

Dynamique des systèmes à un nombre fini

de degrés de liberté.

6 . 1 . Description générale des systèmes étudiés

On étudie dans ce chapitre la dynamique des systèmes matériels constitués par un nombre fini de corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k . Chacun de ces corps A_i est supposé borné, et on ne fait pas pour le moment d'hypothèse restrictive sur sa forme : ce corps pourra être un volume limité par une surface plus ou moins régulière, ou bien un morceau de surface (schématisant une plaque dont on néglige l'épaisseur), un morceau de courbe (schématisant une poutre, ou une tige, etc ...), ou même un point matériel (schématisant un corps de dimensions négligeables).

Les corps A_i pourront, soit être libres de se mouvoir les uns par rapport aux autres de manière quelconque, soit être astreints à respecter certaines dispositions : ainsi, par exemple, deux corps peuvent être articulés l'un sur l'autre ; une roue peut-être astreinte à rouler sans glisser sur une surface. On dit alors que ces corps sont soumis à des liaisons. On distingue, en général, les liaisons géométriques, qui imposent des restrictions aux positions possibles des corps, et les liaisons cinématiques, qui imposent des restrictions aux champs de vitesses de ces corps. Ainsi par exemple, imposer à un corps solide convexe d'avoir avec un autre corps solide convexe un contact ponctuel, est une liaison géométrique ; imposer de plus à ces deux corps de rouler l'un sur l'autre sans glisser, est une liaison cinématique. Quelques exemples de liaisons géométriques et cinématiques seront examinés dans les paragraphes 6.2 et 6.3 .

Lors de l'étude d'un système de corps solides soumis à des liaisons, on doit tout d'abord examiner le problème de la description de la position, à un instant donné, de ce système (au moyen de paramètres de position convenablement choisis), puis celui de la description des mouvements possibles de ce système, compte tenu de l'existence éventuelle de liaisons cinématiques. Ces problèmes seront brièvement examinés paragraphe 6.4 .

Les corps qui constituent le système sont soumis à des efforts, exercés sur eux par d'autres corps extérieurs au système (efforts dits extérieurs), ou qu'ils exercent les uns sur les autres (efforts intérieurs). On distingue en général les efforts à distance, et les efforts de liaison.

Les efforts à distance rendent compte de phénomènes physiques tels que l'attraction gravitationnelle, l'action d'un champ électrique sur un corps électriquement chargé, ou celle d'un champ magnétique sur un corps électriquement chargé et en mouvement. Dans la plupart des problèmes rencontrés, on peut considérer ces efforts comme des fonctions connues des positions et des champs de vitesses, à l'instant considéré, des corps constituant le système, et éventuellement du temps.

Les efforts de liaison rendent compte des phénomènes physiques qui ont lieu au contact de deux corps rigides liés entre eux (par exemple par une articulation). Ce sont eux qui obligent le système à respecter au cours de son mouvement les liaisons imposées. En général la connaissance des positions et des champs de vitesses des éléments du système, ne suffit pas pour évaluer ces efforts. En effet les lois physiques qui les régissent ne permettent pas, connaissant ces données, de les déterminer complètement. Elles fournissent toutefois certains renseignements partiels, comme on le verra dans des exemples.

L'étude de la dynamique du système considéré consiste enfin à écrire et à résoudre les équations traduisant l'application du principe de la dynamique (ou de ses conséquences) soit au système entier, soit à certaines parties de ce système (par exemple l'un des corps A_i). Ces équations expriment en général des égalités entre des fonctions de la position, des champs de vitesse et d'accélération, à un instant donné, des corps constituant le système (les torseurs dynamiques de ces corps) et les efforts exercés sur eux à ce même instant. Lorsque ceux-ci sont des fonctions connues de la position des corps et, éventuellement, de leurs champs de vitesses, on obtient ainsi un système d'équations différentielles du second ordre qui, s'il est bien posé (et notamment s'il comporte autant d'équations indépendantes qu'il y a de paramètres de position inconnus) permet en principe la détermination du mouvement du système. C'est le cas, par exemple, lorsque tous les corps constituant le système sont libres (sans aucune liaison) et que les efforts à distance sont des fonctions connues des positions et des champs de vitesse. Malheureusement, il n'en est pas en général de même lorsque des liaisons existent : les efforts de liaison étant en général inconnus, le nombre d'équations indépendantes est alors inférieur au nombre des inconnues du problème. Afin de pouvoir résoudre quand même le problème, on doit ajouter aux systèmes un certain nombre d'équations exprimant certaines propriétés des efforts de liaison, résultant de l'expérience (par exemple, les lois du frottement). Il y a toutefois un cas où il est possible d'obtenir un système d'équations bien posé pour la détermination du mouvement du système : c'est celui où les liaisons sont supposées parfaites. Cette notion, déjà rencontrée dans le chapitre précédent, sera étudiée plus à fond dans le paragraphe 6.5. Quelques notions sommaires sur les liaisons non parfaites seront données paragraphe 6.6.

Il faut encore signaler que dans la pratique on peut soit avoir à calculer le mouvement du système au cours du temps, connaissant les lois donnant les efforts en fonction des positions des corps constituant ce système, soit au contraire avoir à déterminer ces lois, connaissant le mouvement du système (exemples : détermination de l'accélération de la pesanteur, connaissant le mouvement d'un pendule ; détermination des masses de diverses planètes, d'après l'observation de leur mouvement).

6.2. Quelques exemples de liaisons géométriques.

Dans tout ce paragraphe on suppose choisi un référentiel, et on examine la position des corps A_i constituant le système à un instant donné. Chaque A_i est alors une partie de l'espace affine euclidien \mathcal{E} .

6.2.1 Point matériel assujéti à rester sur une surface.

On rencontre ce cas très fréquemment en pratique. Un corps A de dimensions négligeables (donc considéré comme un point matériel) est astreint à rester sur une surface S , schématisant la limite d'un autre corps matériel

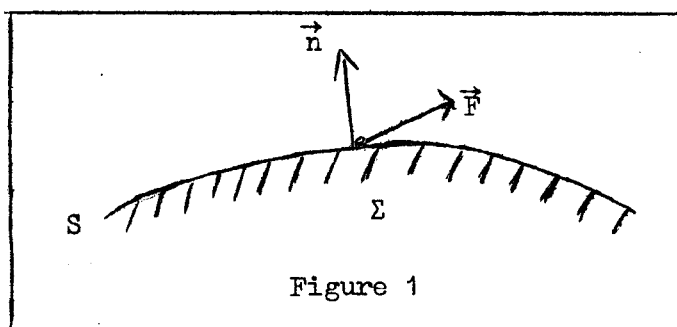


Figure 1

rigide Σ . La position de A peut être repérée par deux paramètres (par exemple, des coordonnées curvilignes convenables choisies sur S).

L'effort de liaison exercé par S sur A est un torseur uniforce (A, \vec{F}) . On rencontre en pratique des cas où la liaison est bilatérale,

c'est à dire où A est astreint à rester sur S quoi qu'il arrive, et d'autres où elle est unilatérale, c'est à dire où A est libre de quitter S en allant d'un côté de cette surface (le côté de l'extérieur de Σ). Lorsque la liaison est bilatérale, la projection de \vec{F} sur la normale à S au point A , peut être de sens quelconque. Lorsque cette liaison est unilatérale, elle est nécessairement dirigée du côté de S vers lequel A est libre de se déplacer :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} \geq 0, \quad \vec{n} \text{ normal à } S \text{ dirigé vers l'extérieur de } \Sigma$$

6.2.2 Point matériel assujéti à rester sur une courbe.

Ce cas est assez analogue au précédent. La courbe C peut par exemple être matériellement réalisée par une tige de section négligeable, et le corps A par un anneau de dimensions négligeables enfilé sur cette tige et libre de coulisser. La position de A peut alors être reprérée par un paramètre (par exemple l'abscisse curviligne sur C , une fois une origine et un sens choisis sur cette courbe).

L'effort de liaison exercé sur A est (comme c'est toujours le cas dans le cas d'un point matériel) un torseur uniforce (A, \vec{F}) .

6.2.3 Corps rigides en contact par une partie de leur surface.

Considérons deux corps rigides A_1 et A_2 en contact par une partie Σ de leur surface (qui éventuellement, peut être réduite à un nombre fini de points). Comme dans le cas du point matériel assujetti à rester sur une surface, on peut en pratique rencontrer des cas où la liaison est bilatérale ou unilatérale ; dans ce dernier cas les deux corps peuvent au cours de leur mouvement, cesser d'être en contact, et sont seulement astreints à ne pas s'interpénétrer.

Le choix de paramètres pour décrire la position des deux corps en contact est difficile dans le cas général, et on n'étudiera ce problème que dans quelques cas particuliers.

a) Cas où la surface de contact est plane.

Dans ce cas, une fois la position d'un des deux corps A_1 fixée, la position de l'autre corps A_2 est déterminée par trois paramètres (par exemple, la position d'un point de A_2 situé sur la surface de contact, et l'angle que fait un vecteur lié à A_2 parallèle au plan de contact, avec un autre vecteur lié à A_1 et parallèle à ce même plan). L'effort exercé par A_1 sur A_2 est

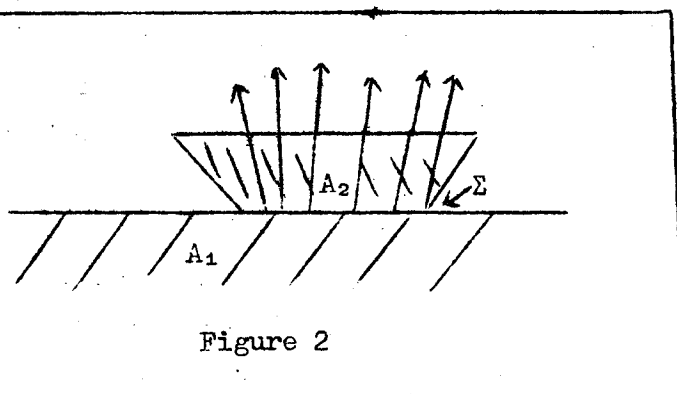


Figure 2

le plus souvent schématisé par un champ de vecteurs forces défini sur la surface de contact Σ (voir chapitre III, paragraphe 3.6).

Lorsque la liaison est unilatérale ces vecteurs sont astreints à être dirigés vers l'extérieur de A_1 .

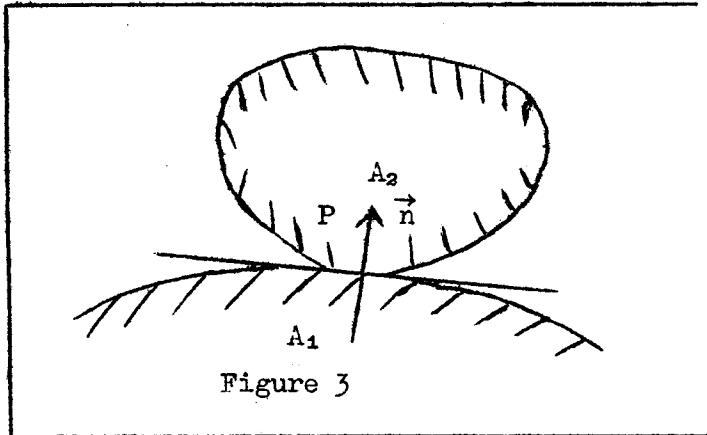
On rencontre encore des cas assez analogues où la position de A_2 , une fois celle de A_1 fixée, dépend de trois, deux ou un seul paramètres :

- cas où la surface de contact est sphérique (3 paramètres);
- cas où cette surface est un cylindre de révolution (2 paramètres)
- cas où c'est un cylindre à base quelconque, A_2 pouvant coulisser relativement à A_1 (1 paramètre)
- cas où c'est une surface de révolution quelconque, A_2 pouvant tourner relativement à A_1 (1 paramètre).

Des exemples de ces situations sont fournis par les articulations étudiées ci-après.

b) Contact ponctuel.

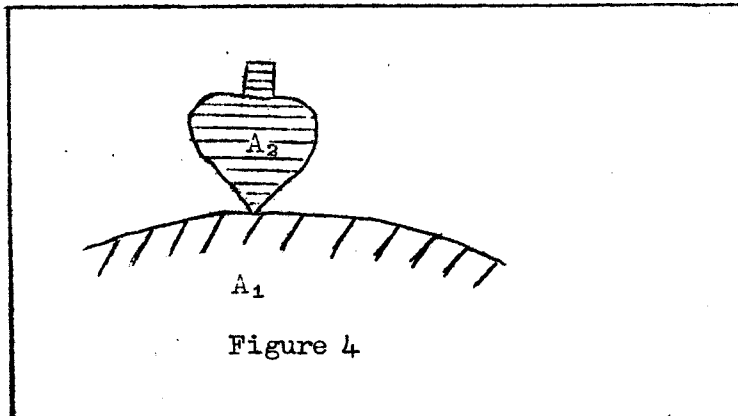
Supposons les deux corps A_1 et A_2 connexes et limités par une surface régulière (c'est à dire ayant en tout point un plan tangent). Les deux corps sont en contact, en un point P . Le plan tangent au point P aux surfaces limitant les deux corps est le même. On voit que la position de A_2 , une fois celle de A_1 fixée, est déterminée par 5 paramètres : deux pour déterminer la position du point P relativement à A_1 , deux pour déterminer la position de ce point relativement à A_2 et un pour déterminer l'orientation de A_2 (encore libre de tourner autour de la normale commune, une fois P fixé relativement aux deux corps).



