Chapitre V

L'énergie cinétique d'un système matériel.

5 . 1 . Définition de l'énergie cinétique. Exemples.

On reprend les hypothèses et notations du paragraphe 4 . 1 , chapitre IV , dans lequel nous avions considéré un système matériel A dont le mouvement est étudié relativement à un référentiel $\mathcal{R}$.

Définition. On appelle énergie cinétique du système A à la date t , relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la quantité :

$$(5.1.1) \qquad T(t) = \frac{1}{2} \int_{A_t} |\vec{V}(x, t)|^2 \, d\, m_t(x)$$

Remarques. 1 . L'énergie cinétique est une quantité toujours ≥ 0 . Si le système A est réunion de deux parties A_1 et A_2 , telles que la masse de $A_1 \cap A_2$ soit nulle, alors on voit que l'énergie cinétique de A , est somme de l'énergie cinétique de A_1 et de l'énergie cinétique de A_2 .

2 . Le nombre réel qui représente l'énergie cinétique d'un système matériel, à une date donnée, dépend du choix des unités de longueur, de temps et de masse. On vérifie facilement que si on modifie les choix de ces unités de telle sorte que les nombres représentant une longueur, un intervalle de temps et une masse donnés, soient multipliés respectivement par les nombres > 0 , λ , θ et μ , alors le nombre représentant l'énergie cinétique de A est multiplié par :

$$\mu \, \lambda^2 \, \theta^{-2}$$

Exemple 1. Point matériel L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m , dont la vitesse relativement au référentiel choisi est $\vec{V}$, est :

$$\frac{1}{2} \, m \, |\vec{V}|^2$$

Exemple 2. Corps rigide. Si A est un corps rigide, son champ de vecteurs vitesses $x \mapsto \vec{V}(x, t)$ à l'instant t , qu'on notera $\vec{V}(t)$, est un champ équiprojectif. Si $\mathcal{C}(t)$ désigne le torseur cinétique de A à la date t , on reconnaît (chapitre IV , formule 4.1.1) que l'énergie cinétique de A à la date t n'est autre que :

$$\frac{1}{2}\int_{A_t} |\vec{V}(x, t)|^2 \, d\, m_t(x) = \frac{1}{2}\int_{A_t} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{V}(x, t) \, d\, m_t(x)$$

ou :

$$(5.1.2) \qquad \boxed{T(t) = \frac{1}{2} \, \mathcal{C}(t) \, . \, (\vec{V}(t))}$$

Soit P un point quelconque de $\mathscr{E}$. En désignant par $\vec{R}_c\ (t)$ la résultante cinétique, $\vec{M}_c\ (P,\ t)$ le moment cinétique au point P , et $\vec{\Omega}$ le vecteur taux de rotation, on peut écrire :

$$T\ (t) = \frac{1}{2} \left[\vec{R}_c\ (t) \cdot \vec{V}\ (P,\ t) + \vec{M}_c\ (P,\ t) \cdot \vec{\Omega}\ (t) \right]$$

Mais compte tenu des formules (4.1.7) et (4.7.4) du chapitre IV , on a , en appelant m (A) la masse de A , G (t) son centre d'inertie et $\mathcal{G}\ (P,t)$ son opérateur d'inertie à la date t :

$$T\ (t) = \frac{1}{2}\ m\ (A) \left[\frac{d\ \vec{G}(t)}{d\ t} \cdot \vec{V}\ (P,\ t) + \left(\overrightarrow{P\ G}(t) \wedge \vec{V}\ (P,\ t)\right) \cdot \vec{\Omega}\ (t) \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\ (\mathcal{G}\ (P,\ t)\ (\vec{\Omega}\ (t)) \cdot \vec{\Omega}\ (t).$$

Cette expression peut se transformer si l'on tient compte du fait que , A étant un corps rigide :

$$\frac{d\ \vec{G}(t)}{d\ t} = \vec{V}\ (G\ (t),\ t)$$

et que :

$$\vec{V}\ (P,\ t) = \vec{V}\ (G\ (t),\ t) + \vec{\Omega}\ (t) \wedge \overrightarrow{G\ (t)\ P}$$

On obtient ainsi (en notant $[\quad]$ le produit mixte) :

$$T\ (t) = \frac{1}{2}\ m\ (A)\ |\ \vec{V}\ (P,\ t)\ |^2 + m\ (A) \left[\vec{PG}\ (t)\ ,\ \vec{V}\ (P,\ t)\ ,\ \vec{\Omega}\ (t) \right]$$
$$+ \frac{1}{2}\ (\ \mathcal{G}\ (P,\ t)\ (\vec{\Omega}\ (t))\ ) \cdot \vec{\Omega}\ (t)\ .$$

