Chapitre IV

Le calcul des torseurs cinétique et dynamique d'un système matériel.

4 . 1 . Le centre d'inertie d'un système matériel.

Dans tout ce paragraphe, l'espace - temps est rapporté à un référentiel $\mathcal{R}$ donné. Une origine et une unité de temps ont été choisies, et tout instant T est représenté par sa date t . Une unité de masse a également été choisie. On étudie le mouvement, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, d'un système matériel strict A (c'est à dire d'un système matériel dont toute partie mesurable est un système matériel). La position de A à l'instant t est la partie A_t de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension 3 , et la répartition des masses de A à l'instant t est définie par la mesure positive m_t sur A_t . Pour tout point x de A_t , $\vec{V}(x, t)$ désigne la vitesse, relativement à $\mathcal{R}$, du point de A qui, à la date t , occupe la position x .

On suppose toutes les intégrales écrites ci-après convergentes (ce qui est le cas si la mesure m_t est finie et le champ de vecteurs $\vec{V}$ suffisamment régulier).

On a vu (chapitre III , formules 3.3.5 , 3.3.7 , 3.3.9) que le torseur cinétique $\mathcal{C}(t)$ de A à l'instant t est défini par la formule (dans laquelle $\vec{W}$ désigne un champ de vecteurs équiprojectif quelconque) :

$$(4.1.1) \qquad \mathcal{C}(t)(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{W}(x)\, d\, m_t(x)$$

La résultante cinétique de $\mathcal{C}(t)$ est :

$$(4.1.2) \qquad \vec{R}_c(t) = \int_{A_t} \vec{V}(x, t)\, d\, m_t(x)$$

Si P est un point quelconque, le moment cinétique au point P est :

$$(4.1.3) \qquad \vec{M}_c(P, t) = \int_{A_t} \overrightarrow{Px} \wedge \vec{V}(x, t)\, d\, m_t(x)$$

La masse totale de A est :

$$(4.1.4) \qquad m(A) = \int_{A_t} d\, m_t(x)$$

On rappelle (chapitre III , paragraphe 3.1) qu'elle ne dépend pas de t , A étant un système matériel.

Définition. On appelle centre d'inertie du système A à l'instant t, le point $G(t)$ de $\mathcal{E}$ défini par l'expression (où P est un point quelconque de $\mathcal{E}$) :

$$(4.1.5) \qquad \boxed{\overrightarrow{PG(t)} = \frac{1}{m(A)} \int_{A_t} \overrightarrow{Px} \; d\,m_t(x)}$$

Remarque. On vérifie que la définition de $G(t)$ est bien indépendante du choix du point P, et qu'on peut aussi définir $G(t)$ comme étant le point unique de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$(4.1.6) \qquad \boxed{\int_{A_t} \overrightarrow{G(t)x} \; d\,m_t(x) = 0\,.}$$

Théorème. On a entre la dérivée par rapport à t de la position $G(t)$ du centre d'inertie, et la résultante cinétique, la relation :

$$(4.1.7) \qquad \boxed{m(A)\,\frac{d\,\overrightarrow{G(t)}}{d\,t} = \vec{R}_c(t)}$$

Commentaires et esquisse de la démonstration.

a) On peut appeler $\frac{d\,\vec{G}(t)}{d\,t}$ " vitesse du centre d'inertie ", relativement au référentiel $\mathcal{R}$. Toutefois, ce terme risque de prêter à confusion, car le centre d'inertie n'est pas, en général, un point cinématique du corps A (lorsque A n'est pas rigide), de sorte que $\frac{d\,G(t)}{d\,t}$ n'est pas en général égal à la vitesse $\vec{V}(G(t), t)$ du point de A qui, à l'instant t, occupe la position $G(t)$.

b) Le théorème est très analogue au théorème vu dans la chapitre III, qui affirme que le torseur dynamique est la dérivée par rapport à t du torseur cinétique. Comme celle de ce dernier, sa démonstration fait intervenir de manière essentielle la propriété de conservation de la masse. Nous donnerons cette démonstration seulement dans le cas particulier où A est un ensemble fini de points matériels $\{N_1, \dots N_k\}$ de masses $m_1, \dots m_k$. $N_i(t)$ désignant la position de N_i à l'instant t on a (P étant un point quelconque de $\mathcal{E}$) :

$$\vec{R}_c(t) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\vec{V}_i(t) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$

$$m(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

$$m(A)\,\overrightarrow{PG(t)} = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\overrightarrow{PN_i}(t)$$

En considérant P comme fixé (indépendant de t) dérivons cette dernière égalité par rapport à t . Nous obtenons :

$$m\,(A)\ \frac{d\,\overrightarrow{G\,(t)}}{d\,t} = \sum_{i=1}^{k} m_i\ \frac{d\,\overrightarrow{N_i\,(t)}}{d\,t} = \vec{R}_c\,(t)$$

ce qui établit le théorème.

Corollaire : Théorème du mouvement du centre d'inertie. Si le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, le mouvement du centre d'inertie G du système A est le même que celui qu'aurait un point matériel, dont la masse serait égale à la masse totale m (A) de A , et qui serait soumis à une force égale à la résultante du torseur des efforts exercés sur A par tous les corps autres que A .

Ce corollaire résulte en effet immédiatement du théorème précédent, du principe de la dynamique (chapitre III , paragraphe 3.5) et de l'étude du mouvement d'un point matériel (chapitre III , paragraphe 3. 6).

On a vu dans le chapitre III que si P est un point fixé de $\mathcal{E}$ (indépendant de t) , la dérivée par rapport à t du moment cinétique $\vec{M}_c$ (P, t) du corps A au point P , est égale au moment dynamique $\vec{M}_d$ (P, t) de A au même point P . Il est intéressant de voir comment on doit modifier ce résultat lorsque le point P dépend (différentiablement) de t , et en particulier lorsque P est le centre d'inertie de A .

Théorème. On a la formule (P (t) désignant un point mobile de $\mathcal{E}$, dont la position dépend différentiablement de t) :

$$(4.1.8)\quad \boxed{\frac{d}{d\,t}\left(\vec{M}_c\,(P\,(t),\,t)\right) = \vec{M}_d\,(P\,(t),\,t) + \vec{R}_c(t) \wedge \frac{d\,\vec{P}\,(t)}{d\,t}}$$

En particulier, si P (t) est le centre d'inertie G (t) , on a :

$$(4.1.9)\quad \boxed{\frac{d}{d\,t}\left(\vec{M}_c\,(G\,(t),\,t)\right) = \vec{M}_d\,(G\,(t),\,t)}$$

formule identique à celle qui lie les moments cinétique et dynamique de A en un point P fixe (indépendant de t) :

$$(4.1.10)\quad \boxed{\frac{d}{d\,t}\left(\vec{M}_c\,(P,\,t)\right) = \vec{M}_d\,(P,\,t)}$$

