3 . 1 Système matériel et masse.

L'expérience a conduit à attribuer à tout corps physique A, existant à un instant T, une grandeur $\vec{m}(A, T)$ appelée masse de A à l'instant T, élément d'un espace vectoriel $\vec{\mathcal{M}}$ de dimension 1 . On observe de plus que tous les corps physiques ont des masses non nulles, toutes éléments du même demi - espace (ceci signifie que si A et B sont deux corps physiques dont les masses à l'instant T sont $\vec{m}(A, T)$ et $\vec{m}(B, T)$, il existe un réel positif λ tel que $\vec{m}(A, T) = \lambda \vec{m}(B, T)$). On désignera ce demi - espace par $\vec{\mathcal{M}}^+$. Une fois choisi un élément non nul $\vec{m}_0$ de $\vec{\mathcal{M}}^+$ pour unité, la masse de tout corps physique A à l'instant T peut être représentée par le nombre réel positif $m(A, T)$, tel que :

$$(3.1.1) \qquad \vec{m}(A, T) = m(A, T)\ \vec{m}_0$$

On supposera dans la suite l'unité de masse $\vec{m}_0$ choisie et, avec un léger abus de langage, on appellera masse de A à l'instant T le nombre réel $m(A, T)$. Il faudra toutefois savoir qu'on peut toujours modifier le choix de l'unité de masse, et qu'alors le nombre $m(A, T)$ se trouve en conséquence modifié.

Les moyens permettant la détermination de la masse d'un corps physique utilisent les lois de la dynamique. On ne pourra donc les indiquer que plus loin dans ce cours. On va toutefois signaler dès maintenant les deux propriétés essentielles de la masse qui ont pu être dégagées de l'expérience. La plus simple est l'additivité :

Additivité de la masse. Soient A_1 et A_2 deux corps physiques existant à l'instant T, et occupant à cet instant dans l'espace $\mathcal{E}_T$ deux positions A_{1T} et A_{2T} disjointes. Alors la masse, à l'instant T, du corps physique réunion de A_1 et A_2, est somme des masses à l'instant T de A_1 et de A_2 :

$$(3.1.2) \qquad m(A_1 \cup A_2, T) = m(A_1, T) + m(A_2, T)$$

La seconde propriété importante est la conservation de la masse. Il est plus délicat de l'énoncer avec rigueur, car seuls certains corps physiques la possèdent, et il est difficile de définir ces corps physiques autrement que par le fait, précisément, que leur masse est conservée. On fera donc appel à l'intuition. La masse d'un corps physique est une manière de mesurer la quantité de matière constituant ce corps.

La matière est considérée, en physique classique, comme indestructible, bien que susceptible de se transformer ; cette idée est généralement attribuée à Lavoisier (1787). On appelle système matériel un corps physique (ou un ensemble de plusieurs corps physiques), existant pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$ tel que toute la matière contenue dans ce corps à un instant T, soit également contenue dans ce corps à tout autre instant T' de l'intervalle $]T_1, T_2[$. Donnons quelques exemples :

- un récipient contenant de l'eau et de la glace, ces deux corps pouvant au cours du temps se transformer l'un en l'autre, mais non disparaître, est un système matériel ;

- l'ensemble d'une automobile, du contenu de son réservoir, de l'air absorbé par son moteur pour la combustion du carburant pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$, et de tous les gaz d'échappement produits pendant cette période, est un système matériel ; l'automobile seule n'est pas un système matériel ;

- un liquide contenu dans un récipient sous une atmosphère de gaz carbonique, et qui n'est pas initialement saturé de ce gaz, n'est pas un système matériel (car au cours du temps ce liquide va dissoudre une certaine quantité de gaz carbonique) ; par contre l'ensemble du liquide et de l'atmosphère qui le surmonte (supposée limitée par le couvercle du récipient) est un système matériel.

On peut maintenant énoncer la seconde propriété de la masse :

Conservation de la masse. La masse de tout système matériel reste constante au cours du temps.

La conservation de la masse d'un système matériel permet de prendre, pour définir l'unité de masse $\vec{m}_0$, la masse d'un corps physique déterminé, qu'on a de bonnes raisons de considérer comme un système matériel. Ainsi la définition légale actuelle du kilogramme est la suivante : c'est la masse du corps physique appelé kilogramme étalon, en platine iridié, situé dans le pavillon de Breteuil à Sèvres. Le métal dont est constitué ce corps est considéré comme suffisamment inaltérable, et les précautions prises pour éviter toute usure sont telles, qu'on peut en effet le considérer comme un système matériel. Cette définition a toutefois quelque chose de peu satisfaisant : il serait préférable de définir l'unité de masse en faisant référence à un phénomène physique reproductible, comme on l'a fait pour les unités de longueur et de temps. On pourrait par exemple songer à définir le kilogramme comme la masse d'un nombre fixé de molécules d'hydrogène, mais une telle définition n'est pas utilisable en pratique compte tenu des méthodes physiques actuelles, qui ne permettent pas de compter un grand nombre de molécules d'hydrogène avec une précision suffi-

3 . 2 . La description mathématique de la répartition des masses.

Tout ce qui précède concerne la masse totale d'un corps physique. Si ce corps n'est pas réduit à un point cinématique il est possible, au moins conceptuellement, de le subdiviser en parties occupant, à un instant donné, des positions disjointes dans l'espace, et par conséquent d'attribuer une masse à chacune de ces parties. On est donc naturellement amené à chercher un moyen commode pour décrire la répartition dans l'espace, à un instant donné, des masses des différentes parties en lesquelles on peut subdiviser un corps physique. Il existe un outil mathématique bien adapté pour faire cette description, car il incorpore la propriété d'additivité : c'est la <u>théorie de la mesure</u>. On peut d'ailleurs montrer que sous certaines hypothèses raisonnables (qui, pour l'essentiel, consistent à supposer que la propriété d'additivité de la masse reste vraie pour une famille d'une infinité dénombrable de corps physiques deux à deux disjoints), une mesure (au sens mathématique) est le seul outil réellement apte à décrire mathématiquement la répartition dans l'espace de la masse d'un corps physique.

Signalons, pour les étudiants suivant l'option de Probabilités, que c'est cette même notion de mesure qui est utilisée dans la définition d'un espace probabilisé. Signalons aussi que cette notion de mesure est à la base des théories "sérieuses" de l'intégration (intégrale de Lebesgue) qui seront enseignées en second cycle.

Il serait trop long de donner dans ce cours un exposé, même abrégé, de la théorie de la mesure, qui sans être vraiment très difficile, comporte un certain nombre de points délicats, et d'ailleurs n'est pas au programme. On se contentera donc de quelques indications succintes, suffisantes pour les cas les plus fréquemment rencontrés en pratique.

Soit un corps physique A , occupant à l'instant T une partie A_T de l'espace physique $\mathcal{E}_T$ (espace affine euclidien de dimension 3). La répartition dans l'espace de la masse du corps A à l'instant T est mathématiquement représentée par une <u>mesure positive</u> m sur l'ensemble A_T , c'est à dire par une fonction, ayant certaines propriétés précisées ci-dessous, définie sur un certain sous ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les parties de A_T et à valeurs réelles ≥ 0, qui à toute partie $B \in \mathcal{B}$, associe le nombre $m(B)$, masse à l'instant T de la partie du corps A qui, à cet instant, occupe la partie B de l'espace $\mathcal{E}_T$.

Les parties de A_T éléments de $\mathcal{B}$, dont on peut définir la masse, sont dites mesurables. Il serait trop long d'en donner une définition précise. Disons simplement que le praticien n'a guère à se préoccuper de ce sujet, toutes les parties bornées "raisonnables" de A_T rencontrées en pratique étant toujours mesurables (il est même difficile de donner des exemples de parties bornées qui ne le sont pas, bien qu'on montre qu'il en existe en général).

Quant aux parties non bornées, il est tout à fait naturel qu'on ne puisse pas toujours leur attribuer une masse (certaines d'entre elles pouvant avoir une "masse infinie"). Il est d'ailleurs possible d'étendre la notion de mesure pour permettre à de telles parties d'être éléments de $\mathcal{B}$, en convenant que m peut prendre la valeur $+\infty$.