Cette expression se simplifie si $\vec{V}\ (P,\ t) = 0$:

$$\text{(5.1.3)} \quad \boxed{T\ (t) = \frac{1}{2}\ (\ \mathcal{G}\ (P,\ t)\ (\vec{\Omega}\ (t))\ ) \cdot \vec{\Omega}\ (t) \qquad \text{si} \quad \vec{V}\ (P,\ t) = 0}$$

Elle se simplifie aussi si on choisit $P = G\ (t)$:

$$\text{(5.1.4)} \quad \boxed{T\ (t) = \frac{1}{2}\ m\ (A)\ |\ V\ (G\ (t),\ t)\ |^2 + \frac{1}{2}\ (\ \mathcal{G}\ (G\ (t),\ t)\ (\vec{\Omega}\ (t))\ ) \cdot \vec{\Omega}(t)}$$

On remarquera que dans cette dernière formule, le premier terme du second membre est l'énergie cinétique qu'aurait un point matériel situé en G (t) et ayant une masse égale à m (A) , tandis que le second terme est l'énergie cinétique du corps A dans son mouvement relativement au référentiel du centre d'inertie. C'est un cas particulier d'une propriété valable, même lorsque A n'est pas un corps rigide (paragraphe 5.3 ci-après).

5 . 2 . Effet d'un changement de référentiel sur l'énergie cinétique.

On se place dans les hypothèses du paragraphe 4.3 , chapitre IV : le mouvement du système matériel A est étudié, d'une part relativement à un référentiel $\mathcal{R}$ considéré comme "fixe" , d'autre part relativement à un référentiel $\mathcal{R}_1$, dit "mobile" . On a la formule de composition des vitesses :

$$\vec{V}_a (x, t) = \vec{V}_e (x, t) + \vec{V}_r (x, t)$$

On en déduit, en désignant par $T_a (t)$ et $T_r (t)$ l'énergie cinétique de A , respectivement pour son mouvement "absolu" (c'est à dire relativement à $\mathcal{R}$) et "relatif" (relativement à $\mathcal{R}_1$) :

$$(5.2.1) \quad \boxed{T_a (t) = T_r (t) + \frac{1}{2}\int_{A_t} (| \vec{V}_e (x, t) |^2 + 2 \vec{V}_e (x, t). \vec{V}_r(x,t)) \, d \, m_t(x}$$

On peut interpréter les derniers termes du second membre.
Ainsi le terme :

$$\frac{1}{2} \int_{A_t} | \vec{V}_e (x, t) |^2 \, d \, m_t (x)$$

est l'énergie cinétique qu'aurait relativement au référentiel $\mathcal{R}$ un corps rigide, cinématiquement lié au référentiel $\mathcal{R}_1$, ayant à la date t la même répartition de masses que le corps étudié A . L'autre terme :

$$\int_{A_t} \vec{V}_e (x, t) . \vec{V}_r (x, t) \, d \, m_t (x)$$

s'exprime de manière simple si l'on remarque que le champ de vecteurs vitesse d'entraînement, (noté en abrégé $\vec{V}_e$) est équiprojectif. L'expression ci-dessus n'est autre alors que :

$$\mathcal{C}_r (t) (\vec{V}_e)$$

où $\mathcal{C}_r (t)$ est le torseur cinétique de A , dans son mouvement "relatif" (relativement à $\mathcal{R}_1$) .

5 . 3 . Cas où $\mathcal{R}_1$ est le référentiel du centre d'inertie.

Dans ce cas $\vec{V}_e (x, t)$ est indépendant de x :

$$\vec{V}_e (x, t) = \frac{d \vec{G} (t)}{d t} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{E}$$

donc on a (puisque le vecteur taux de rotation d'entraînement est nul):

$$\mathcal{C}_r (t) (\vec{V}_e) = \vec{R}_{cr} (t) . \frac{d \vec{G}(t)}{d t} = 0$$

car la résultante cinétique $\vec{R}_{cr}(t)$, pour le mouvement relativement au référentiel du centre d'inertie, est nulle (chapitre IV , paragraphe 4.5). D'autre part on a :

$$\frac{1}{2}\int_{A_t} |\vec{V}_e(x, t)|^2 \, d\, m_t(x) = \frac{1}{2} m(A) \left| \frac{d\, G(t)}{d\, t} \right|^2$$

et on peut énoncer :

Théorème de Koenigs pour l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique de A relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, est somme de l'énergie cinétique de A relativement au référentiel du centre d'inertie, et de l'énergie cinétique, relativement à $\mathcal{R}$, qu'aurait un point matériel situé au centre d'inertie et de masse $m(A)$:

$$\boxed{T_a(t) = T_r(t) + \frac{1}{2} m(A) \left| \frac{d\,\vec{G}(t)}{dt} \right|^2} \tag{5.3.1}$$

5 . 4 . Variation de l'énergie cinétique au cours du temps.

a) Cas où A est un système d'un nombre fini de points matériels.