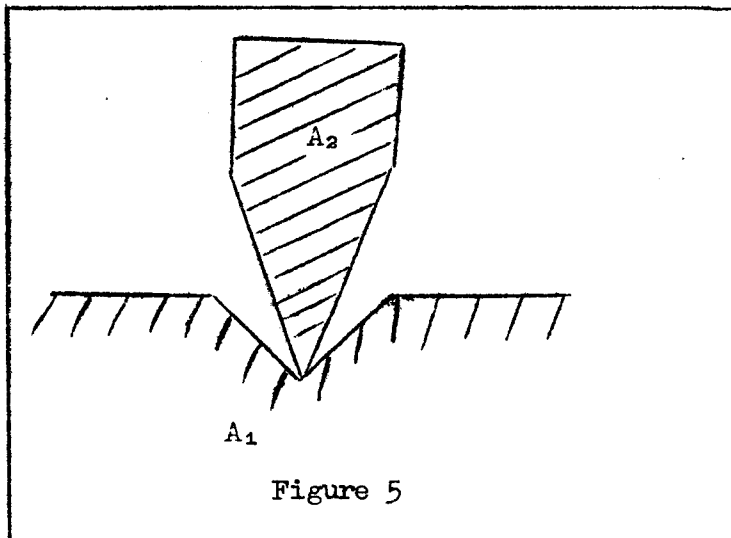
tourner autour de la normale commune, une fois P fixé relativement aux deux corps).

L'effort exercé par A_1 sur A_2 est schématisé par un torseur qui (lorsqu'on ne néglige pas le frottement) n'est pas nécessairement uniforce. On reviendra sur ce point dans la paragraphe 6.6.

On rencontre d'autres exemples de contact ponctuel, dans lesquels le point



de contact est fixé, soit relativement à un des deux corps (cas où A_2 comporte une pointe reposant sur la surface de A_1) ou relativement aux deux corps (cas où A_2 présente une pointe et A_1 un creux conique). Une fois la position de A_1 fixée, celle de A_2 est déterminée, dans chacun de ces cas, par cinq et trois paramètres respectivement.



c) Articulation rotoïde

A_1 et A_2 sont en contact par une surface de révolution quelconque,

de sorte que A_2 peut uniquement tourner relativement à A_1 autour de l'axe de révolution. Une fois la position de A_1 fixée, celle de A_2 dépend donc d'un seul paramètre. On remarquera que tous les points de l'axe de révolution sont cinématiquement liés à la fois aux deux corps.

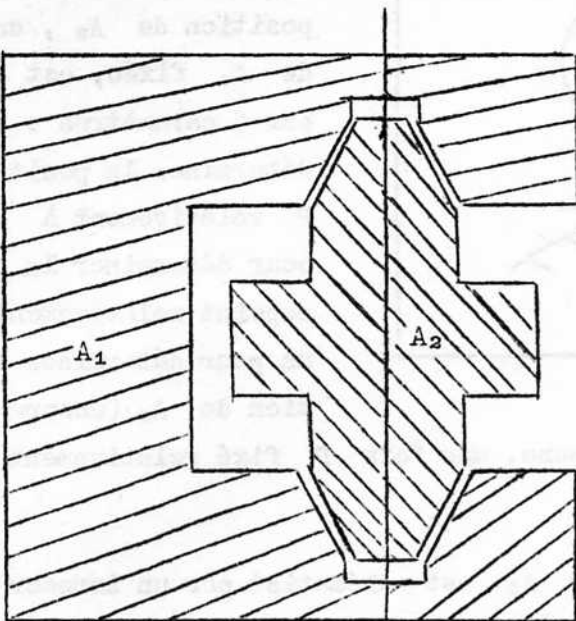


Figure 6

d) Articulation sphérique

A_1 et A_2 sont en contact par une surface sphérique.

On remarquera que le centre O de la sphère est cinématiquement lié à la fois aux deux corps. Une fois la position de A_1 fixée, celle de A_2 dépend de trois paramètres (voir chapitre 2, paragraphe concernant le mouvement d'un solide ayant un point fixe : angles d'Euler). Un résultat analogue est obtenu grâce au contact ponctuel représenté sur la figure 5.

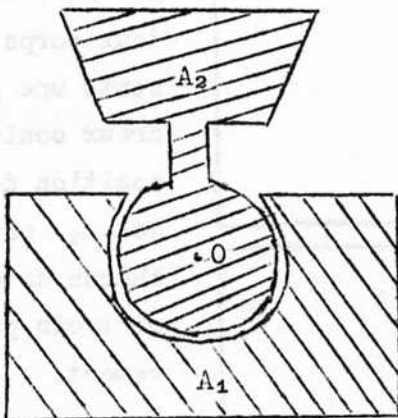
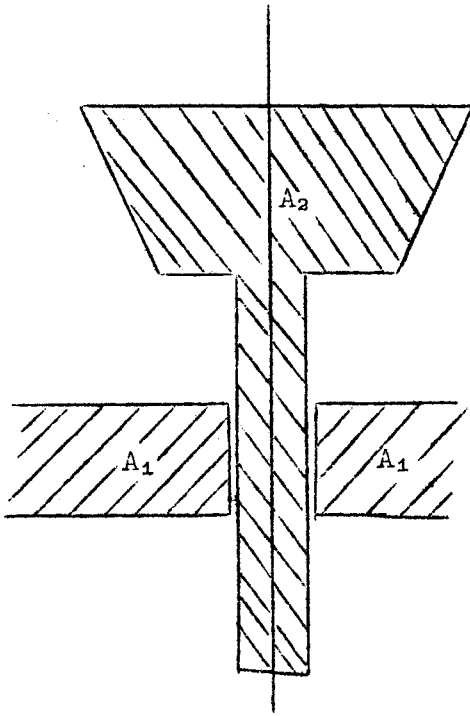


Figure 7

e) Articulation verrou

A_1 et A_2 sont en contact par une surface cylindrique de révolution. Lorsque la position de A_1 est fixée, celle de A_2 dépend de deux paramètres (car A_2 peut à la fois tourner et coulisser le long de l'axe de révolution).

Figure 8

6.3. Exemple de liaison cinématique : roulement sans glissement.

Revenons à l'exemple de deux corps convexes A_1 et A_2 limités par une surface régulière, en contact ponctuel à l'instant t au point P . Soit \mathcal{R} un référentiel arbitraire. Soit M_1 le point cinématiquement lié à A_1 et M_2 le point cinématiquement lié à A_2 qui, à l'instant considéré t , coïncident avec P . Soient, respectivement $\vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2(t)$ les vitesses, respectivement de M_1 et de M_2 , relativement au référentiel \mathcal{R} . On suppose qu'au cours de leur mouvement, les deux corps A_1 et A_2 restent en contact (le point de contact pouvant toutefois se déplacer, à la fois relativement à chacun des deux corps).

Définition. On appelle vitesse de glissement de A_2 relativement à A_1 , à l'instant t , le vecteur :

$$\vec{V}_{2-1}(t) = \vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)$$

Remarques. 1°) La vitesse de glissement $\vec{V}_{2-1}(t)$ ne dépend pas du choix du référentiel \mathcal{R} . Cela résulte en effet de la loi de composition des vitesses. En particulier, on peut prendre \mathcal{R} cinématiquement lié à A_1 et on voit que \vec{V}_{2-1} est la vitesse de M_2 relativement à ce repère.

2°) On a évidemment

$$\vec{V}_{12}(t) = -\vec{V}_{21}(t)$$

3°) On montre, par des considérations purement géométriques, que la vitesse de glissement $\vec{V}_{21}(t)$ est parallèle au plan tangent au point de contact P à l'instant considéré. Cette propriété résulte en effet de l'hypothèse de persistance du contact entre les deux corps au cours de leur mouvement.

Définition. On dit que les deux corps A_1 et A_2 (supposés en contact ponctuel pendant toute la durée de leur mouvement) roulent sans glisser l'un sur l'autre, si à tout instant la vitesse de glissement de A_2 relativement à A_1 (ou, ce qui revient au même, celle de A_1 relativement à A_2) est nulle.

Remarques. 1°) Lorsque A_1 et A_2 roulent sans glisser l'un sur l'autre, la vitesse du point M_2 (cinématiquement lié à A_2 et coïncidant à l'instant t avec le point de contact) relativement au référentiel lié à A_2 , est nulle. Par conséquent, le champ de vecteurs vitesse du corps A_2 relativement à A_1 (équiprojectif, puisque A_2 est rigide) est une rotation infinitésimale, dont l'axe instantané $\Delta(t)$ passe par le point de contact P . On dit que le mouvement relatif de A_2 (par rapport à A_1) est, à l'instant t , un mouvement de roulement pur si $\Delta(t)$ est contenu dans le plan tangent en P aux deux corps. C'est un mouvement de pivotement pur si cet axe est au contraire normal au plan tangent.

2°) On étudierait de même le roulement sans glissement d'un cylindre sur un plan, d'un cône sur un plan, ou encore d'un cylindre sur un autre cylindre d'axe parallèle, d'un cône sur un autre cône de même sommet. Dans tous ces cas, le contact a lieu le long d'une génératrice et tous les points cinématiquement liés à l'un des corps A_2 qui, à l'instant considéré t , coïncident avec un point de contact, ont relativement à l'autre solide A_1 , une vitesse nulle à cet instant. Par conséquent le champ des vitesses de A_2 relativement à A_1 à cet instant est une rotation infinitésimale dont l'axe est la génératrice de contact.

4. Le paramétrage d'un système de corps rigides soumis à des liaisons.

Les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe 6.2. Afin d'étudier le système considéré, on doit tout d'abord choisir des paramètres permettant de déterminer, relativement au référentiel choisi, les positions de tous les corps rigides qui le constituent, compte tenu de l'existence des liaisons de ces corps entre eux et avec d'autres corps extérieurs.

On va pour commencer, ne tenir compte que des liaisons géométriques, en les supposant toutes bilatérales. On donnera ensuite quelques brèves indications sur le traitement des liaisons unilatérales, puis des liaisons cinématiques.

6 . 4 . 1 . Cas d'un corps rigide libre.

Le système considéré est constitué d'un corps rigide unique A libre (c'est à dire qui n'est soumis à aucune liaison). Afin de déterminer la position de A relativement au référentiel choisi, on peut procéder de la manière suivante. On choisit un repère orthonormé fixe (relativement au référentiel choisi) $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et un autre repère orthonormé, de même orientation, cinématiquement lié à A , $(M, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Afin d'alléger l'écriture, on ne mentionne pas dans les notations, le fait que le point M , ainsi que les vecteurs $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, dépendent du temps t . On voit alors que déterminer la position de A , équivaut à déterminer le changement de repère, permettant de passer du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, au repère $(M, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Pour cela, on peut se donner :

- les coordonnées (A_1, A_2, A_3) du point M , dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- la matrice orthogonale (B_{ij}) ($1 \leq i, j \leq 3$) de changement de base, dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée par les composantes de $\vec{\epsilon}_j$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On a alors :

$$(6.4.1) \quad \vec{OM} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$$

$$(6.4.2) \quad B_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{\epsilon}_j$$

On rappelle que les 9 coefficients de la matrice (B_{ij}) ne sont pas indépendants. Cette matrice dépend en fait seulement de trois paramètres. On a vu (chapitre II, paragraphe 2 . 8 . D) qu'on pouvait par exemple choisir pour paramètres les trois angles d'Euler ψ, θ et φ . On voit donc que l'ensemble des positions de A , relativement au référentiel \mathcal{R} , appelé espace de configuration du système, est paramétré par six paramètres indépendants, par exemple $A_1, A_2, A_3, \psi, \theta$ et φ . On dit que cet ensemble est une variété différentielle de dimension 6. Du point de vue géométrique, il est isomorphe à $\mathbb{R}^3 \times S O(3)$ (les trois coordonnées de M, A_1, A_2 et A_3 , définissant un point de \mathbb{R}^3 , et les trois angles d'Euler un élément du groupe des rotations $S O(3)$).