Démonstration. Soit Q un point fixé de $\mathcal{E}$ (indépendant de t). On a :

$$\vec{M}_c\,(P\,(t),\,t) = \vec{M}_c\,(Q,\,t) + \vec{R}_c\,(t) \wedge \overrightarrow{QP}\,(t)$$

Dérivons cette expression par rapport à t . Compte tenu de :

$$\frac{d}{dt} (\vec{M}_c (Q , t) = \vec{M}_d (Q , t)$$

et de :

$$\frac{d \vec{R}_c (t)}{d t} = \vec{R}_d (t)$$

Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} (\vec{M}_c (P (t), t)) = \vec{M}_d (Q , t) + \vec{R}_d (t) \wedge \vec{QP} (t) + \vec{R}_c (t) \wedge \frac{d \vec{P} (t)}{d t}$$

$$= \vec{M}_d (P (t), t) + \vec{R}_c (t) \wedge \frac{d \vec{P} (t)}{d t}$$

En particulier si $P (t) = G (t)$, $\frac{d \vec{G} (t)}{d t}$ est proportionnel à $\vec{R}_c (t)$ d'après le théorème précédent, donc le second terme est nul. Il en est de même si P est fixe car alors $\frac{d \vec{P} (t)}{d t}$ est nul.

4 . 2 . Calcul pratique de la position du centre d'inertie.

La détermination de la position du centre d'inertie $G (t)$ du corps A à l'instant t , est basée sur l'emploi des formules (4.1.5) ou (4.1.6). Convenons, dans tout ce paragraphe, d'omettre d'écrire la variable t , ce qui ne risque pas de causer de confusions puisque nous considérons ici seulement la position du corps A à un instant fixé. Si (x_1, x_2, x_3) désignent les trois coordonnées, dans un repère affine orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$, d'un point x de A , la formule (4.1.5) dans laquelle on fait $P = 0$ donne en effet les coordonnées $x_i (G)$ du centre d'inertie :

$$(4.2.1) \quad \boxed{x_i (G) = \frac{1}{m (A)} \int_A x_i \; d m (x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)}$$

L'utilisation de symétries matérielles permet souvent de simplifier les calculs :

Définition On dit que le système matériel A possède un plan Π (resp. un axe Δ , resp. un centre S) de symétrie matérielle si :

- d'une part la partie A de $\mathcal{E}$ (position de A à l'instant considéré) possède Π (resp. Δ , resp. S) pour plan (resp. axe, resp. centre) de symétrie géométrique.

- d'autre part, la mesure m qui représente la répartition de la masse de A à l'instant considéré, est invariante par symétrie par rapport à Π (resp. Δ , resp. S).

Cela signifie que si B et B' sont deux parties de A symétriques par rapport à Π (resp. Δ , resp. S) , on a :

$$m(B) = m(B') .$$

<u>Théorème</u>. Si, à l'instant considéré, le corps A possède un plan de symétrie matérielle Π , le centre d'inertie G de A à cet instant est situé dans Π . De même, si A possède un axe de symétrie matérielle Δ , G est situé sur Δ . De même également, si A possède un centre de symétrie matérielle S , G coïncide avec S .

<u>Démonstration</u>. On a d'après (4.1.6) :

$$\int_A \vec{Gx} \; dm(x) = 0 .$$

Désignons par $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la symétrie par rapport à Π. En considérant les vecteurs (éléments de $\vec{\mathcal{E}}$) comme des classes d'équivalence de bipoints de $\mathcal{E}$, s définit de manière naturelle une application linéaire de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même, toujours notée s . Une propriété classique de l'intégrale indique que

$$\int_A s(\vec{Gx}) \; dm(x) = s(0) = 0 .$$

Mais $s(\vec{Gx}) = \overrightarrow{s(G)\,s(x)}$ d'où :

$$\int_A \overrightarrow{s(G)\,s(x)} \quad dm(x) = 0$$

En prenant $y = s(x)$ comme nouvelle variable parcourant A , et <u>compte tenu de l'invariance de la mesure m</u> par la symétrie s , on peut écrire cette intégrale :

$$\int_A \overrightarrow{s(G)\,y} \; dm(y) = 0$$

Ceci prouve, d'après (4.1.6) , que s(G) est le centre d'inertie de A , donc que $s(G) = G$. Ceci a lieu si et seulement si G est situé dans Π .

<u>Exemple 1</u>. Centre d'inertie d'une demi boule homogène de masse volumique ρ de rayon R . Prenons pour plan de coordonnées $(x_1 0 x_2)$ le plan qui limite la demi boule, 0 en étant le centre. Le troisième axe $0 x_3$ est axe de symétrie matérielle, donc G est situé sur cet axe. Il suffit de calculer sa troisième coordonnée $x_3(G)$. On a :

$$m(A)\, x_3(G) = \iiint_A x_3 \,\rho\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_0^R \rho\, x_3 \left[\iint_{B(x_3)} dx_1\, dx_2\right] dx_3$$

où $D(x_3)$ désigne la section de la demi - boule par le plan parallèle à $x_1 0 x_2$ de troisième coordonnée x_3 constante :

$$D(x_3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \; ; \; x_3 \text{ fixé} , \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leqslant R^2 \right\}$$

L'intégrale :

$$\int_{D(x_3)} d\,x_1 \; d\,x_2$$

n'est autre que la surface du disque $D(x_3)$: elle est donc égale à $\pi (R^2 - x_3^2)$. D'autre part on a :

$$m(A) = \rho \iiint_A d\,x_1 \; d\,x_2 \; d\,x_3 = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho$$

puisque l'intégrale figurant dans cette expression n'est autre que le volume de la demi boule. On a donc :

$$\frac{2}{3} \pi R^3 \rho \quad x_3(G) = \rho \int_0^R x_3 \; \pi (R^2 - x_3^2) \; d\,x_3 = \frac{\pi R^4 \rho}{4}$$

d'où

$$x_3(G) = \frac{3}{8} R \, .$$

Exemple 2. Centre d'inertie d'une demi sphère homogène, de masse surfacique ρ , de rayon R . Avec les mêmes axes de coordonnées que dans le cas précédent, $0\,z$ est encore axe de symétrie matérielle et il suffit de calculer x_3 (G). On a comme ci - dessus

$$m(A) x_3(G) = \iint_A x_3 \; \rho \, d^2 \sigma$$

En prenant pour variables la colatitude θ (angle de l'axe $0\,x_3$ avec $0\vec{x}$) et la longitude φ (angle de $0\,x_1$ avec la projection de $0\vec{x}$ sur le plan $x_1 0 x_2$) on a :

$$\iint_A x_3 \; \rho \, d^2 \sigma = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos\theta \left[\int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta \, d\varphi \right] d\theta$$

$$= 2 \pi \rho R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \; \cos\theta \; d\theta = \pi R^3 \rho$$

d'où puisque $m(A) = 2 \pi R^2 \rho$

$$x_3(G) = \frac{R}{2}$$

4 . 3 . Effet d'un changement de référentiel sur les torseurs cinétique et dynamique.