Si A est un ensemble de points matériels dont les positions à la date t sont $N_1(t), \ldots N_k(t)$, et les masses $m_1, \ldots m_k$, l'énergie cinétique de A est :

$$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i \left| \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t} \right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t} \cdot \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$

En dérivant par rapport à t on obtient :

$$\boxed{\frac{d\,T(t)}{d\,t} = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t} \cdot \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2} = \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{V}_i(t) \cdot \vec{\Gamma}_i(t)} \tag{5.4.1}$$

où on a désigné par $\vec{V}_i(t)$ et $\vec{\Gamma}_i(t)$ les vecteurs vitesse et accélération de N_i , à la date t .

Afin d'interpréter les termes de cette formule, on définit :

Définition.

On appelle quantité d'accélération du point matériel N_i , à la date t , relativement au référentiel $\mathcal{R}$, le vecteur lié $(N_i(t) , m_i \vec{\Gamma}_i(t))$, dont le point d'application est la position $N_i(t)$ de N_i à la date t ; m_i désigne la masse de N_i , et $\vec{\Gamma}_i(t)$ l'accélération de N_i relativement à $\mathcal{R}$, à la da-

On remarquera que le torseur uniforce associé au vecteur lié quantité d'accélération de N_i, n'est autre que le torseur dynamique de N_i à la date t.

<u>Définition</u>. Soit $(N_i(t), \vec{F}_i)$ un vecteur lié, dont le point d'application est la position, à l'instant t, d'un point cinématique N_i. On appelle <u>puissance</u> de ce vecteur lié, à l'instant t, la quantité :

$$\vec{F}_i \cdot \vec{V}_i(t)$$

où $\vec{V}_i(t) = \dfrac{d\,\vec{N_i}(t)}{d\,t}$ est le vecteur vitesse de N_i à la date t.

On peut alors énoncer :

<u>Proposition</u>. La dérivée, par rapport à t, de l'énergie cinétique du système matériel constitué par les points matériels $N_1, N_2, \dots N_k$, est égale à la <u>somme des puissances des quantités d'accélération</u> de ces points matériels (tout ceci à la date t, et relativement au référentiel choisi $\mathcal{R}$).

Supposons maintenant le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. D'après le principe de la dynamique, la quantité d'accélération $(N_i(t), m_i \vec{\Gamma}_i(t))$ est égale au vecteur lié $(N_i(t), \vec{F}_i)$ où $\vec{F}_i(t)$ est le vecteur force total exercé sur N_i à l'instant t. On peut donc énoncer :

<u>Corollaire</u>. Lorsque le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique du système matériel constitué par les points matériels $N_1, N_2, \dots N_k$, est égale à la somme des puissances des forces totale exercées sur chacun des points N_i.

<u>Remarque importante</u>. La force totale $\vec{F}_i(t)$ exercée sur N_i à la date t est une somme de la forme :

$$\vec{F}_i(t) = \vec{F}_{ie}(t) + \sum_{j \in \{1, \dots k\},\ j \neq i} \vec{F}_{ij}(t)$$

où $\vec{F}_{ie}(t)$ est la force exercée sur N_i par les corps <u>autres que le système considéré</u> (on l'appelle force <u>extérieure</u>), et où $\vec{F}_{ij}(t)$ $(1 \leq j \leq k,\ j \neq i$ est la force exercée sur N_i par N_j (on dit que c'est une force <u>intérieure</u> au système). Il importe de remarquer que dans le corollaire ci-dessus, c'est la somme des puissances de <u>toutes</u> les forces qui s'exercent sur les points constituant le système, tant <u>extérieures</u> qu'<u>intérieures</u>, qui intervient. On aura soin de bien distinguer cet énoncé, de celui du Principe de la dynamique, dans lequel c'est le torseur des efforts <u>extérieurs</u> exercés sur le système considéré (c'est à dire le torseur des efforts exercés sur le système par les corps <u>autre</u> que ce système) qui intervient.