Remarques importantes. 1°) Pour une position donnée du corps A , on peut changer les choix des repères $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié au référentiel choisi et $(M, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ lié à A .

En conséquence, les paramètres $A_1, A_2, A_3, \psi, \theta$ et φ servant à repérer la position de A , se trouveront modifiés. On dit qu'on a effectué un changement de carte sur l'espace de configuration du système.

2°) D'ailleurs, même sans modifier le choix des repères $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(M, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$, la définition des angles d'Euler n'est pas déterminée de manière unique, et choisir un des systèmes possibles d'angles d'Euler, revient à choisir une carte de l'espace de configuration. Ainsi, on peut remplacer le vecteur \vec{u} (voir chapitre III, paragraphe 2.8.d) qui sert à définir l'angle de précession $\psi = (\vec{e}_1, \vec{u})$, par son opposé ; ψ est alors remplacé par $\psi + \pi$; l'angle de nutation θ est remplacé par $-\theta$ (car \vec{u} détermine l'orientation du plan dans lequel est mesuré l'angle θ), et l'angle de rotation propre φ par $\varphi + \pi$. D'autre part, les angles d'Euler sont évidemment définis modulo 2π .

3°) Les systèmes possibles d'angles d'Euler correspondant à une position donnée du corps A , sont, en général, discrets. Cela signifie que lorsqu'un de ces systèmes est choisi on peut, pour les positions de A "voisines" d'une position donnée, suivre de manière continue la variation des angles d'Euler. Toutefois, pour certaines positions du corps A , il n'en est plus de même. Ainsi par exemple, lorsque \vec{e}_3 et $\vec{\varepsilon}_3$ sont confondus, \vec{u} est indéterminé dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , de sorte que les deux angles ψ et φ sont arbitraires, seule leur somme ayant une signification intrinsèque. On voit ainsi qu'on ne peut pas choisir un système unique de six paramètres scalaires pour représenter toutes les positions possibles du corps A , de telle manière que l'ensemble des valeurs de ce système de six paramètres soit en bijection avec l'ensemble des positions de A , et que ces paramètres varient de manière continue lorsque la position de A varie de manière continue. On dit que plusieurs cartes sont nécessaires, pour représenter l'espace de configuration. Toutefois pour toute position du corps A , on peut trouver une carte (c'est à dire un système de paramètres) utilisable pour cette position, et toutes les positions suffisamment "voisines".

6.4.2. Cas d'un système soumis à des liaisons géométriques bilatérales. Notion d'espace de configuration.

Considérons maintenant le cas d'un système de k corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k , soumis à des liaisons géométriques bilatérales soit entre eux, soit avec d'autres corps extérieurs au système (ces derniers pouvant être fixes ou mobiles au cours du temps, leur mouvement étant alors considéré comme donné).

Ainsi qu'on l'a vu ci-dessus on peut, pour repérer la position de chacun des corps A_i , choisir 6 paramètres, de telle sorte que pour les positions de A_i voisines d'une position donnée, il y ait une correspondance bijective et bicontinue entre les positions de A_i et les valeurs possibles de ces 6 paramètres. D'où une famille de $6k$ paramètres q_1, q_2, \dots, q_{6k} , dont l'ensemble des valeurs est en bijection avec l'ensemble des positions du système suffisamment voisines d'une position donnée.

La position d'un point M quelconque du système, pourra s'exprimer au moyen des paramètres q_i , sous la forme :

6.4.3)

$$M = M(q_1, q_2, \dots, q_{6k}, t)$$

On remarque que, dans cette expression, le temps t peut intervenir explicitement. Lorsque c'est le cas (au moins pour les points M appartenant à l'un des corps rigides constituant le système) on dit que le paramétrage choisi dépend du temps. Dans le cas contraire on dit que ce paramétrage est indépendant du temps.

Il est facile de donner des exemples simples de cas où le choix d'un paramétrage dépendant du temps est naturel : pour un système situé dans un véhicule en mouvement (un navire par exemple) et dont le mouvement est connu en fonction du temps, il peut-être préférable de choisir un paramétrage tel qu'à des valeurs fixées des q_i , corresponde une position du système fixée relativement au véhicule, mais non relativement au référentiel \mathcal{R} dans lequel on étudie le mouvement. Dans ce cas, t interviendra explicitement dans le second membre des expressions 6.4.3.

L'existence de liaisons géométriques bilatérales se traduit par un certain nombre ℓ de relations que doivent vérifier les paramètres q_i , de la forme :

(6.4.4)

$$F_p(q_1, q_2, \dots, q_{6k}, t) = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

On remarque que le temps t peut intervenir explicitement dans ces relations (tout comme dans les relations (6.4.3)). Cela est naturel, si certains des corps A_i sont soumis à des liaisons avec des corps extérieurs au système, mobiles au cours du temps. On dira que les liaisons sont indépendantes du temps si, lorsque le paramétrage choisi est lui-même indépendant du temps, t n'intervient pas explicitement dans les relations (6.4.4).

Dans la plupart des exemples rencontrés en pratique, les fonctions F_p sont différentiables, et le système (6.4.3) est, pour chaque t fixé, de rang égal à ℓ . Cela signifie que la matrice rectangulaire à ℓ lignes et $6k$ colonnes :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_{6k}, t) \right)$$

est de rang ℓ (dans le domaine considéré de variation des paramètres q_i et du temps). En modifiant si nécessaire l'ordre de numérotation des q_i , on peut supposer non nul le déterminant de la matrice constituée par les ℓ dernières colonnes de la précédente ($6k - \ell + 1 \leq i \leq 6k$). Un important théorème de Calcul différentiel (le théorème des fonctions implicites) montre alors qu'on peut, dans le domaine considéré, choisir librement les valeurs des $6k - \ell$ premiers paramètres q_i ($1 \leq i \leq 6k - \ell$), les ℓ autres étant alors déterminés en fonction des précédents et du temps par les relations (6.4.3).

On voit alors que la position du système (au moins pour les positions voisines d'une position particulière choisie d'avance) peut, à un instant t fixé, être déterminée par la donnée de $6k - \ell$ paramètres q_i . On appelle espace de configuration du système à l'instant t , l'ensemble des positions du système respectant les liaisons géométriques bilatérales imposées à cet instant. Le résultat précédent s'exprime en disant que cet espace de configuration (à l'instant t) est une variété différentielle de dimension $6k - \ell$.

Le choix des paramètres q_i peut, en général, être fait d'une infinité de façons. Chacun de ces choix établit une bijection entre une partie de l'espace de configuration et une partie ouverte de $\mathbb{R}^{6k - \ell}$, qu'on appelle une carte de l'espace de configuration. En général, plusieurs cartes sont nécessaires pour recouvrir la totalité de l'espace de configuration (les domaines de ces cartes pouvant bien entendu, se "chevaucher").

Le concept d'espace de configuration peut paraître un peu abstrait. Toutefois, il est dans la pratique très important. Il faut surtout bien comprendre que l'espace de configuration d'un système à un instant donné est un être géométrique qui possède une signification intrinsèque, indépendamment du choix des paramètres q_i (c'est à dire des cartes) retenu pour le décrire. On doit considérer que ces paramètres q_i sont des "coordonnées locales" permettant de repérer les points de l'espace de configuration, exactement comme les coordonnées cartésiennes permettent de repérer la position d'un point dans un espace affine (une fois un repère affine choisi). Mais alors que, pour un espace affine, il suffit d'une seule carte pour couvrir tout l'espace, plusieurs cartes sont nécessaires dans le cas général d'une variété différentielle quelconque.

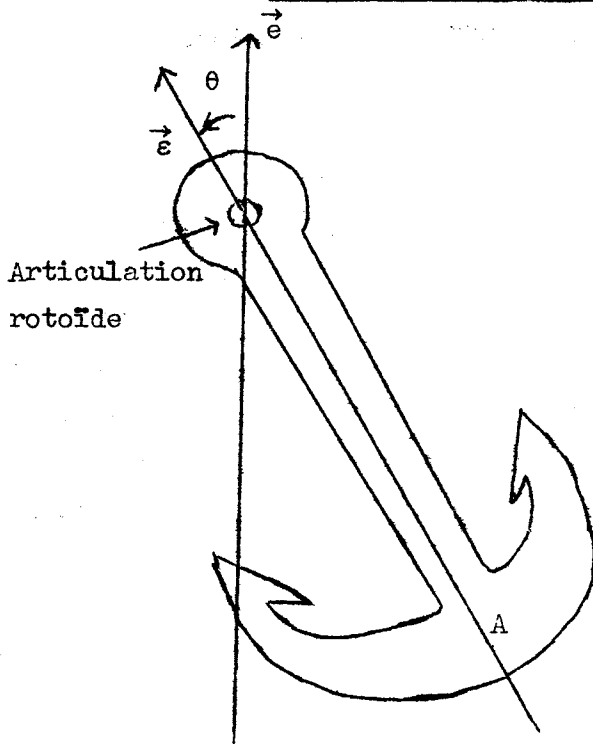
6.4.3. Exemples.

a) Corps solide ayant un point fixe.

Le système étudié est constitué d'un corps solide unique A , lié à un bâti fixe (par rapport au référentiel \mathcal{R} considéré) par une articulation sphérique.

Le centre de cette sphère est donc un point de A fixe dans le référentiel \mathcal{R} . Comme on l'a vu dans le chapitre II, la position de A peut être repérée par trois paramètres, par exemples des angles d'Euler pour un choix convenable de repères. L'espace de configuration est le groupe $SO(3)$.

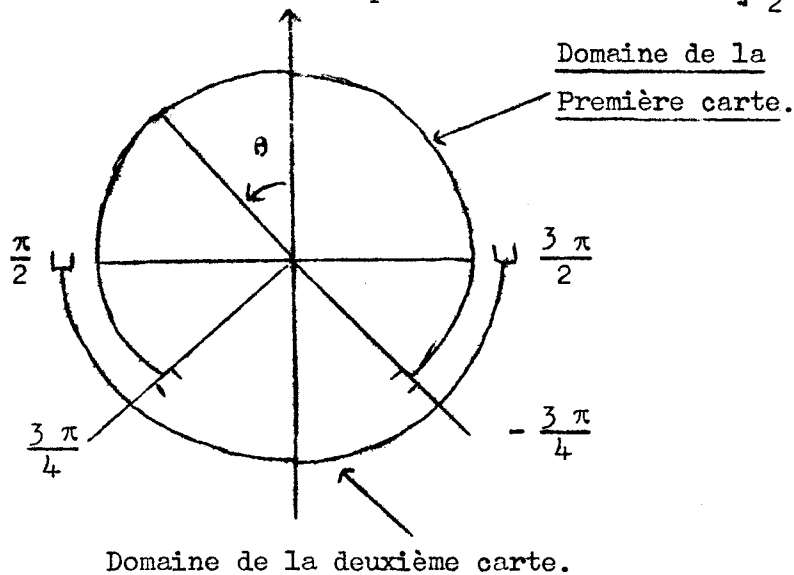
b) Corps solide lié à un bâti par une articulation rotoïde.



Supposons choisie une orientation de l'axe de la liaison rotoïde (perpendiculaire au plan de la figure), et considérons deux vecteurs unitaires normaux à cet axe, l'un \vec{e} fixe dans le référentiel \mathcal{R} considéré, l'autre \vec{e} lié au corps solide A . La position de A est déterminée par la donnée de l'angle orienté $\theta = (\vec{e}, \vec{e})$.

