisé par la propriété suivante [**?**].

À chaque section différentiable s de (L, p, M), associons la fonction F_s, définie sur l'ouvert de L complémentaire de $s_0(M)$, par l'égalité

$$s\bigl(p(z)\bigr) = F_s(z)\,z\,, \quad z \in L\,, \quad z \notin s_0(M)\,.$$

Le champ de vecteurs hamiltonien $\Lambda_L^\sharp(-\mathrm{d}F_s)$ est projetable sur M et a pour projection le champ de contact $\Psi_C(s)$.

Lorsque (M, C) est connexe, strictement de contact et qu'on a choisi une forme de contact β pour déterminer sa structure, l'ouvert de L complémentaire de $s_0(M)$ a deux composantes connexes. Chacune d'elles, munie de la form symplectique associée à Λ_C, n'est autre que la *symplectifiée* de la variété de contact (M, C) munie de la forme de contact β. La construction décrite ici généralise celle de la symplectifiée lorsque (M, C) n'est pas strictement de contact.

Le Séminaire Sud-Rhodanien

Le Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie fut créé en 1982 par des géomètres et des physiciens-mathématiciens des universités d'Avignon, Lyon, Marseille et Montpellier, dans le but de promouvoir les recherches dans les domaines de la géométrie symplectique et de ses applications en analyse, en mécanique et en physique.

Dès sa création, des mathématiciens et des physiciens rattachés à d'autres universités, de France et d'autres pays, ont activement participé à ses travaux. Ses premières rencontres furent organisées à Lyon, Avignon, Montpellier, Marseille, Balaruc. En 1969 ce séminaire eut lieu à Berkeley (Californie, USA) au *Mathematical Sciences Research institute*.

Une partie des actes de ce séminaire fut publiée par la maison d'édition française *Hermann* dans la collection *Travaux en cours* [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**]. Les actes de la rencontre de Berkeley furent publiée par Springer, dans la collection *Mathematical Sciences Research Institute Publications* [**?**].

Le Séminaire Sud-Rhodanien, 2

Les *preprints* d'une bonne partie des articles publiés dans ces actes ont été numérisés par *Numdam*, la bibliothèque numérique française de mathématiques. Ils peuvent être librement téléchargés sur les pages internet :

`http://www.numdam.org/issues/PDML_1988___1B/`

`http://www.numdam.org/issues/PDML_1988___4B/`

Conclusion et remerciements

Je remercie les organisateurs de ces Journées, et tout particulièrement Jean-Pierre Marco et Robert Brouzet, de m'avoir invité, me permettant d'exprimer mon admiration et mes sentiments d'amitié pour Pierre Molino et, accessoirement, de présenter quelques idées mathématiques.

Et merci à tous ceux qui ont eu la patience de m'écouter !

Bibliographie I

[1] Boucetta, M., *Géométrie globale des systèmes hamiltoniens complètement intégrables et variables actions-angles avec singularités*, dans [?] pages 13–21.

[2] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N. (éditeurs), *Géométrie symplectique et de contact*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie I, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1984.

[3] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N. (éditeurs), *Feuilletages et quantification géométrique*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie II, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1984.

[4] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N. (éditeurs), *Géométrie symplectique et de contact : autour du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie III, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1984.

Bibliographie II

[5] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N., Morvan, J.-M. (éditeurs), *Aspectsdynamiques et topologiques des groupes infinis de transformation de la mécanique*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VI, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1987.

[6] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N., Morvan, J.-M. (éditeurs), *Feuilletages riemanniens, quantification géométrique et mécanique*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VII, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1988.

[7] Dazord, P., Desolneux-Moulis, N., Morvan, J.-M. (éditeurs), *Actions hamiltoniennes de groupes Troisème théorème de Lie*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie VIII, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1988.

Bibliographie III

[8] Dazord, P., Molino, P., *Structures poissonniennes et feuilletages de Libermann*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B « Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », p. 69-89

[9] Dazord, P., Weinstein, A. (editors), *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, NewYork, 1991.

[10] Dufour, J.-P. (éditeur), *Singularités, feuilletages et mécanique hamiltonienne*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, rencontre de Balaruc II, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1985.

[11] Dufour, J.-P. (éditeur), *Géométrie symplectique et mécanique*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, rencontre de Balaruc I, collection *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1985.

Bibliographie IV

[12] Dufour, J.-P., Molino, P., *Compactification d'actions de* $\mathbb{R}^n$ *et variables actions-angles avec singularités*, dans [?], pages 151–167.

[13] Duistermaat, H., *On Global Action-Angle coordinates*, Comm. on Pure and Appl. Math. **32** (1980), 687–706.

[14] Eliasson, H., *Hamiltonian systems with Poisson-commuting integrals*, Thèse (1984) de l'Université de Stockholm.

[15] Jacobi, C. G., *Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*, J. Reine Angew. Math., **60** (1862), 1–181.

[16] Kirillov, A., *Local Lie algebras*, Russian Math. Surveys, **31** (1976), 55–75.

Bibliographie V

[17] Lichenerowicz, A., *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry, **12** (1977), 253–300.

[18] Lichenerowicz, A., *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. Pures et Appl., **57** (1978), 453–488.

[19] Marle C.-M., *Géométrie Symplectique et Géométrie de Poisson*, Calvage & Mounet, Paris, 2018.

[20] Molino, P., *Feuilletages transversalement complets et applications*, Ann. Ec. Norm. Sup., **10** (1977), 289–307.

[21] Molino, P., *Géométrie de polarisations*, dans [?], pages 37–53.