Bien entendu, d'après le théorème des actions mutuelles (chapitre III, paragraphe 3.5) on a, si i et $j \in \{1, \dots k\}$, $i \neq j$:

$$\vec{F}_{ij}(t) + \vec{F}_{ji}(t) = 0$$

$$\vec{F}_{ij}(t) \text{ et } \vec{F}_{ji}(t) \text{ parallèles à } \overrightarrow{N_i(t)\, N_j(t)}$$

Mais malgré cela, la somme des puissances des forces exercées par N_j sur N_i et par N_i sur N_j, est en général non nulle. Elle vaut en effet :

$$\vec{F}_{ij}(t) \cdot (\vec{V}_i(t) - \vec{V}_j(t))$$

On voit que cette quantité est nulle si et seulement si, soit $\vec{F}_{ij}(t)$ est nul, soit $\vec{V}_i(t)$ et $\vec{V}_j(t)$ ont des <u>projections égales</u> sur la droite joignant les deux points $N_i(t)$ et $N_j(t)$: cette seconde condition exprime que la dérivée par rapport à t de la distance des deux points N_i et N_j, est nulle.

<u>b) Cas où A est un corps rigide</u>.

On a vu (formule 5.1.2) que :

$$T(t) = \frac{1}{2}\, \mathcal{C}(t)\, (\vec{V}(t))$$

où $\mathcal{C}(t)$ est le torseur cinétique, et $\vec{V}(t)$ le champ de vecteurs vitesse du corps A à l'instant t. Dérivons cette expression par rapport à t. Il convient de remarquer que dans ce calcul, $t \mapsto \vec{V}(t)$ et $t \mapsto \mathcal{C}(t)$ doivent être considérés comme des fonctions de t, à valeurs respectivement dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs équiprojectifs, et dans son dual $\mathcal{G}'$. On a donc :

$$\frac{d\,T(t)}{d\,t} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\,\mathcal{C}(t)}{d\,t}(\vec{V}(t)) + \mathcal{C}(t)\left(\frac{d\,\vec{V}(t)}{d\,t}\right)\right]$$

Attention : ici $\dfrac{d\,\vec{V}(t)}{d\,t}$ désigne le champ de vecteurs équiprojectif dérivée de $\vec{V}(t)$, dont la valeur en un point x est, par définition :

$$\lim_{\theta \to 0,\ \theta \neq 0} \frac{\vec{V}(x, t+\theta) - \vec{V}(x, t)}{\theta} = \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t}$$

Il s'agit donc de la <u>dérivée partielle</u> par rapport à t de $\vec{V}(x, t)$, <u>x étant fixé</u>, et <u>non du vecteur accélération</u> $\vec{\Gamma}(x, t)$. Un calcul facile montre que :

$$\vec{\Gamma}(x, t) = \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}(x, t)$$

où $\vec{\Omega}(t)$ est le vecteur taux de rotation. On en déduit :

$$\mathcal{E}(t)\left(\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right) = \int_{A_t} \vec{V}(x,t) \cdot (\vec{\Gamma}(x,t) - \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{V}(x,t))\, d\, m_t(x)$$

$$= \int_{A_t} \vec{V}(x,t) \cdot \vec{\Gamma}(x,t)\, d\, m_t(x)$$

$$= \mathcal{A}(t)\,(\vec{V}(t))$$

où $\mathcal{A}(t)$ désigne le torseur dynamique de A à l'instant t. Comme d'autre part :

$$\frac{d\,\mathcal{E}(t)}{d\,t} = \mathcal{A}(t)$$

On obtient :

$$(5.4.2) \qquad \boxed{\frac{d\,T(t)}{d\,t} = \mathcal{A}(t)\;(\vec{V}(t))}$$

Afin d'exprimer ce résultat on pose la définition :

<u>Définition.</u> On appelle <u>puissance</u> d'un torseur $\mathcal{T}$ <u>pour un champ de vecteurs équiprojectif</u> $\vec{W}$, la valeur $\mathcal{T}(\vec{W})$ de ce torseur pour $\vec{W}$. Lorsque le torseur $\mathcal{T}$ est <u>relatif à un corps rigide A</u> (par exemple, lorsque c'est le torseur dynamique de A, ou bien le torseur des efforts extérieurs exercés sur A) et qu'on parle de puissance de $\mathcal{T}$ <u>sans spécifier pour quel champ de vecteurs équiprojectif</u>, il est sous entendu que ce champ est <u>le champ des vecteurs vitesses</u> du corps rigide A, à l'instant considéré t et relativement au référentiel choisi $\mathcal{R}$.