Dans cet exemple, l'espace de configuration est de dimension 1, et il est facile de l'identifier avec le cercle trigonométrique S^1 (la position de A étant représentée par le point d'argument θ du cercle trigonométrique). On voit que deux cartes au moins sont nécessaires pour couvrir la totalité de l'espace de configuration, par exemple :

- une carte pour θ variant dans l'intervalle $]-\frac{3\pi}{4}, +\frac{3\pi}{4}[$
- une carte pour θ variant dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

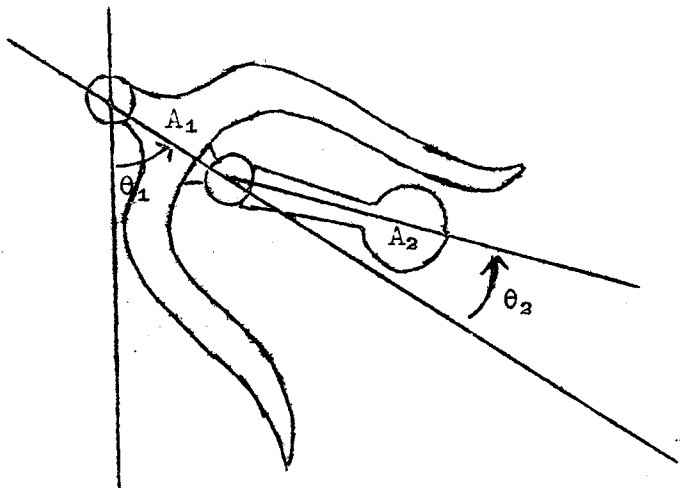


On pourrait penser qu'en faisant varier θ dans $[0, 2\pi[$ on pourrait se contenter d'une "carte" unique. Il n'en est rien car si, au cours de son mouvement le corps solide vient à traverser la position pour laquelle \vec{e} et \vec{e} sont confondus, l'angle θ

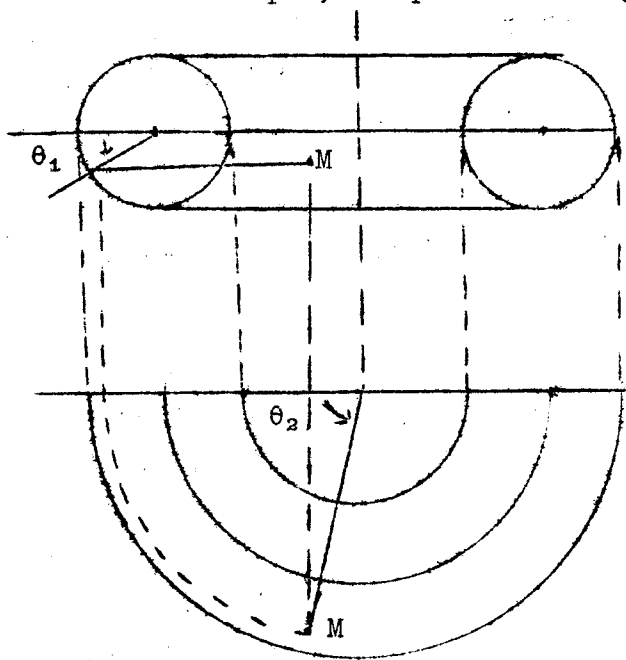
passera brusquement de la valeur 0 à une valeur très voisine de 2π (ce qui est très gênant si θ est une variable apparaissant dans une équation différentielle par exemple). Par contre avec deux cartes dont les domaines se "chevauchent" comme indiqué ci-dessus, on peut à chaque instant choisir une carte convenant à cet instant et aux instants suffisamment voisins.

c) Pendule double.

Considérons un système constitué par deux corps solides A_1 et A_2 , articulés entre eux par une articulation rotoïde. A_1 est, de plus, articulé sur un bâti fixe (dans le référentiel \mathcal{R}) par une autre articulation rotoïde. Pour simplifier la figure on a supposé les axes de ces deux articulations rotoïdes parallèles (cette limitation n'étant pas indispensable). Comme le montre la figure (qui prétend représenter une cloche et son battant) la position du système peut être repérée par deux angles θ_1 et θ_2 .



Dans cet exemple, l'espace de configuration peut être identifié à un tore T^2 : à toute position du système correspond en effet un point unique d'un tore, de latitude θ_1 et de longitude θ_2 . (Bien entendu l'espace de configuration effectif n'est qu'une partie du tore, la cloche et son battant étant astreints à ne pas s'interpénétrer).



6 . 4 . 4 . Liaisons géométriques unilatérales.

Revenons aux notations employées dans le paragraphe 6.4.2 . Lorsque certaines des liaisons auxquelles est soumis le système étudié sont unilatérales, on peut généralement en tenir compte en remplaçant certaines des égalités (6.4.4) que doivent vérifier les paramètres q_i , par des inégalités, de la forme :

$$(6.4.5) \quad F_p (q_1, q_2, \dots, q_{sk}, t) \geq 0$$

L'étude de systèmes comportant des liaisons unilatérales est en général plus difficile que celle des systèmes dont toutes les liaisons sont bilatérales. C'est pourquoi on commence souvent par supposer toutes les liaisons bilatérales. Une fois résolu le problème dans ces hypothèses, on cherche à partir de quel instant les efforts de liaison ne vérifient plus les conditions exprimant le caractère unilatéral de la liaison (voir paragraphe 6.5.2 ci-après). On doit alors reprendre l'étude du système, à partir de l'instant ainsi déterminé, en supprimant la liaison correspondante.

6 . 4 . 5 . Espace des états cinématiques.

Revenons aux hypothèses et notations du paragraphe 6.4.2 :

On étudie, relativement à un référentiel R , le mouvement d'un système constitué de k corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k , soumis à un certain nombre de liaisons, que nous supposons pour le moment toutes géométriques, et bilatérales.

Définition. On appelle état cinématique du système à un instant t , la donnée à cet instant de la position et du champ de vecteurs vitesse (équiprojectif) de chacun des corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k qui constituent le système, relativement au référentiel considéré R .

Si tous les corps rigides constituant le système sont libres (sans liaisons) il est facile de voir que pour définir un état cinématique du système, $12k$ paramètres sont nécessaires et suffisants. En effet, la position de chaque corps A_i dépend de 6 paramètres; le champ de vecteurs vitesses de ce corps, étant équiprojectif, dépend lui aussi de 6 paramètres. Ceci traduit le fait que l'ensemble des états cinématiques possibles du système à l'instant considéré t est, dans le cas de k corps rigides libres, une variété différentielle de dimension $12k$. Cet ensemble est appelé l'espace des états cinématiques du système à l'instant t ; (on l'appelle aussi parfois, de manière impropre, espace des phases du système; il nous semble préférable de réserver ce nom à l'ensemble des positions et impulsions du système).

Dans le cas où le système est soumis à un certain nombre de liaisons géométriques bilatérales, on peut encore définir l'espace des états cinématiques du système à l'instant considéré t , comme l'ensemble des positions possibles et des champs de vecteurs vitesses possibles des corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k qui constituent le système compatibles avec les liaisons. D'après les formules (6.4.3) et (6.4.4), la position d'un point cinématique déterminé M du système, s'exprime au moyen de $6k$ paramètres q_i et du temps t par une relation de la forme :

$$(6.4.6) \quad M = M(q_1, \dots, q_{6k}, t)$$

les paramètres q_1, \dots, q_{6k} étant astreints à vérifier les ℓ égalités, traduisant l'existence de liaisons géométriques :

$$(6.4.7) \quad F_p(q_1, \dots, q_{6k}, t) = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

Dérivons (6.4.6) par rapport à t . On voit que la vitesse du point cinématique M s'exprime par :

$$(6.4.8) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

les quantités $\frac{dq_i}{dt}$ étant astreintes à vérifier les ℓ relations, obtenues en dérivant (6.4.7) :

$$(6.4.9) \quad \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial F_p}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_{6k}, t) \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F_p}{\partial t} = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

On voit ainsi qu'un état cinématique du système, à l'instant t , est déterminé par la donnée de $12k$ paramètres $q_1, q_2, \dots, q_{6k}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_{6k}}{dt}$ astreints de plus à vérifier les 2ℓ égalités (6.4.8) et (6.4.9). On a vu, paragraphe 6.4.2), que la matrice $(\frac{\partial F_p}{\partial q_i})$ ($1 \leq i \leq 6k, 1 \leq p \leq \ell$) était de rang ℓ , et que par conséquent sur les $6k$ paramètres q_i , $6k - \ell$ peuvent être choisis arbitrairement, les ℓ autres étant alors déterminés par (6.4.7). De même, sur les $6k$ paramètres $\frac{dq_i}{dt}$, $6k - \ell$ peuvent être choisis arbitrairement (ceux correspondant aux valeurs de l'indice i pour lesquelles les q_i peuvent être choisis arbitrairement), les ℓ autres étant alors déterminés par (6.4.9).

Ce qui précède s'interprète en disant que l'espace des états cinématiques à l'instant t est une variété différentielle de dimension $12k - 2\ell$.

Remarques 1°) On a ci-dessus considéré les $\frac{d q_i}{d t}$ comme des paramètres, auxquels on peut attribuer des valeurs arbitraires. On doit, de ce point de vue, ne plus nécessairement les considérer comme les dérivées des q_i par rapport à t , car on recherche l'ensemble des états cinématiques possibles du système à l'instant t , et non l'état cinématique particulier correspondant à la position réelle et au champ de vitesses réel de chaque corps rigide constituant le système, pour le mouvement qu'a effectivement ce système. C'est pourquoi on utilise souvent la notation \dot{q}_i au lieu de $\frac{d q_i}{d t}$.

2°) Lors de la détermination du nombre de paramètres ($6k$) dont dépend la position du système à un instant t particulier, on a supposé que les corps rigides A_i étaient tous de vrais solides bi ou tridimensionnels. Il convient, bien entendu, de modifier cette évaluation lorsque certains de ces corps sont des points matériels ou des segments de droite. La position d'un point matériel dépend en effet de 3 paramètres, celle d'un segment de droite de 5 paramètres (au lieu de 6 paramètres pour un "vrai" solide).

3°) L'espace des états cinématiques du système à l'instant t est lié, d'une manière assez simple, à l'espace de configuration de ce système à ce même instant (ce dernier ayant été défini paragraphe 6.4.2). On montre par exemple en Géométrie différentielle que, dans le cas où les liaisons sont indépendantes du temps, l'espace des états cinématiques du système est ce que l'on appelle l'espace fibré tangent à l'espace de configuration. D'une manière intuitive, on peut s'imaginer l'espace de configuration comme une "surface généralisée", de dimension $6k - \ell$, plongée dans \mathbb{R}^{6k} ; un point de l'espace des états cinématiques est alors constitué par un doublet, formé d'un point de cette "surface", et d'un vecteur tangent à cette surface en ce point. Dans le cas où les liaisons dépendent du temps la situation est plus compliquée et il est préférable de raisonner sur l'"espace-temps de configuration" (ensemble dont chaque point est un doublet formé d'un instant t , et d'une position possible du système à cet instant). Ces indications, destinées à donner au lecteur quelques aperçus sur la description moderne d'un système mécanique, ne sont pas au programme.

Lorsque le système considéré comporte des liaisons dépendant du temps, nous aurons plus loin à considérer des "mouvements virtuels" du système compatibles avec les liaisons supposées figées à l'instant t . Nous allons définir cette notion.

Définition. Considérons un système dont la position (au voisinage d'une position déterminée) est, à l'instant t , déterminée par la donnée de $6k$ paramètres q_1, q_2, \dots, q_{6k} . Ces paramètres sont supposés astreints à vérifier les ℓ relations indépendantes (6.4.7), traduisant l'existence de liaisons géométriques bilatérales.

a) On appelle mouvement virtuel compatible avec les liaisons figées à l'instant t, la donnée d'une famille à 1 paramètre θ , de valeurs $q_1(\theta), q_2(\theta), \dots, q_{sk}(\theta)$ des paramètres q_i , θ variant dans un intervalle $]\theta_1, \theta_2[$, telle que, pour tout θ , les relations (6.4.7) soient vérifiées :

$$(6.4.10) \quad F_p(q_1(\theta), q_2(\theta), \dots, q_k(\theta), t) = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell, \theta_1 < \theta < \theta_2)$$

On supposera dans la suite le mouvement virtuel considéré différentiable, ce qui signifie que les $q_i(\theta)$ sont des fonctions différentiables de θ .

b) Ayant un mouvement virtuel compatible avec les liaisons figées à l'instant t, choisissons une valeur particulière θ_0 du paramètre ($\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$) et calculons, pour chaque point M du système, la dérivée de M (fonction de θ , par l'intermédiaire des q_i) par rapport à θ , pour $\theta = \theta_0$. On obtient en dérivant (6.4.6), où les q_i sont considérés comme des fonctions de θ et où t est fixé :

$$(6.4.11) \quad \left. \frac{d \vec{M}}{d \theta} \right|_{\theta = \theta_0} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} (q_1(\theta_0), \dots, q_k(\theta_0), t) \frac{d q_i(\theta_0)}{d \theta}$$

On dit que $\left. \frac{d \vec{M}}{d \theta} \right|_{\theta = \theta_0}$ est la vitesse virtuelle du point cinématique considéré et pour la valeur θ_0 du paramètre. Lorsque le point \vec{M} considéré parcourt l'un des corps rigides A_i constituant le système, les vecteurs

$\left. \frac{d \vec{M}}{d \theta} \right|_{\theta = \theta_0}$ forment évidemment un champ de vecteurs équiprojectif \vec{W}_i . On dit

que ce système de k champs de vecteurs équiprojectifs $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \dots, \vec{W}_k$ est un système de champs de vecteurs vitesse virtuels compatible avec les liaisons, figées à l'instant t.

c) Réciproquement, considérons une position du système à l'instant t, définie par la donnée des k paramètres q_i , respectant les liaisons (c'est à dire vérifiant (6.4.7)). Donnons nous, pour chacun des corps rigides A_i , un champ de vecteurs équiprojectif \vec{W}_i . On dit que le système de champs de vecteurs équiprojectifs $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \dots, \vec{W}_k$ est un système de champs de vecteurs vitesse virtuels compatible avec la position considérée du système à l'instant t, et les liaisons figées à cet instant, s'il existe un mouvement virtuel compatible avec les liaisons figées à l'instant t ($q_1(\theta), q_2(\theta), \dots, q_{sk}(\theta)$, avec $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$), et une valeur particulière θ_0 du paramètre ($\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$) tels que :

$$(6.4.12) \quad \vec{w}_i(M(t)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} (q_1(\theta_0), \dots, q_k(\theta_0), t) \frac{d q_i(\theta_0)}{d t}$$

pour tout point cinématique M du corps A_i , et pour chaque i ($1 \leq i \leq k$).