Par définition même d'une mesure, la propriété d'additivité des masses est vérifiée : soient $B_1, B_2 \ldots B_n$ des parties mesurables de A_T, deux à deux disjointes :

$$(3.2.1) \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j$$

On a alors :

$$(3.2.2) \qquad m\,(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = \sum_{i=1}^{n} m\,(B_i)$$

On a même la propriété d'additivité dénombrable : si $(B_i \;;\; i \in \mathbb{N}^*)$ est une famille dénombrable de parties mesurables de A_T deux à deux disjointes, c'est à dire vérifiant (3.2.1), on a :

$$(3.2.3) \qquad m\,\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m\,(B_i)$$

l'égalité étant vraie aussi bien si la masse de $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ est finie (dans ce cas la série à termes positifs figurant au second membre converge) que si elle est égale à $+\infty$ (et dans ce cas, la série figurant au second membre diverge).

Une notation fréquemment employée pour désigner la masse m (B) d'une partie B de A_T est :

$$(3.2.4) \qquad m\,(B) = \int_B d\,m$$

Cette notation, dont la justification est liée à la théorie générale de l'intégration, sera utilisée dans les cas où elle apparaîtra commode.

En pratique les mesures les plus fréquemment rencontrées pour décrire une répartition de masses à un instant donné; appartiennent à l'un des quatre types suivants, ou en sont une combinaison.

Répartitions de masses définies par une densité de masse

Il existe alors une fonction ρ , définie sur A_T et à valeurs réelles $\geqslant 0$ appelée densité de masse, ou <u>masse volumique</u> du corps A à l'instant T , en général suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que, pour toute partie mesurable B de A_T

$$(3.2.5) \quad m\,(B) = \iiint_B \rho\,(x)\; d^3\,x$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale dans B de la fonction ρ , relativement à la mesure élément de volume de $\mathscr{E}_T$. En pratique, pour la calculer, on choisit un repère affine orthonormé $(O_{\mathscr{E}_T}, \vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$ de $\mathscr{E}_T$, et on désigne par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point x de $\mathscr{E}_T$ dans ce repère. La fonction ρ apparaît alors comme une fonction des trois variables réelles x_1, x_2, x_3 et on a :

$$(3.2.6) \quad m\,(B) = \iiint_B \rho\,(x_1, x_2, x_3)\; d\,x_1\;\; d\,x_2\;\; d\,x_3$$

On montre que cette intégrale triple ne dépend pas du choix du repère affine orthonormé de $\mathscr{E}_T$, ce qui justifie l'écriture condensée figurant au second membre de (3.2.5).

<u>Répartitions de masses définies par une densité superficielle</u>

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T , est une <u>surface</u> de l'espace $\mathscr{E}_T$, que l'on supposera suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux), et il existe une fonction ρ_S définie sur A_T et à valeurs réelles $\geqslant 0$, appelée densité de masse superficielle, ou <u>masse surfacique</u> du corps A à l'instant T , elle aussi suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que pour toute partie mesurable B de A_T :

$$(3.2.7) \quad m\,(B) = \iint_B \rho_S\,(x)\;\; d^2\,\sigma\,(x)$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale dans B de la fonction ρ_S , relativement à la mesure élément d'aire de la surface A_T. On en rappelle ci-dessous la définition, tout en donnant un moyen de la calculer. Supposons la surface A_T paramétrée par deux paramètres scalaires u et v. Cela signifie qu'il existe une application bijective $\varphi : (u, v) \to \varphi\,(u, v)$ d'une partie ouverte S de $\mathbb{R}^2$ sur A_T. On suppose de plus cette application de classe C^1 , c'est à dire telle que les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial \vec{\varphi}\,(u, v)}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \vec{\varphi}\,(u, v)}{\partial v}$, (qui sont des vecteurs éléments de $\vec{\mathscr{E}}_T$, espace vectoriel associé à $\mathscr{E}_T$) existent en tout point (u, v) de S et soient des fonctions continues sur S.

On suppose enfin ces deux vecteurs linéairement indépendants en tout point (u, v) de S. On a alors par définition :

$$(3.2.8) \quad m(B) = \iint_{\varphi^{-1}(B)} \rho_S(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{\varphi}(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}(u, v)}{\partial v} \right| du\, dv$$

On montre que cette intégrale double ne dépend pas du choix des paramètres (u, v) servant à décrire la surface A_T. Remarquons aussi que la définition s'étend au cas (très fréquent en pratique) où la surface A_T ne peut être entièrement paramétrée par un système unique de paramètres (u, v) : il suffit de décomposer la surface en un nombre fini de parties ouvertes disjointes dans chacune desquelles un tel système de paramètres existe, et d'ajouter les intégrales correspondantes ; on doit toutefois prendre soin de faire en sorte que la réunion des parties ouvertes utilisées ne diffère de la surface entière A_T que par une partie négligeable (en un sens mathématique précis, qu'on ne cherchera pas à définir ici : disons simplement qu'une courbe régulière, de classe C^1 par morceaux, tracée sur A_T, est une partie négligeable de A_T).

Répartitions de masses définies par une densité linéaire.

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T est une courbe de l'espace $\mathcal{E}_T$, que l'on supposera suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux) et il existe une fonction ρ_L définie sur A_T et à valeurs réelles ≥ 0, appelée densité de masse linéique, ou masse linéique, du corps A à l'instant T, elle aussi suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que pour toute partie mesurable B de A_T :

$$(3.2.9) \quad m(B) = \int_B \rho_L(x)\, ds(x)$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale curviligne de la fonction ρ_L sur B, relativement à la mesure élément d'arc de la courbe A_T. On en rappelle ci-dessous la définition, qui est aussi un moyen de la calculer. Supposons la courbe A_T paramétrée par un paramètre scalaire λ. Cela signifie qu'il existe une application bijective ψ d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sur A_T. On suppose ψ de classe C^1, ce qui signifie que la dérivée $\frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda}$ (qui est un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}_T$) existe pour tout $\lambda \in I$, et qu'elle est fonction continue de λ. On suppose de plus ce vecteur $\frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda}$ partout non nul. On a alors, si par exemple B est l'arc de courbe $\psi([a, b])$ ($[a, b]$ étant un intervalle contenu dans I) :

$$(3.2.10) \quad m(B) = \int_a^b \rho_L(\psi(\lambda)) \left| \frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda$$

On montre, ici encore, que l'intégrale figurant au second membre ne dépend pas du choix du paramètre λ servant à décrire la courbe. Comme dans le cas précédent, la définition s'étend au cas où, pour paramétrer la courbe A_T, on doit la décomposer en un nombre fini d'arcs ouverts disjoints, sur chacun desquels on peut utiliser un paramétrage différent. La réunion de ces arcs doit ne différer de A_T que par une partie négligeable (par exemple, un nombre fini de points).

Répartition de masses discrète.

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T est un ensemble fini $\{ B_i \; ; \; 1 \leq i \leq n \}$. Chaque point cinématique de A qui, à l'instant T, occupe la position M_i, a à l'instant T la masse m_i. D'après la propriété d'additivité, toute partie B du corps A dont la position à l'instant T est $\{ B_{i_1}, B_{i_2}, \dots B_{i_p} \; ; \; 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \}$ a évidemment pour masse à l'instant T :

$$(3.2.11) \qquad m\left(\left\{ B_{i_1}, \dots B_{i_p} \right\}\right) = \sum_{k=1}^{p} m_{i_k}$$

Remarque. Les corps physiques réels ont toujours une répartition de masses se rattachant au premier type cité, c'est à dire définie par une densité de masse. Cependant, on utilise souvent en mécanique des schématisations de ces corps, dans lesquelles on néglige certaines des dimensions de ces corps, et on doit alors, pour représenter la répartition de leurs masses, utiliser l'un des autres types cités. Ainsi par exemple, une plaque de faible épaisseur sera schématisée par une surface, sa répartition des masses étant définie par une masse surfacique ; une tige (ou un câble) de section suffisamment petite, sera schématisée par une courbe, sa répartition des masses étant définie par une masse linéique ; enfin, un corps physique dont toutes les dimensions sont petites, sera schématisé par un point cinématique auquel est attribuée une masse finie non nulle.

3 . 3 . Torseurs cinétique et dynamique d'un système matériel

Soit un système matériel A en mouvement pendant l'intervalle de temps $]T_1, T_2[$. Par définition d'un système matériel, toute la matière contenue dans ce système à un instant quelconque $T \in]T_1, T_2[$, est encore contenue dans ce système à tout autre instant $T' \in]T_1, T_2[$. On a vu (paragraphe 3.1 que cette propriété entraîne la conservation de la masse totale du système matériel considéré.