Les hypothèses générales et les notations étant les mêmes que dans le paragraphe 1 , on considère maintenant, en plus du référentiel $\mathcal{R}$ (considéré comme " fixe") , un autre référentiel $\mathcal{R}_1$ (dit " mobile ").

Soit M un point matériel du corps A , qui à l'instant t occupe la position x . On désignera, comme dans le chapitre 1 , par :

$\vec{V}_a(x, t)$ sa vitesse "absolue", c'est à dire sa vitesse relativement à $\mathcal{R}$

$\vec{V}_r(x, t)$ sa vitesse "relative", c'est à dire sa vitesse relativement à $\mathcal{R}_1$

$\vec{V}_e(x, t)$ sa vitesse "d'entraînement", c'est à dire la vitesse, relativement à $\mathcal{R}$, du point cinématiquement lié à $\mathcal{R}_1$ qui occupe à l'instant t la position x .

On sait (chapitre I) qu'on a la formule de composition des vitesses :

$$\vec{V}_a(x, t) = \vec{V}_e(x, t) + \vec{V}_r(x, t) \tag{4.3.1}$$

Compte tenu de (4.1.1) , on en déduit la formule de composition des torseurs cinétiques :

$$\boxed{\mathscr{C}_a(t) = \mathscr{C}_e(t) + \mathscr{C}_r(t)} \tag{4.3.2}$$

$\mathscr{C}_a(t)$ est dit "torseur cinétique absolu" de A , à l'instant t . C'est le torseur cinétique de A dans son mouvement absolu, c'est à dire relativement à $\mathcal{R}$.

$\mathscr{C}_r(t)$ est dit "torseur cinétique relatif" de A , à l'instant t . C'est le torseur cinétique de A dans son mouvement relatif, par rapport à $\mathcal{R}_1$.

$\mathscr{C}_e(t)$, dit "torseur cinétique d'entraînement" de A , est le torseur cinétique relativement à $\mathcal{R}$ qu'aurait un corps rigide fictif, cinématiquement lié au référentiel $\mathcal{R}_1$, et qui à l'instant t coïnciderait avec A et aurait la même distribution de masses que A .

Les expressions de $\mathscr{C}_a(t)(\vec{W})$, $\mathscr{C}_r(t)(\vec{W})$, $\mathscr{C}_e(t)(\vec{W})$ ($\vec{W}$ étant un champ de vecteurs équiprojectif quelconque) s'obtiennent en remplaçant $\vec{V}(x, t)$ dans (4.1.1) , respectivement par $\vec{V}_a(x, t)$, $\vec{V}_r(x, t)$, $\vec{V}_e(x, t)$.

En désignant les résultantes de $\mathscr{C}_a(t)$, $\mathscr{C}_r(t)$, $\mathscr{C}_e(t)$ respectivement par $\vec{R}_{ca}(t)$ (résultante cinétique "absolue") $\vec{R}_{cr}(t)$ (résultante cinétique "relative") et $\vec{R}_{ce}(t)$ (résultante cinétique "relative") on a évidemment (conséquence de (4.3.2)) :

$$(4.3.3) \quad \boxed{\vec{R}_{ca}(t) = \vec{R}_{ce}(t) + \vec{R}_{cr}(t)}$$

De même, si P est un point quelconque de $\mathscr{E}$, et si on désigne par $\vec{M}_{ca}(P, t)$, $\vec{M}_{ce}(P, t)$ et $\vec{M}_{cr}(P, t)$ les moments au point P, respectivement, des torseurs $\mathscr{C}_a(t)$, $\mathscr{C}_e(t)$, $\mathscr{C}_r(t)$, (appelés moments cinétiques, respectivement, absolu, d'entraînement, relatif), on a :

$$(4.3.4) \quad \boxed{\vec{M}_{ca}(P, t) = \vec{M}_{ce}(P, t) + \vec{M}_{cr}(P, t)}$$

Etudions maintenant le cas du torseur dynamique. On considère un point M du corps A, qui à l'instant t occupe la position x.
Comme dans le chapitre I, on désigne par :

- $\vec{\Gamma}_a(x, t)$ son accélération "absolue" par rapport à $\mathcal{R}$
- $\vec{\Gamma}_r(x, t)$ son accélération "relative" par rapport à $\mathcal{R}_1$
- $\vec{\Gamma}_e(x, t)$ son accélération "d'entraînement", c'est à dire l'accélération, relativement à $\mathcal{R}$, du point cinématiquement lié à $\mathcal{R}_1$ qui occupe à l'instant t la position x.
- $\vec{\Gamma}_c(x, t)$ son accélération complémentaire (de Coriolis).

Rappelons qu'on a :

$$(4.3.5) \quad \vec{\Gamma}_c(x, t) = 2\, \vec{\Omega}_e(t) \wedge \vec{V}_r(x, t)$$

où $\vec{\Omega}_e(t)$ est le vecteur taux de rotation du champ de vitesses d'entraînement, à la date t.

On sait (chapitre I) qu'on a la formule de composition des accélérations :

$$(4.3.6) \quad \vec{\Gamma}_a(x, t) = \vec{\Gamma}_e(x, t) + \vec{\Gamma}_r(x, t) + \vec{\Gamma}_c(x, t)$$

On désigne par $\mathcal{A}_a(t)$ le torseur dynamique "absolu" (c'est à dire, pour le mouvement relativement à $\mathcal{R}$) de A à l'instant t. Sa résultante $\vec{R}_{da}(t)$, et son moment en un point P $M_{da}(P, t)$, sont appelés respectivement, résultante dynamique absolue et moment dynamique absolu au point P, du corps A à l'instant t. On a vu que $\mathcal{A}_a(t)$, $\vec{R}_{da}(t)$ et $\vec{M}_{da}(P, t)$ sont donnés par les formules, où $\vec{W}$ désigne un champ de vecteurs équiprojectif quelconque :

$$(4.3.7) \quad \mathcal{A}_a(t)(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{\Gamma}_a(x, t) \cdot \vec{W}(x)\, d\, m_t(x)$$

$$(4.3.8) \qquad \vec{R}_{da}(t) = \int_{A_t} \vec{\Gamma}_a(x, t) \, d\, m_t(x)$$

$$(4.3.9) \qquad \vec{M}_{da}(P, t) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{\Gamma}_a(x, t) \, d\, m_t(x)$$

Si, dans ces formules, on remplace $\vec{\Gamma}_a(x, t)$ sucessivement par $\vec{\Gamma}_r(x, t)$, $\vec{\Gamma}_e(x, t)$ et $\vec{\Gamma}_c(x, t)$, on obtient respectivement :

- les torseur dynamique $\mathcal{A}_r(t)$, résultante dynamique $\vec{R}_{dr}(t)$, moment dynamique en P $\vec{M}_{dr}(P, t)$, dits <u>relatifs</u>, du corps A à l'instant t (c'est à dire, pour le mouvement de A relativement à $\mathcal{R}_1$).
- les torseur dynamique $\mathcal{A}_e(t)$, résultante dynamique $\vec{R}_{de}(t)$, moment dynamique en P $\vec{M}_{de}(P, t)$, dits <u>d'entraînement</u>, du corps A à l'instant t. Ce sont en fait les torseur dynamique, résultante dynamique et moment dynamique en P, qu'aurait un corps rigide fictif cinématiquement lié à $\mathcal{R}_1$, pour son mouvement relativement à $\mathcal{R}$, ce corps fictif occupant à l'instant t la même position que A et ayant à cet instant la même répartition de masses que A.
- les torseur dynamique $\mathcal{A}_c(t)$, résultante dynamique $\vec{R}_{dc}(t)$ et moment dynamique en P $\vec{M}_{dc}(P, t)$, dits <u>complémentaires</u>, ou <u>de Coriolis</u>, du corps A à l'instant t.