Remarques et commentaires. 1°) Il importe de bien remarquer que la variable temps t est supposée fixée lors de la définition d'un mouvement virtuel compatible avec les liaisons figées à l'instant t .

2°) Pour une position du système fixée à l'instant t (définie par la donnée des paramètres q_i , vérifiant les ℓ relations (6.4.7)), l'ensemble des systèmes de champs de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec la position considérée du système à l'instant t , et les liaisons figées à cet instant, est un espace vectoriel de dimension $6k - \ell$. En effet, un tel système de champs de vecteurs vitesse virtuels, est défini par la donnée de $6k$ paramètres $\frac{d q_i(\theta_0)}{d \theta}$, astreints à vérifier les ℓ équations linéaires indépendantes :

$$(6.4.13) \quad \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial F_p}{\partial q_i} (q_1(\theta_0), \dots, q_{6k}(\theta_0), t) \frac{d q_i(\theta_0)}{d \theta} = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

D'autre part, les champs de vecteurs équiprojectifs \vec{w}_i ($1 \leq i \leq p$) sont visiblement, d'après (6.4.12), fonctions linéaires de $(\frac{d q_1(\theta_0)}{d \theta}, \dots, \frac{d q_{6k}(\theta_0)}{d \theta})$.

3°) Comparons (6.4.9) et (6.4.13). On voit que ces expressions diffèrent par la présence, dans (6.4.9), du terme $\frac{\partial F_p}{\partial t}$.

Ceci montre que lorsque les liaisons dépendent du temps, les champs de vecteurs vitesse $\vec{v}_i(t)$ des corps A_i constituant le système, pour le mouvement réel de ce système, à l'instant t , ne constituent pas en général un système de champ de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec les liaisons figées à l'instant t . Toutefois, ils constituent un tel système dans le cas particulier où les liaisons sont indépendantes du temps.

6.4.6. Cas où des liaisons cinématiques existent.

On a vu dans le paragraphe précédent que, lorsqu'on tient compte seulement des liaisons géométriques (supposées bilatérales) un état cinématique du système, à l'instant t , était défini par la donnée de $12k$ paramètres q_1, \dots, q_{6k} , $\frac{d q_1}{d t} = \dot{q}_1, \dots, \frac{d q_{6k}}{d t} = \dot{q}_{6k}$, astreints à vérifier les 2ℓ relations (6.4.7) et (6.4.9).

Les liaisons cinématiques usuellement rencontrées se traduisent par m relations supplémentaires ($m \leq 6k - \ell$) que doivent vérifier les paramètres q_1, \dots, q_{6k} , $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{6k}$, de la forme :

$$(6.4.14) \quad \sum_{i=1}^{6k} A_{qi} (q_1, \dots, q_{6k}, t) \dot{q}_i + B_q (q_1, \dots, q_{6k}, t) = 0 \quad (1 \leq q \leq m).$$

On dira qu'un état cinématique (déterminé par la donnée, à l'instant t considéré, des $6k$ paramètres q_i et \dot{q}_i , et supposé déjà compatible avec les liaisons géométriques), est compatible avec les liaisons cinématiques, si ces paramètres vérifient, outre (6.4.7) et (6.4.9), les m relations (6.4.14).

On remarquera que ces relations (6.4.14) sont, par leur forme, très semblables aux relations (6.4.9) ; elles s'en distinguent par le fait que les coefficients A_{qi} et B_q qui interviennent dans ces relations, ne sont pas nécessairement les dérivées partielles d'une fonction des variables q_i et de t . Il peut cependant arriver qu'il existe des fonctions G_q ($1 \leq q \leq m'$) des variables q_i et de t , telles que, compte tenu de (6.4.7) et de (6.4.9), un certain nombre m' des équations (6.4.14), par exemple les m' premières, forment un système équivalent au système :

$$(6.4.15) \quad \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial G_q}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_{6k}, t) \dot{q}_i + \frac{\partial G_q}{\partial t} = 0 \quad (1 \leq q \leq m').$$

On voit alors, en intégrant (6.4.15), que les q_i devront vérifier :

$$(6.4.16) \quad G_q (q_1, \dots, q_{6k}, t) = \text{Constante.}$$

On dit alors que les liaisons cinématiques correspondantes (celles qui se traduisent par les m' premières relations (6.4.14) sont holonomes. De telles liaisons peuvent pratiquement être traitées comme des liaisons géométriques, les équations (6.4.16) étant de même forme que les équations (6.4.7) qui traduisent les liaisons géométriques, la seule différence étant qu'elles font intervenir des constantes d'intégration dont la valeur doit être déterminée d'après la position initiale du système.

Les autres liaisons cinématiques sont dites non holonomes.

Dans la suite on supposera toutes les liaisons cinématiques non holonomes (ce qui est toujours possible car on peut, soit prendre en compte les liaisons cinématiques holonomes parmi les liaisons géométriques, soit ignorer le caractère holonome de ces liaisons et les traiter comme si elles ne l'étaient pas). On a vu que compte tenu des équations (6.4.7), $6k - \ell$ des paramètres q_i peuvent être choisis arbitrairement, les ℓ autres s'exprimant alors au moyen des précédents et du temps.

Supposons le système constitué par les ℓ équations (6.4.9) et les m équations (6.4.14), de rang maximum (c'est à dire de rang $m + \ell$). Ces équations permettent alors de calculer $\ell + m$ parmi les paramètres q_i , en fonction des $6k - \ell - m$ autres, des q_i et de t .

On voit donc qu'à un instant t donné, un état cinématique compatible avec les liaisons (tant géométriques que cinématiques) est déterminé par la donnée de $12k - 2\ell - m$ paramètres ($6k - \ell$ paramètres q_i et $6k - \ell - m$ paramètres \dot{q}_i). On traduit cette propriété en disant que l'espace des états cinématiques à l'instant t compatibles avec les liaisons (géométriques et cinématiques) est une variété différentielle de dimension $12k - 2\ell - m$.

Comme dans le paragraphe précédent, on doit définir la notion de mouvement virtuel compatible avec les liaisons figées à l'instant t .

Définition. a) Considérons un mouvement virtuel compatible avec les liaisons géométriques figées à l'instant t . On a vu (paragraphe précédent) qu'il est défini par la donnée, en fonction d'un paramètre $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$, des $6k$ paramètres $q_1(\theta)$, $q_2(\theta)$, ..., $q_{6k}(\theta)$, vérifiant pour tout θ les ℓ relations (6.4.10). On dira que, de plus, ce mouvement virtuel est compatible avec les liaisons cinématiques figées à l'instant t si on a, pour tout $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ et tout q ($1 \leq q \leq m$):

$$(6.4.17) \quad \sum_{i=1}^{6k} A_{q_i}(q_1, \dots, q_{6k}, t) \frac{d q_i}{d \theta} = 0$$

b) Considérons une position du système à l'instant t , définie par la donnée des $6k$ paramètres q_i , respectant les liaisons, c'est à dire vérifiant (6.4.7). Considérons de plus un système de champs de vecteurs vitesse virtuels compatible avec la position considérée du système à l'instant t et les liaisons figées à cet instant. On a vu dans le paragraphe précédent qu'un tel système est une famille de champs de vecteurs équiprojectifs $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k$ telle qu'il existe un mouvement virtuel compatible avec les liaisons géométriques figées à l'instant t vérifiant, pour une valeur particulière θ_0 du paramètre, les conditions (6.4.12). On dit que ce système de champs de vecteurs vitesse virtuels est compatible avec les liaisons cinématiques figées à l'instant t si on peut, de plus, imposer au mouvement virtuel d'être compatible avec ces liaisons figées à l'instant t .

Remarques et commentaires. 1°) Pour une position du système fixée à l'instant t , définie par la donnée des $6k$ paramètres q_i vérifiant les ℓ relations (6.4.7), l'ensemble des systèmes de champs de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec les liaisons géométriques et cinématiques figées à cet instant, est un espace vectoriel de dimension $6k - \ell - m$.

Un tel système de champs de vecteurs vitesse virtuels est en effet défini par la donnée de $6k$ paramètres $\frac{d q_i(\theta_0)}{d \theta}$, astreints à vérifier les ℓ équations linéaires (6.4.13) et de plus, les m équations linéaires :

$$(6.4.18) \quad \sum_{i=1}^{6k} A_{q_i}(q_1(\theta_0), \dots, q_{6k}(\theta_0), t) \frac{d q_i(\theta_0)}{d \theta} = 0$$

et, par hypothèse, les $\ell + m$ équations (6.4.13) et (6.4.18) sont indépendantes.

2°) On remarque que (6.4.14) se distingue de (6.4.18) par le fait que la première équation contient un terme B_q , absent dans la seconde. Pour cette raison, si les liaisons cinématiques dépendent du temps, le mouvement réel du système n'est pas en général compatible avec ces liaisons figées à l'instant t . Il l'est par ^{contre} lorsque les liaisons cinématiques sont indépendantes du temps, car dans ce cas les termes B_q sont identiquement nuls (et les termes A_{q_i} indépendants de t).

6.5. Le théorème des puissances virtuelles.

6.5.1. Énoncé du théorème. Cas général.

Considérons un système constitué par k corps rigides A_1, A_2, \dots, A_k , dont nous étudions le mouvement relativement à un référentiel galiléen R . A un instant donné t , désignons par \mathcal{T}_i le torseur des efforts totaux (à distance et de liaison) exercés sur A_i , et par \mathcal{J}_i le torseur dynamique de ce corps.

L'application du principe de la dynamique à chacun des sous-systèmes constitué par un des corps A_i , conduit aux k équations (devant être vérifiées à chaque instant t):

$$(6.5.1) \quad \boxed{\mathcal{J}_i = \mathcal{T}_i \quad (1 \leq i \leq k)}$$

En l'absence d'efforts de liaison, les \mathcal{T}_i sont, en général, connus en fonction de la position et des champs de vecteurs vitesse des corps A_i à l'instant considéré t . Les \mathcal{J}_i s'expriment, quant à eux, au moyen des paramètres q_i ($1 \leq i \leq 6k$) qui déterminent la position des corps, et de leurs dérivées première et seconde par rapport à t . Le système (6.5.1) comporte alors $6k$ équations différentielles scalaires du second ordre (car chacune de ces équations exprime une égalité entre torseurs donc équivaut à 6 équations scalaires), pour déterminer les $6k$ fonctions de t q_i . En général un tel système est bien posé et, pour des données initiales fixées, il comporte une solution unique.

Rappelons qu'un torseur est une forme linéaire sur l'espace des champs de vecteurs équiprojectifs. Par conséquent, écrire les équations (6.5.1) équivaut manifestement à dire que, pour tout système $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k)$ de k champs de vecteurs équiprojectifs, on a :

$$(6.5.2) \quad \sum_{i=1}^k \mathcal{A}_i(\vec{w}_i) = \sum_{i=1}^k \tau_i(\vec{w}_i)$$

En effet, on peut prendre les \vec{w}_i tous nuls, sauf l'un d'entre eux, pris quelconque; on voit ainsi que (6.5.2) est bien équivalent à (6.5.1).

Pour exprimer cette propriété de manière imagée, on dit que $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ est un système de champs de vecteurs vitesse virtuels des corps A_1, \dots, A_k ;

on appelle $\sum_{i=1}^k \mathcal{A}_i(\vec{w}_i)$ la somme des puissances virtuelles des torseurs dynamiques et $\sum_{i=1}^k \tau_i(\vec{w}_i)$ la somme des puissances virtuelles des torseurs des efforts totaux exercés sur les corps A_i , pour le système de champs de vecteurs vitesse virtuels $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$. On peut énoncer :

Théorème des puissances virtuelles. Pour tout système de champs de vecteurs vitesse virtuelle, la somme des puissances virtuelles des torseurs dynamiques des corps A_i est à chaque instant égale à la somme des puissances virtuelles des torseurs des efforts totaux exercés sur ces corps.