On va, dans ce paragraphe (ainsi d'ailleurs que dans la suite de ce cours, sauf s'il est fait mention explicite du contraire) supposer que le système matériel A considéré possède une propriété encore plus forte.

Soit B une partie du système matériel A , dont la position à un instant T est la partie B_T de $\mathcal{E}_T$, et à un instant T' la partie $B_{T'}$ de $\mathcal{E}_{T'}$. On supposera que, quels que soient B et quels que soient les instants T et T' éléments de $]T_1, T_2[$, toute la matière contenue dans B_T à l'instant T , est encore contenue dans $B_{T'}$ à l'instant T' . En d'autres termes, on suppose que, non seulement A entier, mais toute partie B de A , est un système matériel.

Cette hypothèse est beaucoup plus restrictive, que celle consistant à supposer que seul A entier est un système matériel. En pratique, presque tous les phénomènes rencontrés dans la nature (à l'exception de ceux où des réactions nucléaires entraînent une variation notable de masse, comme ceux qui ont lieu dans les étoiles) peuvent être étudiés grâce à la notion de système matériel, à condition d'inclure dans le système étudié tous les corps physiques mis en jeu. Par contre, de nombreux phénomènes couramment rencontrés en pratique ne peuvent pas être schématisés par des systèmes matériels dont toute partie est aussi un système matériel. Il en est ainsi par exemple de tous les phénomènes de diffusion : lorsque deux masses de liquides de nature différente, miscibles, par exemple de l'eau douce et de l'eau salée, sont mises en contact, ces deux liquides se mélangent par diffusion, de sorte que le sel présent dans une partie du système, ne reste pas confiné à cette partie au cours du temps.

Signalons qu'il est possible de traiter les systèmes matériels dont toutes les parties ne sont pas nécessairement des systèmes matériels, en utilisant diverses notions (flux de diffusion, etc...) qui débordent le cadre de ce cours.

On va étudier le mouvement du système matériel A , dans un référentiel $\mathcal{R}$ de domaine de temps $]T_1, T_2[$. L'espace - temps rapporté à ce référentiel est alors un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant un espace affine euclidien de dimension 3. On a vu (paragraphe 2.4) que le mouvement de A est décrit dans $\mathcal{R}$ par une application :

$$\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$$

où A est un ensemble abstrait (désigné par la même lettre que le système, pour simplifier l'écriture) qu'on identifiera en pratique avec une partie de $\mathcal{E}$, par exemple celle occupée par le système à un instant fixé $T_0 \in]T_1, T_2[$. Chaque point N de A représente un point cinématique du système, dont la position à l'instant T est $\varphi(T, N)$. On rappelle que pour tout T fixé, l'application $N \to \varphi(T, N)$ est une bijection de A sur $A_T = \varphi(T, A)$.

On suppose de plus choisi un repère du temps $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$, et un repère affine orthonormé positif $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace affine $\mathcal{E}$, supposé orienté.

En exprimant chaque instant T en fonction de sa date t, on peut considérer l'application φ comme étant une application de $]t_1, t_2[\times A$ dans $\mathcal{E}$ (t_1 et t_2 étant les dates de T_1 et T_2 respectivement). Pour tout point $N \in A$ fixé, on suppose l'application :

$$t \to \varphi(t, N)$$

de classe C^2. On sait alors que les vecteurs vitesse et accélération du point cinématique N existent, et sont, respectivement, à la date t :

$$(3.3.1) \qquad \vec{V}(t, N_t) = \frac{d}{d\,t}\ \overrightarrow{\varphi(t, N)} = \frac{d\,\vec{N}_t}{d\,t}$$

$$(3.3.2) \qquad \vec{\Gamma}(t, N_t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\ \overrightarrow{\varphi(t, N)} = \frac{d^2\,\vec{N}_t}{d\,t^2}$$

où on a posé, pour alléger l'écriture :

$$(3.3.3) \qquad \varphi(t, N) = N_t$$

On sait de plus que, pour tout point P de $A_t = \varphi(t, A)$, il existe un point cinématique unique $N \in A$ qui, à la date t, occupe la position P (c'est à dire tel que $\varphi(t, N) = P$). Par conséquent, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont, pour chaque date t, des <u>champs de vecteurs</u> sur A_t. On les supposera dans la suite suffisamment réguliers (par exemple, continus par morceaux).

D'autre part, la répartition des masses du système matériel A à la date t, est décrite par la donnée d'une mesure positive m_t sur A_t. Toute partie B de A étant, d'après l'hypothèse ci-dessus, un système matériel, on a, si t et t' sont deux dates quelconques éléments de $]t_1, t_2[$:

$$(3.3.4) \qquad m_t(B_t) = m_{t'}(B_{t'})$$

où $B_t = \varphi(t, B)$, et $B_{t'} = \varphi(t', B)$ sont les positions supposées mesurables occupées par B aux dates t et t' respectivement.

On sait (Annexe au présent chapitre, paragraphe 3.A.3) que la donnée d'un <u>champ de vecteurs</u> et d'une <u>mesure positive</u> sur une partie A_t de $\mathcal{E}$, détermine un torseur sur $\mathcal{E}$. Appliquant cela avec, pour mesure positive, la mesure m_t définissant la répartition des masses à la date t, et pour champ de vecteurs, respectivement les champs des vecteurs vitesse et accélération à la date t, on obtient :

Définitions On appelle torseur cinétique (resp. torseur dynamique) du système matériel A à la date t, relativement au repère $\hat{\mathcal{R}}$ considéré de l'espace - temps, le torseur sur $\mathcal{E}$ déterminée par la donnée de la mesure m_t définissant la répartition des masses de A à l'instant t, et du champ des vecteurs vitesses $\vec{V}(t, .)$ (resp. du champ des vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(t, .)$) du système A à la date t.

On désignera dans la suite par $\mathcal{C}$ le torseur cinétique, et $\mathcal{A}$ le torseur dynamique.

En utilisant les formules établies en annexe 3.A.3, on obtient les expressions des éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique de A à la date t, en un point P quelconque de $\mathcal{E}$:

- résultante générale du torseur cinétique, appelée résultante cinétique (ou quantité de mouvement, ou impulsion) de A, à la date t :

$$(3.3.5) \quad \boxed{\vec{R}_c = \int_{A_t} \vec{V}(t, x) \; d\, m_t(x)}$$

- résultante générale du torseur dynamique (appelée résultante dynamique du système A) :

$$(3.3.6) \quad \boxed{\vec{R}_d = \int_{A_t} \vec{\Gamma}(t, x) \; d\, m_t(x)}$$

- moment du torseur cinétique au point P ; appelé moment cinétique de A, à la date t et au point P :

$$(3.3.7) \quad \boxed{\vec{M}_c(P) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{V}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

- moment du torseur dynamique, appelé moment dynamique du système A au point P :

$$(3.3.8) \quad \boxed{\vec{M}_d(P) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{\Gamma}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

Si $\vec{W}$ est un champ de vecteurs équiprojectif quelconque sur $\mathcal{E}$, les valeurs, pour ce champ $\vec{W}$, des torseurs cinétique et dynamique, à la date t, sont respectivement, toujours d'après les formules établies en annexe 3.A.3 :

$$(3.3.9) \quad \mathcal{C}(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{V}(t, x) \,.\, \vec{W}(x) \; d\, m_t(x)$$

$$(3.3.\ )\quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{\Gamma}\,(t,\,x)\,.\,\vec{W}\,(x)\ d\,m_t\,(x)$$

Afin d'illustrer les formules abstraites ci-dessus par des exemples plus concrets, on examinera successivement le cas où le corps A est constitué d'un nombre fini de points cinématiques avec une répartition de masses discrètes, et celui où la répartition des masses de A est définie par une densité de masse. Les cas où cette répartition est définie par une densité superficielle, ou une densité linéique, conduisent à des formules analogues.

a) <u>Cas où le système A est formé d'un nombre fini de points cinématiques.</u>

$A = \left\{ N_1,\, N_2,\, \ldots\, N_p \right\}$ ensemble fini. A la date t, la position du point cinématique N_i est $N_i(t)$. On désigne par m_i la masse de la partie de A réduite au point cinématique N_i. Puisqu'on suppose que toute partie de A est un système matériel, <u>m_i est indépendant de t</u>.