On peut alors énoncer :

<u>Proposition.</u> La dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique du corps rigide A est égale à la puissance du torseur dynamique de A (à la date considérée t, et relativement au référentiel choisi $\mathcal{R}$).

Si on suppose le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on sait d'après le principe de la dynamique que le torseur dynamique de A est, à chaque instant, égal au torseur des efforts extérieurs exercés sur A (par tous les corps autres que A lui-même). On peut donc énoncer :

<u>Corollaire.</u> Si le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique du corps rigide A, est à chaque instant égale à la puissance du torseur des efforts extérieurs exercés sur A.

<u>Remarques importantes.</u> 1°) La notion de <u>puissance d'un torseur</u> n'a été définie que pour un champ de vecteurs <u>équiprojectif</u> (qui, lorsqu'on a affaire à un corps rigide, est en général le champ des vecteurs vitesse de ce corps). On peut être tenté de définir une notion analogue, pour un champ de vecteurs quelconque, (ce que l'on fait d'ailleurs dans l'étude des milieux continus déformables).

L'être mathématique dont on définit alors la puissance, n'est plus un torseur mais quelque chose de plus compliqué, par exemple une mesure à valeurs vectorielles, ou même une mesure à valeurs dans l'espace des torseurs. Ces notions dépassent les limites du présent cours.

2°) Contrairement au cas d'un système d'un nombre fini de points matériels, on voit que, pour un seul corps rigide, seuls les efforts extérieurs interviennent dans l'expression de la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique. Cela tient essentiellement au fait que le corps considéré est rigide, alors que le système de points matériels ne l'était pas. On a d'ailleurs vu que la somme des puissances des forces exercées par le point N_j sur le point N_i et par le point N_i sur le point N_j, était nulle si la dérivée par rapport à t de la distance de ces deux points était nulle, c'est à dire si, à cet instant, cet ensemble de deux points se comportait comme un corps rigide. On verra d'autre part, dans le paragraphe suivant, réapparaître les efforts intérieurs lorsqu'on étudiera le cas d'un système de plusieurs corps rigides. Mais afin de bien comprendre pourquoi, dans le cas d'un corps rigide, les efforts intérieurs n'interviennent pas, supposons qu'on sépare le corps A en deux parties disjointes A_1 et A_2 (de réunion A). D'après le théorème des actions mutuelles on a :

$$\mathcal{T}_{A_1 A_2} + \mathcal{T}_{A_2 A_1} = 0$$

où $\mathcal{T}_{A_1A_2}$ et $\mathcal{T}_{A_2A_1}$ sont les torseurs des efforts exercés, respectivement, par A_2 sur A_1 et par A_1 sur A_2. Lorsqu'on évalue la somme des puissances de ces deux torseurs, étant donné qu'on prend leurs valeurs pour le même champ de vecteurs équiprojectif, (qui est le champ des vitesses de A) on trouve évidemment zéro (il en serait autrement si les champs des vitesses des deux parties A_1 et A_2 étaient deux champs équiprojectifs distincts, mais alors A entier ne serait plus un corps rigide). C'est pourquoi on dit, dans certains ouvrages, que la puissance des efforts intérieurs à un corps rigide, est nulle. Toutefois cet énoncé manque de précision, la notion même d'effort intérieur n'ayant pas été clairement définie (car les torseurs $\mathcal{T}_{A_1A_2}$ et $\mathcal{T}_{A_2A_1}$ introduits ci-dessus dépendent de la manière dont on a divisé A en deux parties, ce qui est possible d'une infinité de manières). Nous ne cherchons pas ici à le rendre plus précis, ce sujet appartenant au domaine de la Mécanique des milieux continus.

c) Cas ou A est constitué d'un nombre fini de corps rigides.

Supposons A réunion d'un nombre fini de corps rigides $A_1, A_2, \dots A_k$, pouvant exercer des efforts les uns sur les autres, mais ne s'interpénétrant pas. D'après la propriété d'additivité de l'énergie cinétique, on a :

$$(5.4.3) \qquad T(A, t) = \sum_{i=1}^{k} T(A_i, t)$$

où $T(A, t)$ désigne l'énergie cinétique de A, $T(A_i, t)$ celle de A_i, à la date t.