Remarques. 1°) Ainsi qu'on l'a vu, cet énoncé équivaut à l'application du principe de la dynamique à chacun des sous-systèmes constitué par ^{UN} seul des corps A_i .

2°) Jusqu'à présent on ne s'est pas préoccupé de l'existence éventuelle de liaisons, et les systèmes de champs de vecteurs vitesse virtuels considérés, sont tout à fait quelconques.

6 . 5 . 2 . Cas où les liaisons sont parfaites.

Lorsque le système de corps A_1, A_2, \dots, A_k comporte des liaisons (de ces corps entre eux ou avec d'autres corps extérieurs), les torseurs τ_i ne peuvent pas en général s'exprimer uniquement au moyen des positions et des champs de vitesses des corps A_i à l'instant considéré. Pour cette raison, le système (6.5.1) comporte en général plus de fonctions inconnues que d'équations. Afin d'obtenir tout de même un système bien posé, on doit ajouter d'autres équations provenant de l'étude physique du comportement des liaisons, ou faire sur celles-ci des hypothèses simplificatrices. Parmi ces dernières, la plus commode consiste à supposer les liaisons parfaites. On va ci-dessous donner de cette notion une définition globale.

Nous supposons désormais que le système de corps A_1, A_2, \dots, A_k comporte des liaisons bilatérales géométriques et cinématiques qui peuvent s'exprimer comme indiqué dans le paragraphe 6.4. A chaque instant t nous exprimons le torseur \mathcal{T}_i des efforts totaux exercés sur A_i , comme une somme de deux termes :

$$(6.5.3) \quad \mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{i,d} + \mathcal{T}_{i,l}$$

où $\mathcal{T}_{i,l}$ est le torseur des efforts de liaison totaux exercés sur le corps A_i (par d'autres corps du système, ou des corps extérieurs) et $\mathcal{T}_{i,d}$ le torseur des efforts "à distance", c'est à dire autres que de liaison.

Définition. On dit que les liaisons (bilatérales, géométriques et cinématiques) auxquelles est soumis le système de corps A_1, A_2, \dots, A_k sont parfaites si, pour tout système $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k)$ de champs de vecteurs vitesse virtuels compatible avec les liaisons figées à l'instant considéré t , la somme des puis-

sances virtuelles $\sum_{i=1}^k \mathcal{T}_{i,l}(\vec{w}_i)$ des torseurs des efforts de liaisons totaux est nulle.

On verra plus loin (paragraphe 6.5.3) comment s'exprime plus concrètement cette propriété pour quelques exemples classiques de liaisons.

Remarque. Si certaines des liaisons géométriques du système, toujours supposées parfaites, sont unilatérales, la somme des puissances virtuelles $\sum_{i=1}^k \mathcal{T}_{i,l}(\vec{w}_i)$ des torseurs des efforts de liaison totaux est, non plus nulle, mais non négative, pour tout système $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k)$ de champs de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec les liaisons figées à l'instant considéré.

En appliquant le théorème des puissances virtuelles, mais en considérant seulement les systèmes de champ de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec les liaisons figées à l'instant considéré, on obtient :

Théorème. Lorsque toutes les liaisons sont parfaites (et bilatérales, géométriques ou cinématiques) la somme des puissances virtuelles des torseurs dynamiques des corps A_i est à chaque instant t égale à la somme des puissances virtuelles des efforts totaux à distance (autres que de liaison) exercés sur ces corps, pour tout système de champs de vecteurs vitesse virtuels compatibles avec les liaisons figées à cet instant :

$$(6.5.4) \quad \boxed{\sum_{i=1}^k \mathcal{A}_i(\vec{w}_i) = \sum_{i=1}^k \mathcal{T}_{i,d}(\vec{w}_i).}$$

Commentaires. 1°) Supposons tout d'abord toutes les liaisons géométriques, et s'exprimant par les ℓ équations indépendantes (6.4.7). On a vu (paragraphe 6.4.2) qu'on pouvait alors utiliser $6k - \ell$ des paramètres q_i pour repérer la position du système (les ℓ autres étant alors déterminés). On a vu aussi (paragraphe 6.4.5) que l'ensemble des systèmes de champs de vecteurs vitesse virtual compatibles avec les liaisons figées à l'instant t , était un espace vectoriel de dimension $6k - \ell$. Par conséquent, le système (6.5.4) comporte exactement $6k - \ell$ équations scalaires indépendantes, c'est à dire un nombre précisément égal à celui des paramètres servant à définir la position du système. On voit que le théorème des puissances virtuelles fournit dans ce cas un système d'équations différentielles du second ordre bien posé, pour la détermination du mouvement du système. Toutefois, il ne permet pas le calcul des efforts de liaison, qui doivent être obtenus ensuite par d'autres moyens.

2°) Supposons maintenant qu'en plus des liaisons géométriques bilatérales considérées ci-dessus, le système comporte des liaisons cinématiques se traduisant par les m équations (6.4.14) formant, avec (6.4.9), un système de $m + \ell$ équations indépendantes. On a vu (paragraphe 6.4.6) que l'ensemble des systèmes de champs de vecteurs vitesse virtual compatibles avec les liaisons figées à l'instant t , était alors un espace vectoriel de dimension $6k - \ell - m$. Le système (6.5.4) comporte donc dans ce cas exactement $6k - \ell - m$ équations différentielles scalaires du second ordre indépendantes. On va voir que, dans ce cas encore, on peut en déduire un système bien posé pour la détermination du mouvement du système. Prenons en effet pour fonctions inconnues auxiliaires les $\dot{q}_i = \frac{d q_i}{d t}$. On dispose, pour déterminer les $12k$ fonctions inconnues de t q_i et \dot{q}_i , des ℓ équations (6.4.7), des ℓ équations (6.4.9), des m équations (6.4.14), des $6k - \ell - m$ équations (6.5.4), et enfin des $6k$ équations, exprimant que les \dot{q}_i sont les dérivées des q_i par rapport à t :

$$(6.5.5) \quad \frac{d q_i}{d t} = \dot{q}_i \quad (1 \leq i \leq 6k)$$

soit, au total, $12k$ équations pour $12k$ fonctions inconnues.

3°) Le théorème des puissances virtuelles est d'un emploi particulièrement commode en Statique. Dans ce cas le membre de gauche des équations (6.5.4) (somme des puissances virtuelles des torseurs dynamiques) est évidemment nul.

4°) Dans le cas d'un système à liaisons parfaites indépendantes du temps, on peut appliquer le théorème des puissances virtuelles avec, pour système de champs de vecteurs vitesse virtual le système des champs de vecteurs vitesse réels.

Celui-ci est, en effet, compatible avec les liaisons figées à l'instant considéré t , puisque celles-ci sont indépendantes du temps. On retrouve ainsi, lorsque le système est conservatif, l'intégrale première de l'énergie cinétique étudiée dans le chapitre précédent.

6.5.3. Exemples de liaisons parfaites.

Reprenons les exemples de liaisons géométriques étudiés dans le paragraphe 6.2 ..

a) Point matériel assujéti à rester sur une surface. (paragraphe 6.2.1) . La surface peut être supposée immobile (car seul le mouvement relatif du point par rapport à la surface est à considérer). Dans ce cas, un vecteur vitesse virtuelle \vec{W} du point A , est compatible avec la liaison, si et seulement si :

$$(6.5.6) \quad \vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{pour une liaison bilatérale}$$

$$(6.5.7) \quad \vec{W} \cdot \vec{n} \geq 0 \quad \text{pour une liaison unilatérale.}$$

Par conséquent, \vec{F} désignant la force de liaison exercée par la surface E sur le point A , on voit que la liaison est parfaite si et seulement si:

$\vec{F} \cdot \vec{W} = 0$ pour tout \vec{W} vérifiant (6.5.6) ou (6.5.7) selon que la liaison est bilatérale, ou unilatérale. Dans le premier cas, on trouve :

$$(6.5.8) \quad \vec{F} \text{ parallèle à } \vec{n}, \text{ vecteur normal à la surface.}$$

Dans le second cas, on trouve (6.5.8) et, de plus :

$$(6.5.9) \quad \vec{F} \cdot \vec{n} \geq 0.$$

b) Point matériel assujéti à rester sur une courbe (paragraphe 6.2.2 .

La liaison est supposée bilatérale. En appliquant la même méthode que ci-dessus, on voit que la force de liaison \vec{F} exercée par la courbe sur le point matériel A doit vérifier, si la liaison est parfaite :

$$\vec{F} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$\vec{\tau}$ désignant un vecteur unitaire tangent à la courbe au point A .

c) Corps rigides en contact par une surface plane (paragraphe 6.2.3 a).

Supposons d'abord la liaison bilatérale (ou le contact persistant), et soient \vec{W}_1 et \vec{W}_2 des champs de vecteurs vitesse virtuels, respectivement, des corps A_1 et A_2 .

Ils sont compatibles avec la liaison, si et seulement si $\vec{W}_2 - \vec{W}_1$ est en tout point, parallèle à la surface de contact Σ . Soit P un point du plan contenant Σ . Les éléments de réduction en P du champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}_2 - \vec{W}_1$ sont astreints à vérifier :

$$(6.5.10) \quad \begin{array}{ll} \vec{W}_2(P) - \vec{W}_1(P) & \text{parallèle à } \Sigma \\ \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 & \text{normal à } \Sigma \end{array}$$

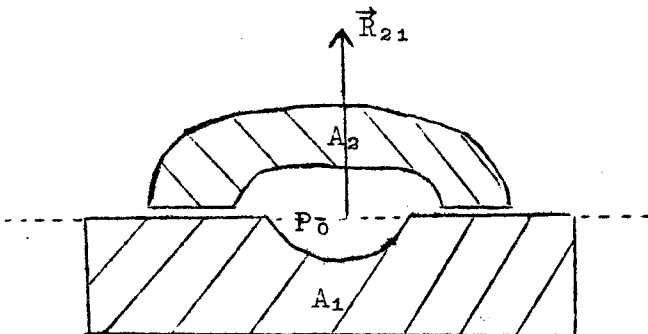
($\vec{\Omega}_2$ et $\vec{\Omega}_1$ désignant les vecteurs taux de rotation, respectivement, de \vec{W}_2 et \vec{W}_1). Soient \vec{R}_{21} et $\vec{M}_{21}(P)$ les éléments de réduction au point P (résultante et moment résultant en P) du torseur de l'effort de liaison exercé par A_1 sur A_2 . $-\vec{R}_{21}$ et $-\vec{M}_{21}(P)$ sont donc les éléments de réduction en P de l'effet de liaison exercé par A_2 sur A_1 . En écrivant que la liaison est parfaite on obtient :

$$(6.5.11) \quad \vec{R}_{21} (\vec{W}_2(P) - \vec{W}_1(P)) + \vec{M}_{21}(P), (\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1) = 0$$

Ceci devant être vérifié quels que soient les vecteurs $\vec{W}_2(P) - \vec{W}_1(P)$ parallèle à Σ , et $(\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1)$ normal à Σ , on a nécessairement :

$$(6.5.12) \quad \begin{array}{ll} \vec{R}_{21} & \text{normal à } \Sigma \\ \vec{M}_{21}(P) & \text{parallèle à } \Sigma \end{array}$$

ce qu'on peut exprimer en disant que la composante parallèle à Σ de \vec{R}_{21} , et la composante normale à Σ de $\vec{M}_{21}(P)$, sont nulles. On sait que dans ces conditions, le torseur d'effort exercé par A_1 sur A_2 est nécessairement uniforce : il peut être représenté par un vecteur lié (P_0, \vec{R}_{21}) , où P_0 est un point du plan contenant la surface de contact Σ , et \vec{R}_{21} un vecteur normal à Σ . On remarquera que P_0 peut ne pas appartenir aux corps A_1 et A_2 . Cela peut être le cas par exemple si Σ est une couronne comprise entre deux cercles concentriques, P_0 pouvant être le centre de ces cercles, et n'appartenir à aucun des deux corps.



Supposons maintenant la liaison unilatérale. Au lieu de (6.5.10), \vec{W}_1 et \vec{W}_2 doivent vérifier, pour tout point Q de Σ , la condition exprimant que les deux corps ne peuvent pas s'interpénétrer :

$$(6.5.13) \quad \left[\vec{W}_2(Q) - \vec{W}_1(Q) \right] \cdot \vec{n} \geq 0 \quad \forall Q \in \Sigma$$

\vec{n} désignant le vecteur unitaire normal à Σ dirigé de A_1 vers A_2 .

L'expression figurant au membre de gauche de cette inégalité étant une fonction affine, l'inégalité est nécessairement vérifiée aussi par tout point Q appartenant à l'enveloppe convexe fermée de Σ .