Si $\vec{W}$ est un champ de vecteurs équiprojectif quelconque en $\mathcal{E}$, les valeurs pour ce champ des torseurs cinétique et dynamique, sont respectivement :

$$(3.3.11)\quad \mathcal{C}\,(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$

$$(3.3.12)\quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2}$$

Les éléments de réduction des torseurs cinétique et <u>dynamique en un point</u> P quelconque de $\mathcal{E}$, à la date t, sont :

$$(3.3.13)\quad \vec{R}_c = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$ <u>résultante cinétique</u>

$$(3.3.14)\quad \vec{M}_c(P) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{PN_i}(t)\ \Lambda\ \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$ <u>moment cinétique en P</u>

$$(3.3.15)\quad \vec{R}_d = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \frac{d^2\,\overrightarrow{N_i}(t)}{d\,t^2}$$ <u>résultante dynamique</u>

$$(3.3.16)\quad \vec{M}_d(P) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{PN_i}(t)\ \Lambda\ \frac{d^2\,\overrightarrow{N_i}(t)}{d\,t^2}$$ <u>moment dynamique en P</u>

b) Cas où la répartition de masse de A est définie par une densité de masse.

Dans ce cas, pour chaque date t, on a une masse volumique ρ_t définie sur A_t, à valeurs ≥ 0, supposée suffisamment régulière. Les valeurs des torseurs cinétique et dynamique à la date t, pour un champ de vecteurs équiprojectif quelconque $\vec{W}$ sur $\mathcal{E}$, sont respectivement :

$$(3.3.17) \quad \mathcal{C}(\vec{W}) = \iiint_{A_t} \vec{W}_i(x) \cdot \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x$$

$$(3.3.18) \quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \iiint_{A_t} \vec{W}_i(x) \cdot \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x$$

Les éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique, en un point P quelconque de $\mathcal{E}$, sont à la date t :

$$(3.3.19) \quad \vec{R}_c = \iiint_{A_t} \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{résultante cinétique}}$$

$$(3.3.20) \quad \vec{M}_c(P) = \iiint_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{moment cinétique en P}}$$

$$(3.3.21) \quad \vec{R}_d = \iiint_{A_t} \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{résultante dynamique}}$$

$$(3.3.22) \quad \vec{M}_d(P) = \iiint_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{moment dynamique en P}}$$

Le théorème suivant est le résultat essentiel du présent paragraphe. Il est valable dans le cas le plus général, où la répartition de masse de A est définie par une mesure positive quelconque.

Théorème Soit A un système matériel dont toute partie est un système matériel. L'espace - temps étant rapporté à un repère quelconque, la dérivée par rapport à la date t du torseur cinétique $\mathcal{C}(t)$ du corps A est, à chaque t, égale au torseur dynamique $\mathcal{A}(t)$ de A :

$$(3.3.23) \quad \boxed{\frac{d\, \mathcal{C}(t)}{d\, t} = \mathcal{A}(t)}$$

Corollaires : Sous les mêmes hypothèses, la dérivée par rapport à t des éléments de réduction $\vec{R}_c(t)$ (résultante cinétique) et $\vec{M}_c(t, P)$ (moment cinétique en un point P fixe dans le repère considéré) du torseur cinétique $\mathscr{C}(t)$, sont égaux à chaque t, respectivement, aux éléments de réduction $\vec{R}_d(t)$ (résultante dynamique) et $\vec{M}_d(t, P)$ (moment dynamique au point P) du torseur dynamique $\mathcal{A}(t)$:

$$(3.3.24) \quad \boxed{\frac{d\,\vec{R}_c(t)}{d\,t} = \vec{R}_d(t)}$$

$$(3.3.25) \quad \boxed{\frac{d\,\vec{M}_c(t, P)}{d\,t} = \vec{M}_d(t, P)}$$

Commentaires et esquisse de la démonstration.

1 . Le torseur cinétique $\mathscr{C}$ est une fonction de la variable t, à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathscr{G}'$ des torseurs. On a donc bien le droit de le dériver par rapport à t, et sa dérivée $\frac{d\,\mathscr{C}(t)}{d\,t}$ est bien, pour chaque t, un élément de $\mathscr{G}'$, c'est à dire un torseur.

2 . Supposant le théorème établi, la démonstration des corollaires est immédiate, car les deux applications de $\mathscr{G}'$ dans $\vec{\mathscr{E}}$ qui, à un torseur $\mathscr{C}$, font correspondre sa résultante générale $\vec{R}$ (ou son moment $\vec{M}(P)$ en un point P fixé) sont linéaires, et indépendantes et t.

3 . Démonstration du théorème dans le cas où le système A est formé d'un nombre fini de points cinématiques : dérivons l'expression (3.3.11) qui donne la valeur du torseur cinétique, pour un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$ quelconque indépendant de t. On a :

$$\frac{d\,\mathscr{C}}{d\,t}(\vec{W}) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{p} m_i\,\vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d\,\vec{N_i}(t)}{d\,t}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} m_i \left[\frac{d}{dt}\,(\vec{W}\,(N_i(t)))\,.\,\frac{d\,N_i(t)}{d\,t} + \vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d^2\,\vec{N_i}(t)}{d\,t^2}\right]$$

Mais, si $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur taux de rotation du champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$, on a :

$$\vec{W}\,(Q) = \vec{W}\,(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

et par conséquent :

$$\frac{d}{d\,t}\left(\vec{W}\,(N_i(t))\right) = \lim_{t'\to t,\ t'\neq t} \frac{\vec{W}\,(N_i(t')) - \vec{W}\,(N_i(t))}{t' - t}$$

$$= \lim_{t'\to t,\ t'\neq t} \vec{\Omega} \wedge \frac{\overrightarrow{N_i(t)\,N_i(t')}}{t' - t} = \vec{\Omega} \wedge \frac{d\,\vec{N_i}(t)}{d\,t}$$

On a donc finalement :

$$\frac{d\,\mathcal{C}}{d\,t}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \left[\vec{W}\,(N_i(t)) \cdot \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2} + \left(\vec{\Omega} \wedge \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}\right) \cdot \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t)) \cdot \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2} = \mathcal{A}_t(\vec{W})$$

d'après l'expression (3.3.12).

4 . La démonstration, dans le cas général, fait appel à des notions qui ne sont pas au programme de ce cours. Disons simplement qu'elle consiste, en utilisant la propriété (3.3.4) d'invariance de la masse, à faire un changement de variables dans les intégrales (3.3.9) et (3.3.10) , afin de les ramener à des intégrales calculées sur un ensemble A indépendant de t , relativement à une mesure indépendante de t . Seule la fonction intégrée dépendant alors de t , on peut appliquer un théorème classique de dérivation sous le signe d'intégration.

3 . 4 . Efforts exercés sur un système matériel.

On considère en Mécanique que les corps physiques existant à un même instant, exercent les uns sur les autres des "efforts" (terme pour le moment vague, qu'il va falloir préciser) qui sont les causes des variations, au cours du temps, de leurs mouvements. La Dynamique se propose d'en donner une schématisation mathématique (qui fait l'objet du présent paragraphe), puis d'exprimer les relations qui lient les efforts exercés sur un corps physique, aux grandeurs mathématiques décrivant le mouvement de ce corps (ces relations seront exposées dans le prochain paragraphe).

a) Cas d'un point matériel. On considère un point matériel A , c'est à dire un système matériel dont les dimensions sont suffisamment petites pour qu'on puisse l'assimiler à un point. A un instant T , en plus du point matériel A , sont présents un certain nombre de corps physiques S_1, S_2, ... S_n disjoints deux à deux et disjoints de A. Le principe suivant indique comment on peut schématiser mathématiquement les efforts exercés par chacun de ces corps sur A.

Principe. A chaque instant T, l'effort exercé par le corps physique S_i ($1 \leq i \leq n$) sur le point matériel A, peut être schématisé par un vecteur $\vec{F}_i$, élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_T$ (associé à l'espace affine $\mathcal{E}_T$, schématisant l'espace à l'instant T), appelé force exercée par S_i sur A. De plus, la force exercée par la réunion des corps S_i, supposés deux à deux disjoints, est la somme $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ des forces exercées par chacun de ces corps.