En utilisant les résultats du paragraphe précédent on obtient :

$$(5.4.4) \quad \boxed{\frac{d}{dt} T(A, t) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i(t)(\vec{V}_i(t))}$$

où $\mathcal{A}_i(t)$ désigne le torseur dynamique de A_i, et $\vec{V}_i(t)$ le champ (équiprojectif) des vecteurs vitesse de A_i, à l'instant t. On peut donc énoncer :

Proposition. La dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique d'un système constitué par un nombre fini de corps rigides, est égale à la somme des puissances des torseurs dynamiques de chacun de ces corps.

Comme précédemment on a, lorsque le référentiel est galiléen :

Corollaire. Lorsque le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique d'un système constitué par un nombre fini de corps rigides, est à chaque instant égale à la somme des puissances des torseurs des efforts totaux exercés sur chacun de ces corps.

Remarque. On notera que le torseur des efforts totaux exercés sur l'un de ces corps, par exemple A_i, est somme du torseur des efforts exercés sur A_i par les corps autres que le système considéré (efforts extérieurs) et des torseurs des efforts exercés sur A_i par chaque A_j ($j \neq i$, $1 \leq j \leq k$) (efforts intérieurs au système, mais extérieurs aux corps rigides qui le constituent).

5 . 5 . Dérivée de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre d'inertie.

Considérons le cas d'un système constitué par un nombre fini de corps rigides (car il englobe celui d'un corps rigide unique, et aussi celui d'un nombre fini de points matériels). La proposition établie en 5.4.c ci-dessus est valable pour le référentiel du centre d'inertie. Par contre son Corollaire n'a été établi que pour un référentiel galiléen. Nous allons voir cependant que ce corollaire reste valable pour le référentiel du centre d'inertie, même s'il n'est pas galiléen.

Supposons donc le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, et soit $\mathcal{R}_1$ le référentiel du centre d'inertie (dont le mouvement relativement à $\mathcal{R}$ est un mouvement de translation, tel que le centre d'inertie du système A soit fixe par rapport à $\mathcal{R}_1$).

On a vu (chapitre IV paragraphe 4.4) que le principe fondamental de la dynamique restait applicable dans le référentiel $\mathcal{R}_1$, à condition d'ajouter, au torseur des efforts extérieurs exercés sur A, les torseurs des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Or dans le cas présent, le torseur des forces d'inertie de Coriolis est nul, car le mouvement d'entraînement est un mouvement de <u>translation</u> . Calculons la somme des puissances des torseurs des forces d'inertie d'entraînement de chacun des corps A_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. On obtient :

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{A_{i_t}} - \frac{d^2 G(t)}{d t^2} \cdot \vec{V}_i (x, t) \, d m_t (x)$$

où $\vec{V}_i (x, t)$ désigne la vitesse du corps A_i , au point x et à l'instant t , <u>relativement au référentiel du centre d'inertie</u>. Mais ceci est nul, car la somme :

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{A_i t} \vec{V}_i (x, t) \, d m_t (x)$$

qui n'est autre que la résultante cinétique relativement au référentiel du centre d'inertie, est nulle. On peut donc énoncer :

<u>Proposition.</u> Lorsque le référentiel considéré est le référentiel du centre d'inertie (c'est à dire le référentiel en translation relativement à un référentiel galiléen, dans lequel le centre d'inertie est fixe), la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique d'un système d'un nombre fini de corps rigides, est égale à la somme des puissances des torseurs des efforts totaux exercés sur chacun de ces corps.

6 . Notion de travail.

On a défini en 5.3. b) , la notion de puissance d'un torseur, appliqué à un corps rigide (relativement à un référentiel donné). La notion de travail en découle :

<u>Définition.</u> Soit $\tau(t)$ un torseur, dépendant du temps t , appliqué à un corps rigide A . On appelle travail de τ pendant l'intervalle de temps $[\, t_1, t_2 \,]$, l'intégrale sur cet intervalle de la puissance de $\tau(t)$. Cette notion est relative à un référentiel, supposé choisi.

L'expression de ce travail est

$$(5.6.1) \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \tau(t) \, (\vec{V}(t)) \, d t}$$

où $\vec{V}(t)$ est le champ (équiprojectif) des vecteurs vitesse de A , à l'instant t .

Les propositions et leurs corollaires concernant la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique, conduisent immédiatement à des énoncés équivalents en termes de travail.

Nous donnons ci-dessous ceux qui concernent le cas d'un système de corps solides (les autres en sont des cas particuliers).

Proposition. La variation, pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, de l'énergie cinétique d'un système d'un nombre fini de corps rigides, est égale à la somme des travaux pendant cet intervalle de temps, des torseurs dynamiques de chacun de ces corps.