\vec{R}_{21} et $\vec{M}_{21}(P)$ désignant, comme ci-dessus, la résultante et le moment en un point P du plan contenant Σ , du torseur des efforts de liaison exercés par A_1 sur A_2 . La condition (6.5.11) doit être remplacée par :

$$(6.5.14) \quad \vec{R}_{21} \cdot (\vec{W}_2(P) - \vec{W}_1(P)) + \vec{M}_{21}(P) (\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1) \geq 0$$

pour tous \vec{W}_2 et \vec{W}_1 équiprojectifs vérifiant (6.5.13)

En particulier si \vec{W}_1 et \vec{W}_2 vérifient (6.5.10), ils vérifient aussi (6.5.13), et leurs opposés $-\vec{W}_1$ et $-\vec{W}_2$ aussi. Donc les conclusions (6.5.12) obtenues en supposant la liaison bilatérale, restent valables dans le cas présent. On peut par conséquent affirmer que le torseur des efforts exercés par A_1 sur A_2 est uniforce, et peut être représenté par un vecteur lié (P_0, \vec{R}_{21}) avec \vec{R}_{21} normal à Σ , P_0 étant un point du plan contenant Σ . En faisant $P = P_0$ dans (6.5.14). On voit qu'on obtient les conditions supplémentaires :

$$(6.5.15) \quad P_0 \text{ élément de l'enveloppe convexe fermée de } \Sigma$$

Remarque. Dans tout ce paragraphe, on a supposé les deux corps A_1 et A_2 éléments du système considéré. On obtient bien entendu les mêmes résultats, si on suppose que seul A_2 appartient à ce système, A_1 étant un corps extérieur. Dans ce cas en effet on doit prendre pour champ de vecteurs vitesse virtuel du corps A_2 , un champ \vec{W}_2 compatible avec la liaison figée à l'instant considéré. Ceci équivaut manifestement à faire $\vec{W}_1 = 0$ dans tout ce qui précède, ou à remplacer partout $\vec{W}_2 - \vec{W}_1$ par \vec{W}_2 . Il en est de même dans les exemples traités ci-après.

d) Contact ponctuel (paragraphe 6.2.3. b)

On considérera seulement le cas de deux corps convexes réguliers en contact en un point P (les cas représentés sur les figures 4 et 5 du paragraphe 6.2.3 étant laissés en exercices).

Les méthodes employées ci-dessus conduisent au résultat, P désignant le point de contact des deux corps, \vec{n} le vecteur normal au plan tangent en P , dirigé de A_1 vers A_2 . \vec{R}_{21} la résultante et $\vec{M}_{21}(P)$ le moment en P de l'effort de liaison exercé par A_1 sur A_2 (pour une liaison parfaite) :

$$(6.5.16) \quad \begin{array}{l} \vec{M}_{21}(P) = 0 \\ \vec{R}_{21} \text{ parallèle à } \vec{n} \end{array}$$

Lorsqu'on tient compte du fait que la liaison est unilatérale, donc que le contact peut ne pas persister, on obtient en outre la condition :

$$(6.5.17) \quad \vec{R}_{21} \cdot \vec{n} \geq 0$$

e) Articulations classiques (paragraphe 6.2.3, c, d et e)

On examinera le cas de l'articulation verrou. Les articulations rotoïde et sphérique pouvant être traitées de la même manière, on se bornera pour elles à indiquer les résultats.

Soit Δ l'axe de la liaison. Les champs de vecteurs vitesse virtuels \vec{W}_2 et \vec{W}_1 des corps A_1 et A_2 doivent vérifier, pour être compatibles avec cette liaison :

$$(6.5.18) \quad \vec{W}_2(P) - \vec{W}_1(P) \text{ parallèle à } \Delta \text{ pour tout } P \in \Delta$$

Désignons par \vec{e}_0 un vecteur unitaire parallèle à Δ , P_0 un point particulier quelconque de Δ , $\vec{\Omega}_2$ et $\vec{\Omega}_1$ les vecteurs taux de rotation des champs de vecteurs équiprojectifs \vec{W}_2 et \vec{W}_1 . La condition (6.5.18) équivaut à :

$$(6.5.19) \quad \begin{array}{l} \vec{W}_2(P_0) - \vec{W}_1(P_0) \text{ parallèle à } \vec{e}_0 \\ \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \text{ parallèle à } \vec{e}_0 \end{array}$$

Si \vec{R}_{21} et $\vec{M}_{21}(P_0)$ désignent la résultante et le moment résultant en P_0 de l'effort de liaison exercé par A_1 sur A_2 , on a la condition, exprimant que la liaison est parfaite :

$$\begin{cases} \vec{R}_{21} (\vec{W}_2(P_0) - \vec{W}_1(P_0)) + \vec{M}_{21}(P_0) \cdot (\vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1) = 0 \\ \text{pour tous } \vec{W}_2 \text{ et } \vec{W}_1 \text{ équiprojectifs vérifiant (6.5.19)} \end{cases}$$

ce qui est visiblement équivalent à :

$$(6.5.) \quad \vec{R}_{21} \cdot \vec{e}_0 = 0 ; \vec{M}_{21}(P_0) \cdot \vec{e}_0 = 0$$

Dans le cas d'une articulation rotoïde parfaite, on obtient (avec les mêmes notations) la seule condition :

$$(6.5.21) \quad \vec{M}_{21}(P_0) \cdot \vec{e}_0 = 0$$

et dans le cas d'une articulation sphérique parfaite, le point P_0 choisi étant le centre de l'articulation, la condition :

$$(6.5.22) \quad \vec{M}_{21}(P_0) = 0$$

6.6. Notions sommaires sur les liaisons non parfaites.

Celles-ci sont généralement décrites grâce à des lois d'origine expérimentale, les lois du frottement. Nous nous contenterons de décrire une des formes les plus simples de ces lois, dans le cas de deux corps rigides convexes réguliers ayant un contact ponctuel (figure 3 du paragraphe 6.2.3).

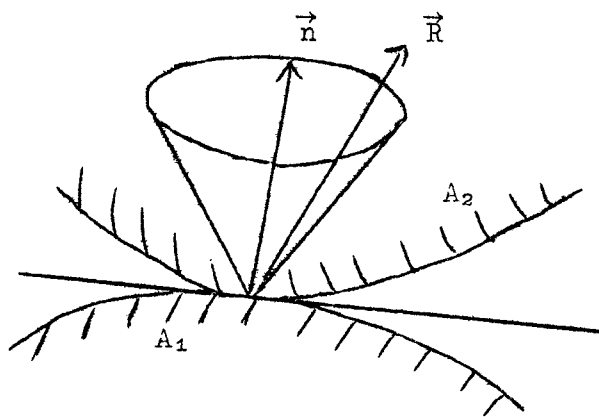
Considérons les éléments de réduction en P (point de contact) du torseur des efforts exercés par A_1 sur A_2 : résultante \vec{R} , et moment en P \vec{M} . \vec{n} désignant le vecteur normal au point de contact, dirigé de A_1 vers A_2 , posons :

$$(6.6.1) \quad \begin{aligned} R_n &= \vec{R} \cdot \vec{n} & ; & & M_n &= \vec{M} \cdot \vec{n} \\ \vec{R}_t &= \vec{R} - R_n \vec{n} & ; & & \vec{M}_t &= \vec{M} - M_n \vec{n} \end{aligned}$$

Les lois du frottement généralement admises s'expriment par les inégalités (la première exprimant le fait que la liaison est unilatérale) :

$$(6.6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_n \geq 0 \\ |R_t| \leq k R_n \\ |M_n| \leq k' R_n \\ |\vec{M}_t| \leq k'' R_n \end{array} \right.$$

k , k' et k'' étant des constantes ≥ 0 , dépendant de la nature des corps et de l'état de leurs surfaces, appelées coefficients de frottement. Dans de nombreux cas on peut supposer k' et k'' nuls, et se contenter d'un seul coefficient de frottement k . On pose souvent $k = \operatorname{tg} \alpha$, ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) et on appelle α angle de frottement. Les deux premières inégalités (6.6.2) expriment que \vec{R} est contenu dans un cône d'axe \vec{n} et de demi angle au sommet α .



On admet généralement que \vec{R} et \vec{M} peuvent prendre toutes les valeurs vérifiant les inégalités (6.6.2), et que tant que la seconde inégalité (6.6.2) est strictement vérifiée, la vitesse de glissement de A_2 relativement à A_1 est nulle. Lorsque cette inégalité devient une égalité, cette vitesse de glissement peut devenir non nulle.

6.7. Etude qualitative de l'équation différentielle $(\frac{d\theta}{dt})^2 = F(\theta)$

Considérons un corps rigide A articulé sur un bâti fixe (relativement

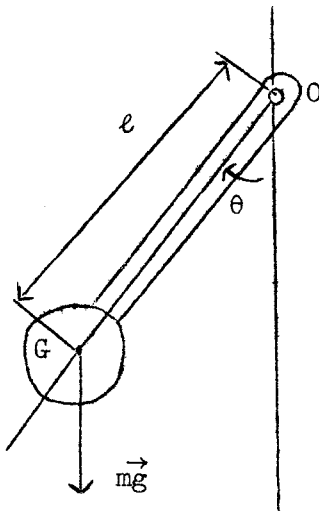


Figure 1

au référentiel considéré, supposé galiléen) par une articulation rotoïde parfaite, d'axe horizontal, et soumis à l'effort de la pesanteur. On dira que ce système est un pendule plan. On repère sa position par l'angle θ que fait la droite OG avec la verticale (G désigne le centre d'inertie, O le point de l'axe de la liaison rotoïde situé dans le plan vertical normal à cet axe passant par G).

L'équation du mouvement peut s'obtenir, par exemple, en écrivant que le moment dynamique au point O est égal au moment, en ce même point, de l'effort exercé par la pesanteur (puisque, la liaison étant parfaite, le moment en O de l'effort de liaison est nul). On obtient ainsi :

$$(6.7.1) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - m g l \sin \theta$$

m désignant la masse du corps, I son moment d'inertie par rapport à l'axe de la liaison rotoïde, g le module de l'accélération de la pesanteur et l la distance OG .

Cette équation a une intégrale première, qu'on obtient en multipliant les deux membres de l'équation (6.7.1) par $\frac{d\theta}{dt}$:

$$(6.7.2) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g l \cos \theta \right] = 0$$

d'où :

$$(6.7.3) \quad \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g \ell \cos \theta - E = 0$$

E étant une constante d'intégration.

Le résultat (6.7.3) peut ailleurs s'obtenir directement, en utilisant l'intégrale première de l'énergie cinétique.

On doit toutefois remarquer que si l'équation (6.7.1) implique (6.7.3), celle-ci n'est pas équivalente à la première. D'une part, elle comporte une constante arbitraire E .

D'autre part, elle possède la solution (acceptable mathématiquement si

$$\left| \frac{E}{m g \ell} \right| \leq 1) :$$

$$(6.7.4) \quad \cos \theta = - \frac{E}{m g \ell}, \text{ indépendant de } t$$

qui, en général (si $\sin \theta \neq 0$, c'est à dire $|E| \neq m g \ell$) n'est pas solution de (6.7.1).

L'équation (6.7.3) est de la forme :

$$(6.7.5) \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = F(q)$$

où q désigne la fonction numérique inconnue (de la variable t), et F une fonction donnée.

Ce type d'équations se rencontre dans de nombreux problèmes de mécanique. Très généralement (comme c'est le cas pour (6.7.3), la fonction F est de classe C^2 , peut comporter une constante additive arbitraire, et les solutions de la forme :

$$(6.7.6) \quad q = q_0 \quad \text{constante}$$

(q_0 étant un zéro de F), ne sont de vraies solutions du problème étudié que si on a simultanément :

$$(6.7.7) \quad F(q_0) = 0 \quad \text{et} \quad F'(q_0) = 0$$

Nous allons étudier l'allure qualitative des solutions de ce problème. Tout d'abord, d'après (6.7.5), q ne peut prendre que des valeurs pour lesquelles $F(q) \geq 0$.

Soit $t \mapsto q(t)$ une solution de classe C^1 de l'équation (6.7.5), définie sur un intervalle $[q_1, q_2]$ sur lequel F est strictement positive. On a sur cet intervalle :

$$(6.7.8) \quad \frac{d q}{d t} = \varepsilon \sqrt{F(q)}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, constant par continuité sur l'intervalle $[q_1, q_2]$. On en déduit la solution cherchée sous la forme t en fonction de q (d'où on peut facilement passer à q en fonction de t puisque q est fonction strictement monotone de t) :

$$(6.7.9) \quad t(q) = \varepsilon \int_{q_1}^q \frac{d \xi}{\sqrt{F(\xi)}} + t(q_1) \quad (q \in [q_1, q_2])$$

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque l'une des extrémités de l'intervalle, par exemple q_2 , est telle que $F(q_2) = 0$, (F étant strictement positive en tout autre point de $[q_1, q_2]$). L'expression (6.7.9) reste valable pour tout $q \in [q_1, q_2[$. Lorsque $q \rightarrow q_2$, le second membre de cette expression est une intégrale généralisée dont on doit étudier la convergence.