Remarques 1) En toute rigueur, la force $\vec{F}_i$ est un élément d'un espace vectoriel euclidien, distinct de $\vec{\mathcal{E}}_T$. C'est seulement après que l'on ait choisi une unité de force, qu'on peut identifier cet espace à $\vec{\mathcal{E}}_T$. On rencontre ici une circonstance analogue à celle déjà vue dans le chapitre 2 : la vitesse et l'accélération d'un point cinématique à l'instant T, relativement à un référentiel fixé, sont éléments des espaces vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{E}})$ et $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{E}}))$ respectivement, et c'est seulement moyennant le choix d'une unité de temps, qu'on peut identifier ces deux espaces vectoriels à $\vec{\mathcal{E}}$. On pourrait (en utilisant la notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels, qui n'est pas au programme) définir, de manière indépendante du choix d'une unité de force, l'espace vectoriel des forces. On se contentera de remarquer que si une force est, pour un choix donné de l'unité de force, représentée par le vecteur $\vec{F}$ de $\vec{\mathcal{E}}_T$, alors cette même force, si on prend une nouvelle unité de force égale à λ fois l'ancienne, est représentée par le vecteur $\frac{1}{\lambda}\vec{F}$.

2) La schématisation des efforts exercés sur A, est indépendante du choix d'un référentiel. Lorsqu'on a choisi un référentiel, les espaces affines $\mathcal{E}_T$ qui représentent l'espace physique à différents instants T, sont tous identifiés à un même espace affine euclidien de dimension 3 $\mathcal{E}$, et par conséquent, les espaces vectoriels associés, $\vec{\mathcal{E}}_T$, sont identifiés à $\vec{\mathcal{E}}$. Pour un choix donné de l'unité de force, la force exercée par chaque corps S_i sur A sera donc représentée par un vecteur $\vec{F}_i$, élément de $\vec{\mathcal{E}}$. Il peut être plus commode d'utiliser, pour représenter la force exercée par S_i sur A, non le vecteur $\vec{F}_i$ seul, mais le vecteur lié $(A_T, \vec{F}_i)$ où $A_T \in \mathcal{E}$ est le point représentant, dans le référentiel choisi, la position de A à l'instant T. On sait (Annexe au présent chapitre 3.A.3) que ce vecteur lié définit un torseur uniforce, qu'on peut, au même titre que le vecteur lié $(A_T, \vec{F}_i)$ utiliser pour représenter la force exercée par S_i sur A.

La somme des torseurs représentant les forces exercées sur A par tous les corps S_i, est encore un torseur uniforce, défini par le vecteur lié $(A_T , \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i)$, parce que les $\vec{F}_i$ sont tous liés au même point A_T.

On peut se demander si, dans des conditions plus générales, il n'y aurait pas lieu de représenter l'effort exercé par un corps S_i sur A par un torseur qui ne serait plus nécessairement uniforce. Ce serait le cas si le point matériel A possèdait des propriétés physiques plus riches que sa masse (par exemple un moment cinétique propre, correspondant à la propriété des particules élémentaires appelée "spin" par les physiciens). On reviendra sur ce sujet dans les cas d'un système matériel plus compliqué qu'un point matériel.

b) Cas de plusieurs points matériels. On suppose maintenant le système matériel A formé par un nombre fini de points matériels N_1, N_2, ... N_p. On veut décrire les efforts exercés sur A par un certain nombre d'autres corps physiques S_1, S_2, ... S_n, disjoints deux à deux et disjoints de A. Il ne suffit pas pour cela de décrire les efforts exercés par chaque corps S_i sur A entier car, pour étudier les mouvements relatifs des divers points qui constituent A, on doit pouvoir décrire aussi l'effort exercé par S_i sur chaque partie de A. On sait déjà (paragraphe a) ci-dessus) que l'effort exercé à l'instant T par S_i sur la partie de A constituée par un seul point matériel N_j, peut être représenté par un vecteur $\vec{F}_{ij}$; on a vu aussi, dans les Remarques, que cet effort pouvait aussi être représenté par le torseur uniforce $\mathcal{T}_{ij}$, défini par le vecteur lié $(N_j(T) , \vec{F}_{ij})$, où $N_j(T)$ est la position de N_j à l'instant T. On est tout naturellement amené au principe :

Principe. A chaque instant T, l'effort exercé par le corps physique S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sur la partie de A constituée par la réunion $\{N_{j_1} , N_{j_2}, \ldots N_{j_k}\}$ des k points matériels $N_{j_1}, \ldots N_{j_k}$, est le torseur :

$$\mathcal{T}_{i j_1} + \mathcal{T}_{i j_2} + \ldots + \mathcal{T}_{i j_k} \tag{3.4.1}$$

somme des torseurs uniforces représentant l'effort exercé par S_i sur chacun de ces points. De plus, l'effort exercé par la réunion des corps S_i sur $\{N_{j_1} , N_{j_2} , \ldots N_{j_k}\}$ est la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{T}_{i j_1} + \ldots + \mathcal{T}_{i j_k}) \tag{3.4.2}$$

des torseurs représentant l'effort exercé sur cet ensemble de points, par chacun des corps S_i.

<u>Remarque importante</u> L'effort exercé par S_i (et, de même, l'effort exercé par la réunion des S_i) sur $\{N_{j1}, \dots N_{jk}\}$, n'est plus, en général, un torseur uniforce. Si P est un point quelconque de $\mathcal{E}_T$, les éléments de réduction de ce torseur au point P sont (en supposant $\mathcal{E}_T$ orienté) :

$$(3.4.3) \begin{cases} \text{résultante générale :} & \vec{F}_{ij_1} + \dots + \vec{F}_{ijk} \\ \text{moment au point } P : & \overrightarrow{PN_{j1}(T)} \wedge \vec{F}_{ij_1} + \dots + \overrightarrow{PN_{jk}(T)} \wedge \vec{F}_{ijk} \end{cases}$$

c) <u>Cas général</u>. On considère maintenant un système matériel A, non nécessairement réunion d'un nombre fini de points matériels, et on suppose, comme dans le paragraphe 3.3, que toutes ses parties mesurables sont aussi des systèmes matériels. Comme ci-dessus, on doit décrire l'effort exercé par un corps physique S_i non seulement sur A entier, mais sur chaque partie mesurable B de A. En généralisant de manière naturelle le cas d'un nombre fini de point matériels, on est conduit à admettre les faits suivants :

- à chaque instant T, l'effort exercé par S_i sur une partie mesurable B de A occupant à l'instant T la position B_T, est un <u>torseur</u> $\mathcal{T}_i(B_T)$ sur l'espace $\mathcal{E}_T$.

- si B_{1T} et B_{2T} sont les positions, à l'instant T, de deux parties mesurables disjointes B_1 et B_2 de A, l'effort $\mathcal{T}_i\,(B_{1T} \cup B_{2T})$ exercé à l'instant T par S_i sur la partie de A réunion de B_1 et de B_2 est

$$(3.4.4) \qquad \mathcal{T}_i\,(B_{1T} \cup B_{2T}) = \mathcal{T}_i\,(B_{1T}) + \mathcal{T}_i\,(B_{2T})$$

On voit que la situation est tout à fait analogue à celle rencontrée dans le paragraphe 3.3, la propriété (3.4.4) ci-dessus étant l'analogue de la propriété d'additivité de la masse. De même qu'on a utilisé, pour décrire la répartition des masses de A, une mesure positive sur A_T, on est amené à décrire la répartition des efforts exercés par S_i sur A à l'instant T, au moyen d'une mesure sur A_T, à valeurs dans l'espace $\mathcal{G}'$ des torseurs sur $\mathcal{E}_T$. Par définition, une telle mesure, est une application qui, à toute partie mesurable B_T de A_T, fait correspondre un torseur $\mathcal{T}_i\,(B_T) \in \mathcal{G}'$, qui vérifie (3.4.4) si B_{1T} et B_{2T} sont des parties mesurables disjointes de A_T, et même plus généralement :

$$(3.4.5) \qquad \mathcal{T}_i\,\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{jT}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_i\,(B_{jT})$$

si les B_{jT} forment une famille dénombrable de parties mesurables deux à deux

On pose comme principe :

<u>Principe</u> A chaque instant T , l'effort exercé par le corps physique S_i sur les diverses parties de A , est décrit par une mesure $\mathcal{T}_i$ sur la position A_T de A à l'instant T , à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}'$ des torseurs sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_T$. Pour toute partie mesurable B_T de A_T , l'effort exercé par S_i sur la partie B de A qui occupe à l'instant T la position B_T , est le torseur $\mathcal{T}_i\,(B_T)$. En particulier l'effort exercé par S_i sur A entier, est $\mathcal{T}_i\,(A_T)$. Enfin, l'effort exercé par la réunion des corps S_i (supposés deux à deux disjoints , $1 \leqslant i \leqslant n$) sur A est la mesure somme $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ des mesures représentant les efforts exercés sur A par chacun des S_i .