Corollaire. Lorsque le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, ou bien lorsque c'est le référentiel du centre d'inertie, la variation pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ de l'énergie cinétique d'un système d'un nombre fini de corps rigides, est égale à la somme des travaux, pendant cet intervalle de temps, des efforts totaux exercés sur chacun de ces corps.

5 . 7 . L'intégrale première de l'énergie.

Les résultats concernant la variation de l'énergie cinétique d'un système au cours du temps, sont particulièrement intéressants lorsqu'ils permettent l'obtention d'une intégrale première du mouvement du système. On appelle ainsi une fonction, des paramètres de position du système et de leurs dérivées par rapport au temps, et éventuellement du temps lui-même, qui lorsqu'on donne aux variables intervenant dans cette fonction, les valeurs effectivement prises par ces paramètres et leurs dérivées au cours d'un mouvement, reste constante.

On a en particulier, une intégrale première de l'énergie, pour un système matériel constitué par un nombre fini de corps rigides, lorsque les efforts qui s'exercent sur les éléments de ce système sont :

- soit des efforts "conservatifs" ;
- soit des efforts de "liaisons parfaites".

Explicitons la signification de ces termes :

Définition. Considérons un système d'efforts s'exerçant respectivement sur le corps rigides $A_1, A_2, \dots A_k$, et représentés par des torseurs $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots \mathcal{T}_k$ et supposons que chaque $\mathcal{T}_i$ est une fonction connue des positions de $A_1, A_2 \dots A_k$. On dit que ce système d'efforts est conservatif (relativement à un référentiel choisi $\mathcal{R}$) s'il existe une fonction U de la position des corps $A_1, A_2, \dots A_k$ telle que, quelles que soient les positions de ces corps et leurs champs (équiprojectifs) de vecteurs vitesse (relativement à $\mathcal{R}$) $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots \vec{V}_k$, la somme $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i(\vec{V}_i)$ des puissances des efforts $\mathcal{T}_i$ soit égale à la dérivée par rapport à t de la fonction U.

Attention : On remarquera que dans la définition ci-dessus, les champs de vecteurs vitesses $\vec{V}_1, \dots \vec{V}_k$ ne sont pas nécessairement les champs de vecteurs vitesse effectivement réalisés lors d'un mouvement réel : ils sont choisis arbitrairement.

La dérivée par rapport à t de la fonction U est alors calculée comme si les corps A_i se déplaçaient effectivement, au cours du temps, en ayant les champs de vecteurs vitesse V_i.

On dit que U est une <u>fonction de force</u>, pour le système d'efforts conservatif considéré.

<u>Exemple 1. Corps rigide unique, soumis à l'effort de pesanteur.</u>

Soit A ce corps rigide, de masse m, et G son centre d'inertie. On a vu que le torseur de l'effort de pesanteur exercé sur A, est uniforce, et défini par le vecteur lié $(G, -m g \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_3$ est un vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut et g le module de l'accélération de la pesanteur. La puissance de ce torseur, pour un mouvement de A dans lequel la vitesse de G est $\frac{d \vec{G}(t)}{d t}$, est :

$$-m \vec{e}_3 \cdot \frac{d \vec{G}(t)}{d t} = \frac{d}{d t} \left(-m x_3 (G)\right)$$

où $x_3 (G)$ désigne la troisième coordonnée de G, dans un repère affine orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'origine quelconque, dont le troisième vecteur de base est vertical dirigé vers le haut. On a donc une fonction de force :

$$-m g x_3 (G)$$

<u>Exemple 2. Système de deux masses ponctuelles s'attirant suivant la loi de Newton.</u>

Considérons deux points matériels A_1 et A_2, de masses respectivement m_1 et m_2, s'attirant suivant la loi de Newton. Cela signifie que l'effort exercé par A_2 sur A_1 est le torseur uniforce, défini par le vecteur lié (k étant la constante d'attraction de Newton) :

$$\left(A_1 , k m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{| \overrightarrow{A_1 A_2} |^3}\right)$$

et que l'effort exercé par A_1 sur A_2 est défini par le vecteur lié

$$\left(A_2 , k m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{A_2 A_1}}{| \overrightarrow{A_2 A_1} |^3}\right)$$

Si $\vec{V}_1$ est la vitesse de A_1 et $\vec{V}_2$ la vitesse de A_2, la somme des puissances de ces deux efforts est :

$$\frac{k m_1 m_2}{| \overrightarrow{A_1 A_2} |^3} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \overrightarrow{A_1 A_2}$$