On déduit immédiatement de la formule de composition des accélérations (4.3.6), les formules de composition des torseurs dynamiques, des résultantes dynamiques et des moments dynamiques :

$$(4.3.10) \qquad \mathcal{A}_a(t) = \mathcal{A}_e(t) + \mathcal{A}_r(t) + \mathcal{A}_c(t)$$

$$(4.3.11) \qquad \vec{R}_{da}(t) = \vec{R}_{de}(t) + \vec{R}_{dr}(t) + \vec{R}_{dc}(t)$$

$$(4.3.12) \qquad \vec{M}_{da}(P, t) = \vec{M}_{de}(P, t) + \vec{M}_{dr}(P, t) + \vec{M}_{dc}(P, t)$$

4.4. <u>Conséquences : référentiels galiléens et non galiléens</u>

En gardant les hypothèses et notations du paragraphe précédent, supposons le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. D'après le principe de la dynamique on a alors, pour tout instant t :

$$(4.4.1) \qquad \mathcal{A}_a(t) = \mathcal{T}(t)$$

où $\mathcal{T}(t)$ désigne le torseur des efforts exercés sur A, à l'instant t, par les corps autres que A.

Si on étudie le mouvement de A relativement au référentiel $\mathcal{R}_1$, on est donc amené à écrire :

$$(4.4.2) \qquad \mathcal{A}_r(t) = -\mathcal{A}_e(t) - \mathcal{A}_c(t) + \tau(t)$$

et on voit que les équations qui expriment le principe de la dynamique, ne gardent pas en général la même forme que celle qu'ont ces équations lorsque le mouvement de A est étudié relativement à un référentiel galiléen. Un artifice commode, qui permet de remettre ces équations sous la forme habituelle, consiste à poser la définition :

Définition. On appelle torseur des forces d'inertie exercées sur A à l'instant t , lorsqu'on étudie le mouvement de A relativement au référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$, le torseur :

$$-\mathcal{A}_e(t) - \mathcal{A}_c(t)$$

Remarques. 1°) Le premier terme $-\mathcal{A}_e(t)$ est appelé torseur des forces d'inertie d'entraînement, le second $-\mathcal{A}_c(t)$ torseur des forces d'inertie complémentaires, ou de Coriolis.

2°) Ces deux torseurs $-\mathcal{A}_e(t)$ et $-\mathcal{A}_c(t)$, sont indépendants du choix du référentiel galiléen $\mathcal{R}$, qui a pourtant servi à les définir. Cela résulte en effet de l'étude des changements de référentiel galiléen faite ci-après.

3°) Les éléments de réduction (résultante et moment en un point) du torseur des forces d'inertie (total, d'entraînement, ou complémentaire) sont appelés résultante des forces d'inertie et moment des forces d'inertie en ce point (total, d'entraînement ou complémentaire, selon les cas). Attention : on définira plus loin la notion de moment d'inertie, à ne pas confondre avec celle de moment des forces d'inertie.

On peut alors énoncer le théorème (qui ne fait qu'exprimer (4.4.2)):

Théorème. Les équations exprimant le principe de la dynamique conservent, lorsqu'on étudie le mouvement de A relativement à un référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$, une forme identique à celle qu'elles ont pour un référentiel galiléen, à condition d'ajouter, au torseur des efforts exercés sur A par les corps autres que A , le torseur des forces d'inertie.

En supposant toujours le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, voyons maintenant à quelle condition le référentiel $\mathcal{R}_1$ est aussi galiléen. D'après la définition même de la notion de référentiel galiléen (implicite dans l'énoncé du principe de la dynamique) $\mathcal{R}_1$ est galiléen si et seulement si tout système matériel strict A possède un torseur des forces d'inertie nul, à tout instant t .

En choisissant pour A un point matériel de masse m situé en x, ayant une vitesse relative nulle à l'instant t, on voit que $-\mathcal{A}_c(t)$ est nul et que $-\mathcal{A}_e(t)$ est le torseur uniforce défini par le vecteur lié $(x, -m\vec{\Gamma}_e(x, t))$. Une condition nécessaire pour que $\mathcal{R}_1$ soit galiléen est donc que pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout instant t, $\vec{\Gamma}_e(x, t)$ soit nul. Il est facile de voir que cette sondition équivaut à la suivante : Le mouvement de $\mathcal{R}_1$ relativement à $\mathcal{R}$ est un mouvement de translation rectiligne et uniforme. On vérifie alors facilement que cette condition est aussi suffisante, car $\vec{\Gamma}_e(x, t)$ t $\vec{\Omega}_e(t)$ sont nuls, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout t, de sorte que quel que soit le système matériel A, on a toujours $\vec{\Gamma}_a(x, t) = \vec{\Gamma}_r(x, t)$ et par suite $\mathcal{A}_a(t) = \mathcal{A}_r(t)$. On peut donc énoncer :

Théorème. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ deux référentiels, le premier étant galiléen. Alors $\mathcal{R}_1$ est galiléen si et seulement si son mouvement relativement à $\mathcal{R}$ est un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

4 . 5 . Le référentiel du centre d'inertie.

Les hypothèses et notations étant les mêmes que dans le paragraphe 4.3, considérons le cas où le référentiel $\mathcal{R}_1$ est choisi de telle manière que :

1°) le centre d'inertie $G(t)$ soit fixe par rapport à $\mathcal{R}_1$.

2°) A chaque instant t, le champ des vitesses d'entraînement $\vec{V}_e(x, t)$ est un champ constant (c'est à dire indépendant du point d'espace x), dont la valeur peut dépendre de t. Il est équivalent de dire, qu'à chaque instant t, le vecteur taux de rotation d'entraînement $\vec{\Omega}_e(t)$ est nul. Dans ce cas le mouvement de $\mathcal{R}_1$ relativement à $\mathcal{R}$ est un mouvement de translation (pas nécessairement rectiligne, ni uniforme).

On dit alors que $\mathcal{R}_1$ est le référentiel du centre d'inertie du corps A.