<u>Remarque 1</u> Comme dans le cas a) , ce n'est que moyennant le choix d'une <u>unité de force</u> que l'on peut considérer les efforts comme représentés par des torseurs sur $\mathcal{E}_T$. Si on prend une autre unité de force égale à λ fois l'ancienne, les mesures $\mathcal{T}_i$, à valeurs dans l'espace des torseurs et représentant les efforts exercés sur A par les corps S_i , sont à remplacer par $\frac{1}{\lambda}\,\mathcal{T}_i$.

<u>Remarque 2</u> On s'attachera surtout à <u>bien comprendre</u> les exemples particuliers a) et b) , ainsi que ceux donnés dans le paragraphe 3.6 ci-après, plutôt qu'à approfondir les propriétés générales des mesures, qui ne sont pas au programme de ce cours.

Suite du chapitre III

NOTIONS DE DYNAMIQUE

3 . 5 . Le principe fondamental de la dynamique.

Considérons un système matériel A dont, comme en 3 . 3 . , toute partie mesurable est un système matériel, et n corps S_i deux à deux disjoints et disjoints de A . $\mathcal{T}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ désigne la mesure, à valeurs dans l'espace des torseurs, qui représente les efforts exercés par S_i à l'instant T sur les diverses parties de A ; en particulier, le torseur $\mathcal{T}_i\,(A_T)$ désigne l'effort exercé par S_i sur A entier. C'est un torseur sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_T$, qui représente l'espace physique à l'instant T : il est bien défini, indépendamment de tout choix d'un référentiel de l'espace - temps. Ainsi qu'on l'a vu dans la remarque 1 en fin du paragraphe précédent, cela suppose qu'on a choisi une unité de force.

Supposons choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps, de domaine de temps $]\,T_1\,,\,T_2\,[$, ainsi qu'une origine $O_{\mathcal{T}}$ et une unité $\vec{e}_0$ du temps $\mathcal{T}$. Chaque instant $T \in\,]\,T_1\,,\,T_2\,[$ sera désormais représenté par sa date $t \in\,]\,t_1\,,\,t_2\,[$.

Puisque tous les $\mathcal{E}_T$ sont maintenant identifiés à un même espace affine euclidien de dimension 3 $\mathcal{E}$, qu'on supposera orienté, on peut maintenant considérer la position A_t du système matériel A à la date t , comme une partie de $\mathcal{E}$, et la mesure $\mathcal{T}_i$ représentant l'effort exercé par S_i , à cette date sur les diverses parties de A , comme une mesure sur A_t , à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}'$ des torseurs sur $\mathcal{E}$. Afin de bien indiquer que $\mathcal{T}_i$ dépend de t , on écrira maintenant :

$$\mathcal{T}_i\ (B,\ t) \quad \text{au lieu de} \quad \mathcal{T}_i\ (B)$$

pour désigner le torseur représentant l'effort exercé, à la date t , par S_i sur la partie de A qui, à cette date, occupe la position B (B désignant une partie mesurable quelconque de A_t).

On sait d'autre part (paragraphe 3.3) qu'on peut définir les torseurs cinétique $\mathcal{C}(t)$ et dynamique $\mathcal{D}(t)$ du système matériel A à la date t , relativement au référentiel $\mathcal{R}$. Ainsi qu'on l'a vu, ils dépendent du choix du référentiel $\mathcal{R}$, mais aussi des choix des unités de temps $\vec{e}_0$ et de masse $\vec{m}_0$ (paragraphes 2.2 et 3.1).

Le principe fondamental de la Dynamique semble, pour l'essentiel, avoir été trouvé par d'Alembert (1743) ; les travaux de Galilée sur la chute des corps (1632) , ceux de Huygens sur la force centrifuge (1673) et de Newton sur la gravitation (1682) avaient toutefois préparé le terrain.

<u>Principe fondamental de la Dynamique</u> Il existe au moins un choix possible du référentiel $\mathcal{R}$ et des unités de temps, de masse et de force, pour lequel, pour <u>tout</u> système matériel A dont toute partie est un système matériel, on ait à <u>chaque instant</u> T , <u>égalité</u> du <u>torseur dynamique</u> de A et du <u>torseur des efforts</u> exercés sur A par la réunion de tous les corps physiques présents autres que A .

Ce principe s'exprime par l'égalité, avec les notations définies ci-dessus :

$$(3.5.1) \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i\ (A_t\ ,\ t) = \mathcal{D}(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in \,]\, t_1,\ t_2\, [}$$

Un référentiel $\mathcal{R}$ et un choix des unités de temps, de masse et de force, pour lesquels on a cette égalité, seront dits, respectivement, <u>référentiel galiléen</u>, et <u>choix cohérent d'unités</u>. On dira de même qu'un repère de l'espace temps est galiléen, si le référentiel associé est galiléen.

<u>Remarques</u>. Sachant, d'après le principe fondamental, qu'il existe un repère galiléen de l'espace - temps, il est facile de montrer qu'il en existe une infinité ; étant donné un repère galiléen $\hat{\mathcal{R}}$, un autre repère $\hat{\mathcal{R}}'$ est galiléen si et seulement si le mouvement de $\hat{\mathcal{R}}'$ relativement à $\hat{\mathcal{R}}$ est un mouvement de translation uniforme.

Les changements de repères galiléens forment un groupe, appelé groupe de Galilée.

De même, sachant qu'il existe un choix cohérent d'unités, il est facile de montrer qu'il en existe une infinité. Supposons qu'on ait choisi des unités de temps $\vec{e}_0$, de masse m_0, et de force f_0, constituant un choix cohérent d'unités. Prenons comme nouvelles unités de temps $\theta\,\vec{e}_0$, de masse $\mu\, m_0$ et de force $\varphi\, f_0$, θ, μ et φ étant des réels > 0. Il est facile de vérifier que ce nouveau choix d'unités est cohérent si et seulement si :

$$\frac{\theta^2\,\varphi}{\mu} = 1$$

Ce résultat se généralise au cas où on considère aussi des changements de l'unité de longueur. Nous les avons laissés de côté car nous avons considéré tous les vecteurs rencontrés (vitesses , accélérations , forces) comme éléments du même espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$, ce qui fixe le choix de l'unité de longueur. La branche de la mécanique qui traite des changements de choix cohérents d'unités s'appelle l'Analyse dimensionnelle. Signalons simplement que si, comme ci-dessus, on multiplie respectivement par θ, μ et φ les unités de temps, de masse et de force, et par λ l'unité de longueur, le nouveau choix d'unités est cohérent si et seulement si : $\frac{\theta^2\,\varphi}{\mu\,\lambda} = 1$.

Afin de tirer du principe ci-dessus quelques conséquences simples, considérons deux systèmes matériels disjoints A et A' choisissons un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et des unités cohérentes, et désignons par $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{A}'(t)$ les torseurs dynamiques de A et A' respectivement, à la date t. Les corps physiques qui exercent sur A et A' des efforts sont désignés par S_i $(1 \leq i \leq n)$ et sont supposés deux à deux disjoints, et disjoints de A et de A'. $\mathcal{T}_i\,(A_t, t)$ et $\mathcal{T}_i\,(A'_t, t)$ désignent les torseurs qui représentent l'effort exercé, à la date t, par S_i respectivement sur A et sur A'. De plus, A exerce à la date t sur A' un effort représenté par le torseur $\mathcal{T}_A(A'_t, t)$ et de même, A' exerce à cette date sur A un effort $\mathcal{T}_{A'}(A_t, t)$

En appliquant le principe fondamental d'une part à A seul puis à A' seul, d'autre part au système constitué par la réunion de A et de A', on obtient :

$$(3.5.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i\,(A_t, t) + \mathcal{T}_{A'}(A_t, t) = \mathcal{A}(t)$$

$$(3.5.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i\,(A'_t, t) + \mathcal{T}_{A}\,(A'_t, t) = \mathcal{A}'(t)$$

$$(3.5.4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \,(A_t \cup A'_t\,,\, t) = \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}'(t)$$

car le torseur dynamique de $A \cup A'$ est évidemment $\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}'(t)$.
De plus, puisque A_t et A'_t sont disjoints on a (3.4.4) :

$$\mathcal{T}_i \,(A_t \cup A'_t) = \mathcal{T}_i \,(A_t) + \mathcal{T}_i \,(A'_t) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

donc, en retranchant (3.5.2) et (3.5.3) de (3.5.4) , on obtient :

$$(3.5.5) \qquad \mathcal{T}_{A'}(A_t,\, t) + \mathcal{T}_A \,(A'_t\,,\, t) = 0$$

On peut énoncer :

Théorème des actions mutuelles. Le torseur représentant l'effort exercé par le système matériel A sur le système matériel A' , disjoint de A , est, à chaque instant, l'opposé du torseur représentant l'effort exercé par A' sur A .