1^{er} cas On suppose :

$$(6.7.10) \quad F(q_2) = 0 \quad F'(q_2) \neq 0 \quad (\text{donc} < 0)$$

Car F étant > 0 sur $[q_1, q_2[$ et nulle en q_2 , est décroissante pour q assez voisin de q_2 et inférieur à q_2 . Dans ce cas la fonction intégrée est, pour $q \rightarrow q_2$, équivalente à :

$$\left[-F'(q_2) (q_2 - \xi) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

donc l'intégrale généralisée :

$$(6.7.11) \quad \int_{q_1}^{q_2} \frac{d \xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

est convergente. Par conséquent l'expression (6.9.9) reste valable pour $q = q_2$. Si on appelle t_1 l'instant où $q = q_1$ et t_2 celui où $q = q_2$, on a :

$$(6.7.12) \quad t_2 - t_1 = \varepsilon \int_{q_1}^{q_2} \frac{d \xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

On remarque d'autre part que $\frac{d q}{d t}$ est nul à l'instant t_2 , d'après (6.7.8), et que pour $t \rightarrow t_2$:

$$\frac{d q(t)}{d t} \text{ équivalent à } \varepsilon \left[-F'(q_2) (q_2 - q(t)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\lim_{t \rightarrow t_2} \frac{q_2 - q(t)}{\frac{d q(t)}{d t}} = 0$$

Afin de bien voir ce qui se passe lorsque t traverse la valeur t_2 , considérons dans l'espace des états cinématiques, (improprement appelé "plan des phases") le point représentant l'état cinématique du système à l'instant t . Ses coordonnées sont :

$$(6.7.13) \quad \begin{aligned} & q(t) \\ & \frac{d q(t)}{d t} = \dot{q}(t) = \varepsilon \sqrt{F(q(t))} \end{aligned}$$

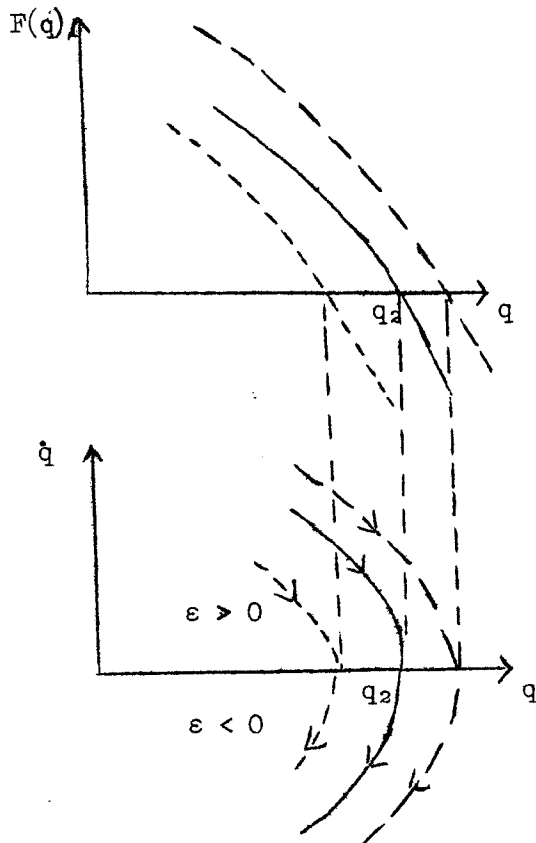


Figure 2

Ce point parcourt la courbe représentée en trait plein sur la figure 2, symétrique par rapport à l'axe des q et ayant, en $q = q_2$, une tangente parallèle à l'axe des \dot{q} . Une flèche indique le sens de parcours de cette courbe lorsque le temps croît. (q croît lorsque $\dot{q} > 0$, décroît lorsque $\dot{q} < 0$). On voit que lorsque t traverse la valeur t_2 en croissant, q croît jusqu'à la valeur q_2 , puis décroît (ce qui est bien conforme au fait que q ne peut prendre de valeur pour laquelle $F(q)$ serait négatif).

2^{ème} cas On suppose :

$$(6.7.14) \quad F(q_2) = 0 \quad F'(q_2) = 0$$

Dans ce cas la fonction intégrée vérifie :

$$\lim_{\xi \rightarrow q_2} \frac{(q_2 - \xi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{F(\xi)}} = +\infty$$

et par suite l'intégrale généralisée (6.7.11) diverge. Par conséquent q n'atteint jamais la valeur q_2 , mais tend vers cette valeur pour $t \rightarrow \infty$.
On a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q_2 - q(t)}{\frac{dq(t)}{dt}} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{F''(q_2)}}$$

et par suite le point représentant l'état cinématique du système, de coordonnées (6.7.13), parcourt dans l'espace des états cinématiques une courbe ayant

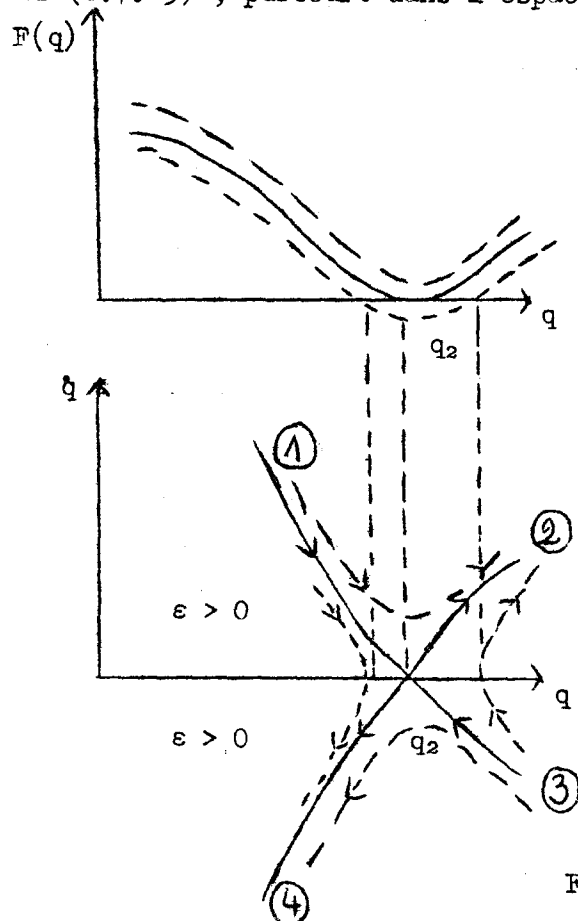


Figure 3

l'allure représentée sur la figure 3 (courbe en trait plein; on a, pour fixer les supposé $F''(q_2) > 0$). Ici encore des flèches indiquent le sens de parcours de ces courbes lorsque le temps croît. La valeur $q = q_2$ n'est ^{atteinte} que pour un temps infini ($+\infty$ pour les branches de courbes ① et ③, $-\infty$ pour les branches ② et ④).

D'autre part, rappelons que la fonction $F(q)$ comporte en général une constante additive arbitraire. Voyons ce qui se passe lorsqu'on modifie la valeur attribuée à cette constante. Dans le premier cas, le graphe de F se trouve modifié comme indiqué sur la figure 2 (courbes en pointillés et en tiretés). L'allure qualitative du mouvement n'est pas modifiée, comme le montre cette figure : seule la valeur de q_2 pour laquelle $\frac{dq}{dt}$ s'annule, est légèrement modifiée. Par contre dans le second cas, si on augmente la valeur de la constante additive figurant dans F , la fonction $F(q)$ reste strictement positive, et le mouvement change qualitativement d'allure : la valeur $q = q_2$ est atteinte au bout d'un temps fini, et le mouvement se poursuit au delà (courbe en tiretés sur la figure 3). Au contraire, si on diminue la valeur de cette constante, il apparaît autour de q_2 un intervalle sur lequel F est strictement négative, et l'allure du mouvement correspond à celle étudiée dans le premier cas (courbes en pointillés sur la figure 3).

Enfin, les positions d'équilibre du système sont d'après (6.7.6) et (6.7.7) les valeurs q_0 de q telles que :

$$(6.7.15) \quad F(q_0) = 0 \quad F'(q_0) = 0$$

On supposera pour simplifier, $F''(q_0) \neq 0$. Si $F''(q_0) > 0$, on est dans la situation représentée sur la figure 3 (avec $q_0 = q_2$). On voit que dans ce cas la position d'équilibre est instable car si on perturbe légèrement l'état cinématique du système, par exemple en augmentant les valeurs de q et de $\frac{dq}{dt}$, le point représentant cet état s'éloigne, au cours du temps, de la position d'équilibre, sur la branche 2 de la courbe représentée sur la figure 3. Si au contraire, $F''(q_0) < 0$, on est dans la situation représentée sur la figure 4 : on ne peut donner de petite perturbation à la position d'équilibre, qu'en augmentant la constante additive dont dépend F (sans quoi F serait négatif au voisinage de q_0). Mais alors le point représentant l'état cinématique du système parcourt, au cours du temps, une petite courbe fermée entourant le point représentant l'état d'équilibre, donc reste toujours à proximité de ce point. La position d'équilibre est donc stable.

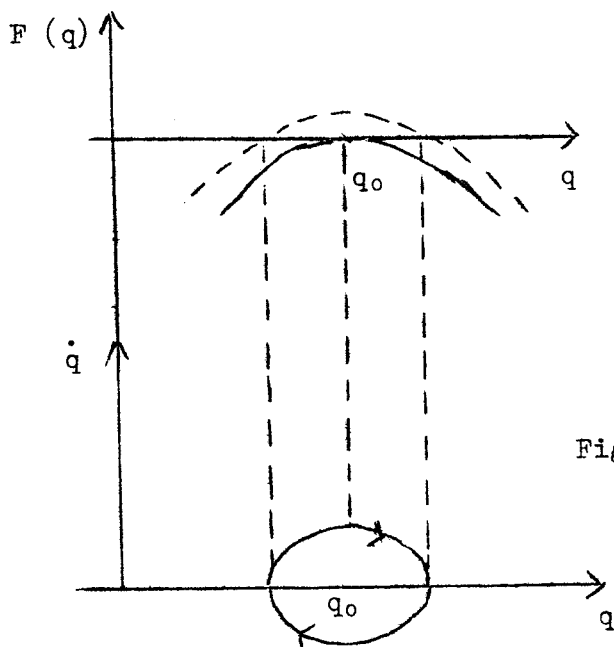
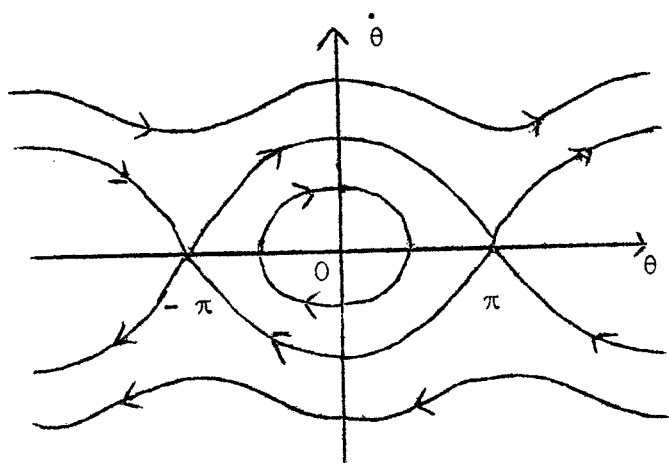


Figure 4

Bien entendu, l'étude qui précède est locale, et on doit dans chaque cas examiner ensuite le problème du point de vue global. Ainsi, dans le cas d'un pendule plan, q est un angle défini modulo 2π , et l'espace des états cinématiques est un cylindre (et non un plan). Il est représenté sur la figure 5, sous forme "déroulée" : deux points de même ordonnée, dont l'abscisse diffère d'un multiple entier de 2π , représentent le même état cinématique. On a représenté les courbes correspondant à diverses valeurs de la constante E figurant dans (6.7.3).



Pour $E < -m g \ell$ il n'y a pas de mouvement possible.

Pour $E = -m g \ell$, on a la position d'équilibre $\theta = 0$.

Pour $-m g \ell < E < m g \ell$, on a un mouvement oscillatoire autour de cette position d'équilibre. Pour $E = m g \ell$

on a les mouvements représentés par les courbes limites (passant par le point $\theta = \pi$,

$\dot{\theta} = 0$, le point étant une position d'équilibre instable

atteinte au bout d'un temps infini). Enfin pour $E > m g \ell$,

on a un mouvement circulaire.