Calculons, dans ce cas, les résultantes cinétiques et dynamiques du corps A. On a :

$$(4.5.1) \quad \vec{V}_e(x, t) = \frac{d\vec{G}(t)}{dt}, \quad \text{quel que soit } x$$

et, par conséquent :

$$\vec{R}_{ce}(t) = \int_{A_t} \frac{d\vec{G}(t)}{dt}\, dm_t(x) = m(A)\frac{d\vec{G}(t)}{dt}$$

d'où d'après (4.1.7) et (4.3.3) :

$$(4.5.2) \quad \vec{R}_{ca}(t) = \vec{R}_{ce}(t) = m(A)\frac{d\vec{G}(t)}{dt} \; ; \; \vec{R}_{cr}(t) = 0$$

et on peut énoncer :

Proposition. Lorsque le référentiel mobile $\mathcal{R}_1$ est le référentiel du centre d'inertie G du corps A, à chaque instant t la résultante cinétique relative est nulle, et les résultantes cinétiques absolue et d'entraînement sont égales.

Quant aux résultantes dynamiques, on remarque d'abord que le torseur dynamique de Coriolis est nul, puisque le vecteur taux de rotation d'entraînement $\vec{\Omega}_e(t)$ est nul.

En tenant compte de :

$$(4.5.3) \qquad \Gamma_e(x, t) = \frac{d^2 G(t)}{d t^2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{E},$$

un calcul identique à celui fait ci-dessus conduit à :

$$(4.5.4) \qquad \vec{R}_{da}(t) = \vec{R}_{de}(t) = m(A) \frac{d^2 \vec{G}(t)}{d t^2} \quad ; \vec{R}_{dr}(t) = \vec{R}_{dc}(t) = 0$$

et on peut énoncer :

Proposition. Lorsque le référentiel mobile $\mathcal{R}_1$ est le référentiel du centre d'inertie G du corps A, à chaque instant t les résultantes dynamiques relative et de Coriolis sont nulles, les résultantes dynamiques absolue et d'entraînement sont égales.

Etudions maintenant les moments cinétiques et dynamiques en un point P quelconque de $\mathcal{E}$. On a :

$$\vec{M}_{ce}(P, t) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{V}_e(x, t)\, d\, m_t(x)$$

$$= \left(\int_{A_t} \vec{Px} \; d\, m_t(x) \right) \wedge \frac{d \vec{G}(t)}{d t}$$

d'où compte tenu de (4.1.5) :

$$(4.5.5) \qquad \boxed{\vec{M}_{ce}(P, t) = m(A)\; \vec{PG}(t) \wedge \frac{d \vec{G}(t)}{d t}}$$

On remarque qu'en particulier si $P = G(t)$, on a :

$$(4.5.6) \qquad \boxed{\vec{M}_{ce}(G(t), t) = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{M}_{ca}(G(t), t) = \vec{M}_{cr}(G(t), t)}$$

Un calcul analogue conduit, pour les moments dynamiques, à un résultat semblable :

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
(4.5.7) \quad \overrightarrow{M}_{de} (P, t) = m (A) \; \overrightarrow{PG} (t) \wedge \dfrac{d^2 G (t)}{d t^2} \\
(4.5.8) \quad \overrightarrow{M}_{de} (G (t), t) = 0 \;\; ; \;\; \overrightarrow{M}_{da} (G (t), t) = \overrightarrow{M}_{dr} (G (t), t) \\
\hline
\end{array}
$$

<u>Proposition.</u> 1 °) Lorsque le référentiel en mouvement $\mathcal{R}_1$ est le référentiel du centre d'inertie du corps A , le moment cinétique (resp. dynamique) d'entraînement de A en un point P quelconque est égal, à chaque instant t , au moment cinétique (resp. dynamique) en P d'un point matériel fictif qui aurait une masse égale à la masse totale de A , et qui à chaque instant coïnciderait avec le centre d'inertie de A à cet instant.

2°) Le moment cinétique (resp. dynamique) d'entraînement de A à l'instant t au point G (t) (position à cet instant du centre d'inertie) est nul. Les moments cinétiques (resp. dynamiques) de A à l'instant t , en ce même point G (t) absolu (c'est à dire pour le mouvement de A relativement à $\mathcal{R}$) et relatif (pour le mouvement de A relativement au référentiel $\mathcal{R}_1$ du centre d'inertie) sont égaux. Le moment dynamique de Coriolis, en un point quelconque, est nul.

<u>Remarques.</u> Les trois propositions précédentes montrent que les torseurs cinétique et dynamique <u>d'entraînement</u> sont égaux aux torseurs cinétique et dynamique qu'aurait un point matériel de masse m (A) situé, à chaque instant t , en G (t) , son mouvement étant considéré relativement à $\mathcal{R}$. Ces torseurs sont évidemment uniforces, étant définis par les vecteurs liés $\left(m (A) \dfrac{d \overrightarrow{G} (t)}{d t} , G (t) \right)$ et $\left(m (A) \dfrac{d^2 \overrightarrow{G (t)}}{d t^2} , G (t)\right)$ respectivement.

Déterminons enfin les relations entre moments cinétiques (resp. dynamiques) en un point quelconque P d'une part, au point G (t) d'autre part. On a :

$$\overrightarrow{M}_{ca} (P, t) = \overrightarrow{M}_{ca} (G (t), t) + \overrightarrow{R}_{ca} (t) \wedge \overrightarrow{G (t) P}$$

d'où compte tenu de (4.5.2) et de (4.5.6)

$$
(4.5.9) \quad \boxed{
\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{ca} (P, t) &= \overrightarrow{M}_{ca} (G (t), t) + m (A) \overrightarrow{PG} (t) \wedge \frac{d \overrightarrow{G (t)}}{d t} \\
&= \overrightarrow{M}_{cr} (G (t), t) + m (A) \overrightarrow{PG} (t) \wedge \frac{d \overrightarrow{G (t)}}{d t}
\end{aligned}
}
$$

De même pour le moment dynamique :

$$\overrightarrow{M}_{da} (P, t) = \overrightarrow{M}_{da} (G (t), t) + \overrightarrow{R}_{da} (t) \wedge \overrightarrow{G (t) P}$$

d'où compte tenu de (4.5.4) et de (4.5.8) :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{M}_{da}(P, t) &= \vec{M}_{da}(G(t), t) + m(A)\, \overrightarrow{PG}(t) \wedge \frac{d^2\, \overrightarrow{G(t)}}{d\,t^2} \\ &= \vec{M}_{dr}(G(t), t) + m(A)\, \overrightarrow{PG}(t) \wedge \frac{d^2\, \overrightarrow{G(t)}}{d\,t^2}\end{aligned}}$$

On peut donc énoncer :

Théorème de Koenigs. Le moment cinétique (resp. dynamique) "absolu" du système matériel A en un point quelconque P, à un instant t, est égal à la somme :

- du moment cinétique (resp. dynamique) de A, à l'instant t, au point $G(t)$ (centre d'inertie de A à cet instant) ; ce moment pouvant être indifféremment calculé pour le mouvement "absolu" de A, ou pour son mouvement relatif, par rapport au référentiel du centre d'inertie de A ;

- du moment cinétique (resp. dynamique) absolu, par rapport à P, d'un point matériel fictif de masse $m(A)$ coïncidant à chaque instant t avec $G(t)$.