D'autre part, on rappelle qu'un torseur $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{G}'$, dual de l'espace $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs équiprojectifs sur $\mathcal{E}$, c'est à dire une forme linéaire sur $\mathcal{G}$. A tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$, le torseur $\mathcal{T}$ associe donc un réel $\mathcal{T}(\vec{W})$. On utilise en Mécanique la terminologie suivante.

Définition. Soit $\mathcal{T}$ un torseur sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, et $\vec{W}$ un champ de vecteurs équiprojectif sur $\mathcal{E}$. On dit que $\vec{W}$ est un champ de vecteurs vitesse virtuel et que le scalaire réel $\mathcal{T}(\vec{W})$ est la puissance virtuelle de $\mathcal{T}$, pour le champ de vecteurs vitesse virtuel $\vec{W}$.

D'après la définition même, bien évidemment, deux torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{E}$ sont égaux si et seulement si, pour tout champ de vecteurs vitesse virtuel $\vec{W}$, les puissances virtuelles $\mathcal{T}(\vec{W})$ et $\mathcal{T}'(\vec{W})$ sont égales. On voit donc que le principe fondamental de la dynamique équivaut à l'énoncé suivant, appelé principe (ou théorème, lorsqu'on le considère comme déduit du précédent) des puissances virtuelles :

Théorème des puissances virtuelles. Il existe un référentiel $\mathcal{R}$ (dit galiléen), et un choix des unités de temps, de masse et de force (dit cohérent), pour lesquels, pour tout système matériel A dont toute partie est un système matériel, on ait, à chaque instant T , égalité de la puissance virtuelle du torseur dynamique de A et de la puissance virtuelle du torseur des efforts exercés sur A par la réunion de tous les corps physiques autres que A , pour tout champ de vecteurs vitesse virtuel $\vec{W}$.

On voit que sur le fond, le théorème des puissances virtuelles n'apporte rien de plus (mais rien de moins) que le principe fondamental. On verra toutefois qu'en pratique il peut être d'un emploi plus commode en permettant l'élimination de certains efforts (de liaison notamment) difficiles à évaluer.

3 . 6 . Quelques exemples

On va donner dans ce paragraphe des exemples, d'une part d'efforts exercés sur un système matériel, d'autre part d'applications du principe fondamental. Tous les cas rencontrés en pratique (au niveau de ce cours), pour les efforts exercés sur un système matériel, seront des combinaisons des exemples simples 3.4 a et b déjà vus, et des cas exposés ici.

Dans tout ce paragraphe on suppose l'espace - temps rapporté à un repère galiléen, et le choix des unités cohérent. A désigne un système matériel dont toute partie mesurable est aussi un système matériel. Pour tout instant t, A_t est la partie de l'espace affine euclidien de dimension 3 $\mathscr{E}$, position de A à la date t. Nous écrivons parfois A au lieu de A_t lorsque nous considérons la situation à une date fixée.

Exemple 1. Cas où A est un point matériel, de masse m.

Dans ce cas le torseur dynamique de A à la date t est le torseur uniforce, défini par le vecteur lié $(A\,(t),\, m\vec{\Gamma}\,(t))$ où $A\,(t) \in \mathscr{E}$ est la position de A à la date t, et $\vec{\Gamma}\,(t)$ le vecteur accélération de A :

$$\vec{\Gamma}\,(t) = \frac{d^2\,\vec{A}\,(t)}{d\,t^2}$$

Cela résulte en effet du paragraphe 3.3 a).

On sait aussi (paragraphe 3.4.a) que le torseur des efforts exercés sur A par la réunion de tous les corps physiques autres que A, est le torseur uniforce défini par le vecteur lié $(A\,(t)\,,\,\vec{F}\,(t))$ où $\vec{F}\,(t)$ est la force exercée sur A (à la date t, par tous les autres corps présents).

Le principe de la dynamique indique que ces deux torseurs uniforces, défini respectivement par les deux vecteurs liés $(A\,(t)\,,\,m\vec{\Gamma}\,(t))$ et $(A(t)\,,\,\vec{F}(t))$ sont égaux. Il est bien entendu équivalent d'exprimer l'égalité des deux vecteu

$$(3.6.1) \qquad \vec{F}\,(t) = m\,\vec{\Gamma}\,(t)$$

Souvent en pratique, la force $\vec{F}\,(t)$ est donnée, non directement en fonction de t, mais en fonction de la position $A\,(t)$ occupée par A à l'instant t.

En d'autres termes, il existe alors sur $\mathscr{E}$ (ou, éventuellement, une partie de $\mathscr{E}$) un champ de vecteurs $\vec{F}$ connu, tel que la force exercée sur A à la date t soit égale à la valeur $\vec{F}(A(t))$ du champ $\vec{F}$ au point $A(t)$, position occupée par A à cette date.
Dans ce cas (3.6.1) s'écrit :

$$(3.6.2) \qquad \frac{d^2 \vec{A}(t)}{d\, t^2} = \vec{F}(A(t))$$

On dit que (3.6.2) est une <u>équatioh différentielle vectorielle</u> du second ordre. Si on désigne par $x_i(t)$ $(1 \leq i \leq 3)$ les coordonnées de $A(t)$, (3.6.2) équivaut au système de 3 équations différentielles scalaires

$$(3.6.3) \qquad \frac{d^2 x_i(t)}{d\, t^2} = F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (1 \leq i \leq 3)$$

où $F_i(x_1, x_2, x_3)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composantes de la valeur du champ $\vec{F}$ au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Considérons le cas particulier où le champ $\vec{F}$ est de la forme :

$$\vec{F}(M) = \varphi(|\vec{OM}|)\ \vec{OM}$$

M étant un point quelconque de $\mathscr{E}$, et O l'origine du repère affine choisi de $\mathscr{E}$. φ est une fonction, définie sur une partie de $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles (on suppose, que si φ n'est pas définie sur $\mathbb{R}^+$ entier, le point M tel que $|\vec{OM}|$ appartienne au domaine de définition de φ). On dit alors que $\vec{F}$ est un champ de forces central. On voit que dans ce cas, la force qui s'exerce sur A, donc aussi l'accélération de A, est à chaque instant t parallèle à la droite joignant l'origine O à $A(t)$.

Ainsi par exemple, le mouvement d'une planète autour du Soleil peut en première approximation être traité comme le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces central de la forme :

$$\vec{F}(M) = -\frac{k}{|\vec{OM}|^3}\vec{OM}$$

(k étant une constante), défini en tout point M de $\mathscr{E}$ autre que O. On montre que toutes les trajectoires possibles de A sont dans ce cas des coniques ayant O pour foyer. Cette loi a été trouvée expérimentalement, pour les planètes du système solaire, par Képler (1609).

<u>Exemple 2. Cas où A est un milieu continu et où les efforts exercés sur A sont définis par une densité volumique et un champ de vecteurs.</u>

Supposons qu'on ait sur $A(t) \subset \mathcal{E}$:

- une fonction σ , à valeurs réelles, suffisamment régulière ;

- un champ de vecteurs $\vec{F}$, lui aussi suffisamment régulier.

On sait (Annexe 3 A 2 b) que ces données permettent de définir un torseur $\tau(A(t))$ qui, à un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$ quelconque , fait correspondre :

$$\tau(A(t))(\vec{W}) = \iiint_{A(t)} \vec{F}(x) \cdot \vec{W}(x)\, \sigma(x)\, d^3x$$

On voit même que à toute partie mesurable B de $A(t)$, on peut, d'une manière analogue, associer un torseur $\tau(B)$ (prenant pour le champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$, une valeur donnée par une formule analogue à celle ci-dessus, l'intégrale étant maintenant prise sur B) . On montre facilement que τ , ainsi défini, est une mesure à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}'$ des torseurs.