Mais on remarque que si on désigne par $d(A_1(t), A_2(t)) = |A_1(t)\, A_2(t)|$ la distance des positions occupées par les points A_1 et A_2 à l'instant t, on a (si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont les vitesses de A_1 et A_2 à cet instant :

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{d(A_1(t), A_2(t))}\right) = \frac{d}{d\,t}\left[\left(\overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)} \cdot \overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\,|\overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)}|^3}\left[\overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) + (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)}\right]$$

$$= \frac{(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)}}{|\overrightarrow{A_1(t)\,A_2(t)}|^3}$$

On voit donc qu'il existe une fonction de force, qui est :

$$\frac{k\, m_1\, m_2}{d(A_1, A_2)}$$

Remarque. Le lecteur pourra vérifier, à titre d'exercice, que le résultat ci-dessus se généralise : un système d'un nombre fini quelconque de corps rigides, s'attirant deux à deux selon la loi de Newton, est conservatif, même lorsqu'on ne néglige pas les dimensions de ces corps.

Définition. On dit qu'une liaison, entre deux corps rigides A_i et A_j, est parfaite si, quels que soient les champs de vecteurs vitesse $\vec{V}_i$ et $\vec{V}_j$ de ces deux corps compatibles avec la liaison, la somme de la puissance de l'effort de liaison exercé par A_i sur A_j et de l'effort de liaison exercé par A_j sur A_i, est nulle.

On étudiera de manière plus détaillée les liaisons parfaites dans le chapitre suivant. Revenons maintenant à l'énergie cinétique. Si le système, constitué par un nombre fini de corps rigides $A_1, A_2, \ldots A_k$ est tel que tous les efforts exercés sur chacun de ces corps soient, ou bien conservatifs, ou bien des efforts de liaisons parfaites, alors il existe une fonction de force U des positions des corps $A_1, \ldots A_k$, dont la dérivée par rapport à t est égale à la somme des puissances des efforts exercés sur ces corps. Cette puissance étant d'autre part, si le référentiel est galiléen, égale à la dérivée par rapport à t de l'énergie cinétique T du système, on a :

$$\frac{d}{d\,t}\, T(t) = \frac{d}{d\,t}\,(U(t))$$

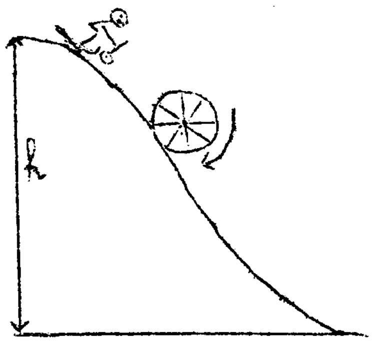
autrement dit :

$$\boxed{T - U = \text{Constante au cours du mouvement}}$$

La fonction $T - U$ (des paramètres de position du système, et de leurs dérivées par rapport au temps) est appelée <u>intégrale première de l'énergie</u>.

La fonction $-U$ (opposé de la fonction de force) est souvent appelée <u>énergie potentielle</u> du système. Comme U, elle est définie à une constante additive près. L'existence de l'intégrale première de l'énergie traduit alors la conservation de l'énergie totale (cinétique + potentielle) du système.

<u>Exemples</u> a) Un point matériel de masse m, glisse sans frottement sur une pente, sous l'effet de la pesanteur. Sa vitesse initiale est nulle. Lorsque ce



point a descendu une dénivellation h, son énergie potentielle a diminué de $m\,g\,h$. Par conséquent son énergie cinétique a augmenté de la même quantité. Sa vitesse est donc (en module)

$$V = \sqrt{2\,g\,h}$$

b) Même problème, le point matériel étant remplacé par une roue, de révolution autour de son axe, roulant sans glisser sur la pente. On suppose connus le moment d'inertie de la roue par rapport à son centre, sa masse et son rayon. On laisse au lecteur le soin d'étudier cet exemple, à titre d'exercice (on tiendra compte, pour le calcul de l'énergie cinétique de la roue, de la vitesse de son centre et de la rotation de la roue autour de son axe.

c) Problème de Képler (mouvement d'un point matériel dans un champ central newtonien). On vérifiera que l'écriture de l'intégrale première de l'énergie, et d'une autre intégrale première (du moment cinétique, exprimant que le moment cinétique du point matériel par rapport au centre attractif reste constant), suffit pour trouver les équations de la trajectoire et la loi horaire du mouvement.