4 . 6 . Centre d'inertie d'un corps rigide.

On conserve les hypothèses et notations des paragraphes précédents, en supposant de plus A rigide. Dans ce cas :

Théorème. Le centre d'inertie G du corps rigide A est cinématiquement lié à A.

Démonstration. Soient t et t' deux instants différents, A_t et $A_{t'}$ les parties de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ occupées par le corps A, respectivement aux instants t et t'. On sait (chapitre II) que la bijection qui, à un point x de A_t, fait correspondre le point y de $A_{t'}$ qui est la position à l'instant t' du point matériel de A situé en x à l'instant t, est une isométrie $\psi_{t't}$ de A_t sur $A_{t'}$. De plus, la masse étant conservée, on a si B est une partie de A_t, m_t et $m_{t'}$ les mesures représentant les répartitions de masse de A aux instants t et t' :

$$(4.6.1) \qquad m_{t'}\left(\psi_{t't}(B)\right) = m_t(B)$$

Soit $G(t)$ la position du centre d'inertie de A à l'instant t.
On a d'après (1.6) :

$$\int_{A_t} \overrightarrow{G(t)x}\; d\, m_t(x) = 0$$

donc :

$$0 = \psi_{t't}(\vec{0}) = \psi_{t't}\left(\int_{A_t} \overrightarrow{G(t)\,x}\ d\,m_t(x)\right)$$

$$= \int_{A_t} \overrightarrow{\psi_{t't}(G(t))\ \psi_{t't}(x)}\ d\,m_t(x)$$

En prenant pour nouvelle variable $y = \psi_{t't}(x)$, et compte tenu de (4.6.1) on trouve (comme pour le théorème concernant les symétries matérielles, paragraphe 4.2) :

$$\int_{A_{t'}} \overrightarrow{\psi_{t't}\,G(t)\,y}\ d\,m_{t'}(y) = 0$$

ce qui prouve d'après (4.1.6) que $\psi_{t't}\,G(t)$ est la position du centre d'inertie de A à l'instant t' . On voit que ce point est bien cinématiquement lié à A .

7 . Moment cinétique d'un corps rigide. Opérateur d'inertie.

Comme dans le paragraphe précédent, le système matériel considéré A est un corps rigide, dont on étudie le mouvement relativement à un référentiel $\mathcal{R}$. On va dans le présent paragraphe considérer le champ de vitesses de A , le torseur cinétique de A et ses éléments de réduction à un instant déterminé t . Pour alléger les notations, on omettra d'écrire t , comme dans le paragraphe 4.2 . Ainsi on écrira A au lieu de A_t pour désigner la position du corps étudié à l'instant t , m au lieu de m_t pour la mesure définissant la répartition de la masse, $\vec{V}(x)$ au lieu $\vec{V}(x, t)$ pour la valeur du champ de vitesses au point x , etc ... P étant un point quelconque de $\mathcal{E}$, le moment cinétique en P est :

$$\vec{M}_c(P) = \int_A \vec{Px} \wedge \vec{V}(x)\ d\,m$$

Mais A étant un corps rigide on a , si $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur taux de rotation du champ de vitesses :

$$\vec{V}(x) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{Px}$$

d'où compte tenu de (4.1.5) :

$$(4.7.1)\quad \vec{M}_c(P) = m(A)\,\vec{PG} \wedge \vec{V}(P) + \int_A \vec{Px} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{Px})\ d\,m.$$

Le dernier terme de cette expression suggère la définition suivante.

<u>Définition.</u> On appelle opérateur d'inertie (ou parfois tenseur d'inertie) du corps rigide A , au point P , l'application linéaire $\mathcal{J}(P)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé à l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$) dans lui-même :

$$(4.7.2) \qquad \boxed{\vec{u} \to \mathcal{J}(P)(\vec{u}) = \int_A \vec{Px} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{Px})\, dm}$$

Compte tenu de (4.7.1) et de cette définition, on peut énoncer :

<u>Proposition.</u> Le moment cinétique du corps A au point P s'exprime, au moyen de l'opérateur d'inertie $\mathcal{J}(P)$ en ce point, et du vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$, par la formule :

$$(4.7.3) \qquad \boxed{\vec{M}_c(P) = m(A)\ \vec{PG} \wedge \vec{V}(P) + \mathcal{J}(P)(\vec{\Omega}).}$$

En particulier :

$$(4.7.4) \qquad \boxed{\vec{M}_c(P) = \mathcal{J}(P)(\vec{\Omega}) \quad \text{si} \quad P = G\ , \text{ ou si} \quad \vec{V}(P) = 0}$$

<u>Proposition.</u> L'opérateur $\mathcal{J}(P)$ est un opérateur linéaire symétrique positif.

<u>Démonstration.</u> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs éléments de $\vec{\mathcal{E}}$. On a :

$$(\mathcal{J}(P)(\vec{u})) \cdot \vec{v} = \left(\int_A \vec{Px} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{Px})\, dm\right) \cdot \vec{v}$$

$$= \int_A (\vec{v} \wedge \vec{Px}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{Px})\, dm$$

expression symétrique en u et v . Donc :

$$(\mathcal{J}(P)(\vec{u})) \cdot \vec{v} = (\mathcal{J}(P)(\vec{v})) \cdot \vec{u}$$

ce qui exprime la symétrie de l'opérateur $\mathcal{J}(P)$. Enfin en faisant $\vec{v} = \vec{u}$:

$$(\mathcal{J}(P)(\vec{u})) \cdot \vec{u} = \int_A |\vec{u} \wedge \vec{Px}|^2\, dm \geqslant 0$$

ce qui exprime la positivité de $\mathcal{J}(P)$.

<u>Corollaire.</u> Le point P étant choisi, il existe une base orthonormée $(\vec{e}_{1P}, \vec{e}_{2P}, \vec{e}_{3P})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$, telle que l'opérateur $\mathcal{J}(P)$ ait, relativement à cette base, une matrice diagonale ;

$$(4.7.5)\quad \begin{pmatrix} I_{1P} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2P} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3P} \end{pmatrix} \text{ avec } I_{1P} \geq 0 \text{ , } I_{2P} \geq 0 \text{ , } I_{3P} \geq 0$$

On dit que $(\vec{e}_{1P} , \vec{e}_{2P}, \vec{e}_{3P})$ est une base principale d'inertie au point P , et que le repère affine $(P, \vec{e}_{1P}, \vec{e}_{2P}, \vec{e}_{3P})$ est un repère principal d'inertie.

C'est en effet une propriété bien connue des opérateurs linéaires symétriques positifs sur un espace vectoriel euclidien.

Remarques. 1°) I_{1P}, I_{2P}, I_{3P} sont les valeurs propres de $\mathcal{J}(P)$, et $\vec{e}_{1P}, \vec{e}_{2P}, \vec{e}_{3P}$ sont des vecteurs propres unitaires correspondants. On a :

$$(4.7.6)\qquad \mathcal{J}(P)\,(\vec{e}_{iP}) = I_{iP}\,\vec{e}_{iP}$$

En effectuant si nécessaire une permutation sur les indices, on peut supposer que :

$$I_{1P} \geq I_{2P} \geq I_{3P}$$

Ces inégalités étant imposées, les quantités I_{iP} sont alors déterminées de manière unique. Si l'une de ces quantités, par exemple I_{1P} , est distincte des deux autres, alors le vecteur propre unitaire correspondant $\vec{e}_{1P}$ est déterminé, à un changement de sens près. Si deux de ces quantités, par exemple I_{2P} et I_{3P} , sont égales, la troisième I_{1P} étant distincte, le plan engendré par $\vec{e}_{2P}$ et $\vec{e}_{3P}$ est déterminé, mais on peut remplacer ces deux vecteurs par n'importe quelle autre paire de vecteurs unitaires orthogonaux $(\vec{e}\,'_{2P} , \vec{e}\,'_{3P})$ appartenant au même plan, la base $(\vec{e}\,'_{1P}, \vec{e}\,'_{2P}, \vec{e}\,'_{3P})$ étant encore une base principale d'inertie en P . Si $I_{1P} = I_{2P} = I_{3P}$; toute base orthonormée est base principale d'inertie au point P .

2°) Si $\vec{\mathcal{E}}$ est orienté, on peut en changeant si nécessaire le sens d'un des vecteurs, faire en sorte que la base principale d'inertie $(\vec{e}_{1P}, \vec{e}_{2P}, \vec{e}_{3P})$ soit positive.

3°) La matrice de $\mathcal{J}(P)$ relativement à une base orthonormée quelconque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$, s'écrit :

$$(4.7.7)\quad \begin{pmatrix} \mathcal{J}(P)(\vec{e}_1).\vec{e}_1 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_2).\vec{e}_1 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_3).\vec{e}_1 \\ \mathcal{J}(P)(\vec{e}_1).\vec{e}_2 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_2).\vec{e}_2 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_3).\vec{e}_2 \\ \mathcal{J}(P)(\vec{e}_1).\vec{e}_3 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_2).\vec{e}_3 & \mathcal{J}(P)(\vec{e}_3).\vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

On voit d'après la proposition précédente qu'elle est toujours symétrique, et que ses termes diagonaux sont non négatifs.

Le calcul des coefficients de cette matrice se ramène à un calcul d'intégrales. Prenons en effet comme origine le point $0 = P$, et désignons par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point x quelconque de l'espace affine $\mathcal{E}$, dans le repère affine orthonormé $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On a :

$$\mathcal{G}(0)(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = \int_A |\vec{e}_1 \wedge \vec{0x}|^2 \, dm(x)$$

Mais :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{0x} = -x_3 \vec{e}_2 + x_2 \vec{e}_3 \quad , \quad \text{donc :}$$

$$(4.7.8) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{G}(0)(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 &= \int_A (x_2^2 + x_3^2) \, dm(x) \\ \mathcal{G}(0)(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 &= \int_A (x_3^2 + x_1^2) \, dm(x) \\ \mathcal{G}(0)(\vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 &= \int_A (x_1^2 + x_2^2) \, dm(x) \end{aligned}}$$

On a de même :

$$\mathcal{G}(0)(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = \int_A (\vec{e}_2 \wedge \vec{0x}) \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{0x}) \, dm(x)$$

Mais :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{0x} = -x_3 \vec{e}_2 + x_2 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{0x} = -x_1 \vec{e}_3 + x_3 \vec{e}_1$$

$$(\vec{e}_2 \wedge \vec{0x}) \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{0x}) = -x_1 x_2$$

d'où :

$$(4.7.9) \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{G}(0)(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = \mathcal{G}(0)(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 &= -\int_A x_1 x_2 \, dm(x) \\ \mathcal{G}(0)(\vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 = \mathcal{G}(0)(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &= -\int_A x_2 x_3 \, dm(x) \\ \mathcal{G}(0)(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 = \mathcal{G}(0)(\vec{e}_3) \cdot \vec{e}_1 &= -\int_A x_3 x_1 \, dm(x) \end{aligned}}$$

<u>Définition</u>. On appelle moment d'inertie du corps A par rapport à un plan Π , par rapport à une droite Δ , par rapport à un point P , respectivement les expressions suivantes :

$$(4.7.10)\begin{cases} I\,(A/\Pi) = \displaystyle\int_A (d\,(x,\Pi))^2 \; d\,m\,(x) \\ I\,(A/\Delta) = \displaystyle\int_A (d\,(x,\Delta))^2 \; d\,m\,(x) \\ I\,(A/P) = \displaystyle\int_A |\,\vec{Px}\,|^2 \; d\,m\,(x) \end{cases}$$

où $d\,(x,\Pi)$, $d\,(x,\Delta)$ et $|\,\vec{Px}\,|$ désignent les distances du point courant x , respectivement, au plan Π, à la droite Δ et au point P .

On remarque que les moments d'inertie sont toujours des quantités non négatives.

La connaissance de l'opérateur d'inertie $\mathcal{J}\,(P)$ au point P , permet le calcul facile des moments d'inertie de A relativement à tout plan passant par P , ou à toute droite passant par P , ou encore au point P lui - même. En effet :

<u>Proposition.</u> 1°) Soit Π un plan passant par P , $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{E}}$ telle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient parallèles à Π (donc $\vec{w}$ normal à Π). Le moment d'inertie de A par rapport à Π est :

$$(4.7.11) \quad \boxed{\frac{1}{2}\left(\mathcal{J}\,(P)\,(\vec{u})\,.\,\vec{u} + \mathcal{J}\,(P)\,(\vec{v})\,.\,\vec{v} - \mathcal{J}\,(P)\,(\vec{w})\,.\,\vec{w}\right)}$$

2°) Soit Δ une droite passant par P , $\vec{u}$ un vecteur unitaire parallèle à Δ . Le moment d'inertie de A par rapport à Δ est :

$$(4.7.12) \quad \boxed{\mathcal{J}\,(P)\,(\vec{u})\,.\,\vec{u}}$$

3°) Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée quelconque de $\vec{\mathcal{E}}$. le moment d'inertie de A par rapport à P est :

$$(4.7.13) \quad \boxed{\frac{1}{2}\left(\mathcal{J}\,(P)\,(\vec{u})\,.\,\vec{u} + \mathcal{J}\,(P)\,(\vec{v})\,.\,\vec{v} + \mathcal{J}\,(P)\,(\vec{w})\,.\,\vec{w}\right)}$$

Il suffit en effet de prendre Π ou Δ pour plan ou pour axe de coordonnées et d'examiner les formules (4. 7. 8) .

<u>Théorème de Koenigs pour l'opérateur d'inertie.</u> Soient $\mathcal{J}\,(P)$ et $\mathcal{J}\,(G)$ les opérateurs d'inertie du corps A , respectivement, en un point quelconque P et au centre d'inertie G de A . $\vec{u}$ étant un vecteur élément de $\vec{\mathcal{E}}$ quelconque, on a :

$$(4.7.14) \quad \boxed{\mathcal{J}\,(P)\,(\vec{u}) = \mathcal{J}\,(G)\,(\vec{u}) + m\,(A)\;\; \vec{PG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{PG})}$$

Démonstration. On a

$$\vec{Px} = \vec{PG} + \vec{Gx}$$

d'où :

$$\mathcal{G}(P)(\vec{u}) = \int_A \vec{Px} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{Px}) \, dm(x)$$

$$= \vec{PG} \wedge (\vec{u} \int_A dm(x) \wedge \vec{PG}) + \vec{PG} \wedge (\vec{u} \wedge \int_A \vec{Gx} \, dm(x))$$

$$+ (\int_A \vec{Gx} \, dm(x)) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{PG}) + \int_A \vec{Gx} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{Gx}) \, dm(x)$$

mais, compte tenu de (4.1.6) on obtient la formule indiquée.

Remarque. L'application linéaire :

$$\vec{u} \to m(A) \, \vec{PG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{PG})$$

n'est autre que l'opérateur d'inertie au point P, qu'aurait un point matériel fictif situé en G et de masse $m(A)$. Cette remarque donne une interprétation du second terme de la formule (4.7.14).

Corollaire : théorème d'Huygens. Soient Δ une droite, Δ' la parallèle à Δ passant par le centre d'inertie G de A, $I(A/\Delta)$ et $I(A/\Delta')$ les moments d'inertie de A, respectivement par rapport à Δ et à Δ', $d(\Delta, \Delta')$ la distance des droites Δ et Δ'. On a :

$$\boxed{I(A/\Delta) = I(A/\Delta') + m(A)\,(d(\Delta, \Delta'))^2} \qquad (4.7.15)$$

Il suffit en effet d'utiliser le théorème de Koenigs et la formule (4.7.12).

4 . 8 . La détermination pratique des opérateurs d'inertie.

Les hypothèses et notations sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

On a donné dans les expressions (4.7.8) et (4.7.9), des formules permettant la détermination pratique de la matrice de l'opérateur d'inertie d'un corps A en un point P, relativement à une base orthonormée quelconque.

L'emploi du théorème de Koenigs permet souvent de simplifier les calculs : dans certains cas, il peut en effet être plus simple de calculer d'abord l'opérateur d'inertie en un point P', autre que P ; grâce au théorème de Koenigs, appliqué deux fois, on peut alors en déduire facilement l'opérateur d'inertie en G, puis en P.

On peut encore simplifier les calculs en choisissant judicieusement la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ainsi par exemple, si $\vec{e}_1$ est vecteur propre de $\mathcal{G}(P)$, on saura d'avance que les coefficients :

$$(\mathcal{J}(P)\vec{e}_1).\vec{e}_2 = (\mathcal{J}(P)\vec{e}_2).\vec{e}_1 \quad \text{et} \quad (\mathcal{J}(P)\vec{e}_1).\vec{e}_3 = (\mathcal{J}(P)\vec{e}_3).\vec{e}_1$$

sont nuls. De même, si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est base principale d'inertie au point P, on n'aura à calculer que les coefficients diagonaux de la matrice de $\mathcal{J}(P)$, tous les autres coefficients étant nuls.

L'existence de symétries matérielles peut être utilisée, pour faciliter le choix de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En effet :

<u>Proposition.</u> 1°) Soit Π un plan de symétrie matérielle du corps A, et P un point de Π. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire normal au plan Π. Alors $\vec{u}$ est vecteur propre de $\mathcal{J}(P)$ (et, par suite, il existe deux autres vecteurs propres de $\mathcal{J}(P)$ formant, avec $\vec{u}$, une base principale d'inertie au point P).

2°) Soit Δ un axe de symétrie matérielle du corps A, et P un point de Δ. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire parallèle à Δ. Alors $\vec{u}$ est vecteur propre de $\mathcal{J}(P)$ (et, par suite, il existe deux autres vecteurs propres de $\mathcal{J}(P)$ formant avec $\vec{u}$ une base principale d'inertie au point P).

<u>Démonstration.</u> 1°) Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base principale d'inertie au point P. Un des vecteurs $\vec{e}_i$ est nécessairement non parallèle à Π. Supposons par exemple que ce soit $\vec{e}_1$. Un raisonnement analogue à celui fait dans le paragraphe 4.2. pour la détermination du centre d'inertie grâce à l'emploi de symétries matérielles, montre que le symétrique $\vec{e}_1'$ de $\vec{e}_1$ par rapport à Π, est vecteur propre de $\mathcal{J}(P)$ pour la même valeur propre que $\vec{e}_1$. Si $\vec{e}_1$ est normal à Π on a déjà le résultat désiré ; dans le cas contraire, tout vecteur du plan déterminé par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_1'$, (et en particulier un vecteur normal à Π) est vecteur propre de $\mathcal{J}(P)$, correspondant toujours à la même valeur propre que $\vec{e}_1$.

2°) la démonstration est analogue, en utilisant la symétrie par rapport à Δ au lieu de la symétrie par rapport à Π.

<u>Remarque.</u> On dit qu'un plan Π (resp. un axe Δ) est plan principal d'inertie (resp. axe principal d'inertie) par rapport à un de ses points P, si tout vecteur normal à Π (resp. tout vecteur parallèle à Δ) est vecteur propre de $\mathcal{J}(P)$. La proposition précédente peut s'énoncer : tout plan (resp. axe) de symétrie matérielle, est plan (resp. axe) principal d'inertie par rapport à chacun de ses points.

<u>Exemple. Opérateur d'inertie d'une demi - boule homogène.</u>

Soit R le rayon de la demi-boule, O son centre. La symétrie matérielle montre que si on choisit $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ unitaires orthogonaux parallèles à la face plane de la demi-boule et $\vec{e}_3$ unitaire normal à cette face, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base principale d'inertie au point O.

Elle montre aussi que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ correspondent à la même valeur propre de $\mathcal{J}(0)$. Un calcul facile donne alors pour matrice de $\mathcal{J}(0)$ relativement à cette base :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\, m\,(A)\, R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}\, m\,(A)\, R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\, m\,(A)\, R^2 \end{pmatrix}$$

Soit G le centre d'inertie de la demi-boule. On a vu que :

$$\vec{OG} = \frac{3}{8} R\, \vec{e}_3$$

Le théorème de Koenigs donne alors pour matrice de $\mathcal{J}(G)$, toujours relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (où $m = m\,(A)$ est la masse de la demi-boule).

$$\begin{pmatrix} (\frac{2}{5} - \frac{9}{64})\, m\, R^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{5} - \frac{9}{64})\, m\, R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\, m\, R^2 \end{pmatrix}$$