Il existe de nombreux cas où les efforts exercés par un corps physique S sur A , s'expriment par une mesure τ ayant la forme indiquée ci-dessus. Par exemple, σ peut être une densité de charge électrique portée par A , et $\vec{F}$ le champ électrique crée par un autre corps électriquement chargé S . Ou encore, σ peut être la densité de masse (précédemment désignée par ρ) du corps A , et $\vec{F}$ peut être le champ d'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur (représentant l'effort d'attraction exercé par la Terre sur le corps pesant A) . On considère souvent, dans l'étude des phénomènes à une échelle petite auprès des dimensions de la Terre, le champ $\vec{g}$ comme constant dans l'espace. On verra plus loin que dans ce cas le torseur $\tau(A_t)$ est uniforce, et peut être représenté par un vecteur lié parallèle à $\vec{g}$ attaché à un point appelé centre de masse de A_t .

<u>Exemple 3. Cas où A est un milieu continu et où les efforts exercés sur A sont définis par une densité et un champ de couples.</u>

D'une manière intuitive, dans l'exemple 2 l'effort exercé sur un élément de volume infiniment petit d^3x de A_t entourant le point x , était un torseur uniforce défini par le vecteur lié, attaché au point x :

$$(x\ , \quad \vec{F}(x)\, \rho(x)\, d^3x)$$

Le torseur représentant l'effort exercé sur A_t entier, ou sur une partie B de A_t , s'en déduisait par intégration (dans A_t , ou dans B).

On peut aussi imaginer le cas où l'effort exercé sur un élément de volume infiniment petit d^3x de A_t entourant le point x est, non plus un torseur uniforce, mais un <u>couple</u>.

Relativement peu fréquent, ce cas se rencontre toutefois, par exemple lorsqu'on a un corps aimanté placé dans un champ magnétique.

On a dans ce cas, sur $A(t)$:

- une fonction σ, à valeurs réelles, suffisamment régulière, comme dans le cas précédent ;

- un champ de vecteurs $\vec{M}$, lui aussi suffisamment régulier, qui maintenant doit être considéré comme définissant un champ de couples.

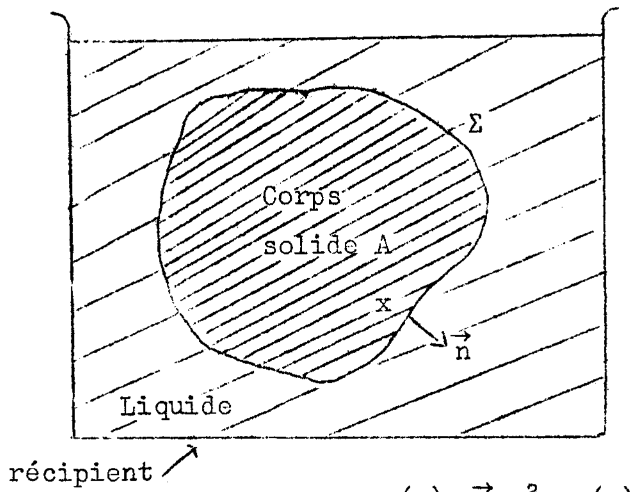
Ces données permettent de définir, pour toute partie mesurable B de A_t, un couple, c'est à dire un torseur $\mathcal{T}(B)$ dont la résultante générale est nulle, et dont le moment résultant (en un point quelconque, l'origine par exemple puisque dans ce cas le champ des moments du torseur est constant) est donné par la formule :

$$\iiint_B \vec{M}(x)\,\sigma(x)\,d^3x$$

<u>Exemples 4 et 5 . Cas où les efforts exercés sur A sont concentrés sur une surface ou sur une ligne, et sont définis par une densité surfacique ou linéique et un champ de vecteurs.</u>

Ces cas sont analogue à l'exemple 2 , les intégrales étant maintenant calculées sur une surface ou sur une ligne, sur laquelle sont concentrés les efforts exercés sur A . L'expression des torseurs correspondants a été indiquée en Annexe 3. A. 3. c et d .

A titre d'illustration, considérons le cas d'un corps solide A , immergé dans un liquide au repos. Le liquide exerce sur A des efforts concentrés sur la surface Σ qui limite A . Supposons celle-ci régulière. En tout point x de cette surface on peut alors définir un plan tangent et un vecteur unitaire normal $\vec{n}$, dirigé vers le liquide. On montre que l'effort exercé sur un élément de surface infinitésimal $d^2\sigma(x)$ entourant le point x est :



$$-\,p(x)\;\vec{n}\;d^2\sigma(x)$$

où $p(x)$ désigne la pression dans le liquide au point x .

Par ailleurs, les lois de l'hydrostatique permettent de montrer que :

$$p(x) = \rho\, g\, Z(x) + p_0$$

où g est le module de l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique du fluide, et $Z(x)$ la profondeur du point x (comptée le long de la verticale, à partir de la surface du liquide, positivement vers le bas). p_0 est une constante (c'est la pression qui règne à la surface du liquide).

Le torseur $\mathcal{T}(A)$ représentant l'effort exercé par le liquide sur le solide immergé, s'en déduit par intégration. Sa valeur, pour un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$ quelconque, est :

$$\mathcal{T}(A)\,(\vec{W}) = \iint_{\Sigma} (-\rho\, g\, Z(x) + p_0)\, \vec{n} \cdot \vec{W}(x)\, d^2\sigma(x)$$

Sa résultante générale est :

$$\iint_{\Sigma} (-\rho\, g\, Z(x) + p_0)\, \vec{n}\, d^2\sigma(x)$$

On verra plus loin qu'une formule classique (Ostrogradsky) permet de montrer que cette intégrale est égale à :

$$\rho\, g \iiint_{A} d^3x \quad \vec{e}_3$$

$\vec{e}_3$ étant le vecteur unitaire vertical dirigé vers le haut. On verra également que le torseur $\mathcal{T}(A)$ est uniforce, et peut être représenté par un vecteur lié attaché à un point appelé centre de volume de A.

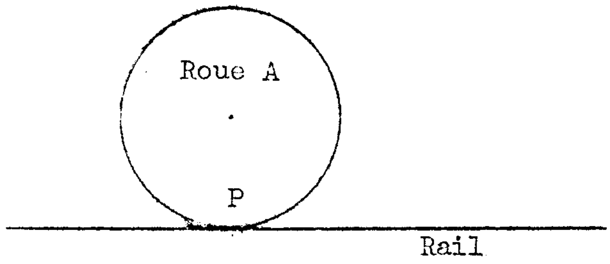
Exemples 6 et 7. Cas où les efforts exercés sur A sont concentrés sur une surface ou sur une ligne et sont définis par une densité surfacique ou linéique et un champ de couples.

Ces cas sont analogues à l'exemple 3, les intégrales étant maintenant calculées sur une surface ou sur une ligne sur laquelle sont concentrés les efforts exercés sur A, ceux-ci étant des couples. Nous ne les développerons pas, mais il est facile de le faire par analogie avec les exemples précédents.

Exemple 8. Cas d'un effort concentré en un point.

Certains efforts exercés sur un système matériel A doivent (en général parce qu'on donne de A une schématisation simplifiée) être considérés comme concentrés en un point de A.

Considérons par exemple le cas où A est une roue indéformable, posée sur un rail rectiligne également indéformable.

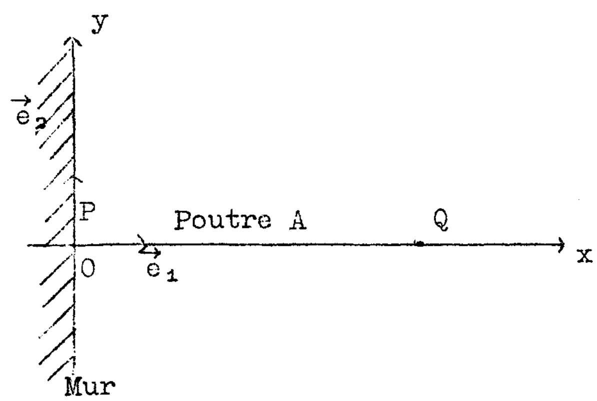


L'effort exercé par le rail sur la roue doit être considéré comme concentré au point P de contact de la roue avec le rail (justement parce que, en négligeant les déformations du rail et de la roue, on est amené à considérer ce contact comme ponctuel, ce qu'il n'est pas en toute rigueur). Rappelons que l'effort exercé par le rail sur les diverses parties de la roue, est représenté par une mesure $\mathcal{T}$ sur A, à valeurs dans l'espace $\mathcal{G}'$ des torseurs, qui à toute partie mesurable B de A, associe un torseur $\mathcal{T}(B)$, effort exercé par le rail sur B. De manière précise, dire que l'effort est concentré en P, se traduit mathématiquement par le fait que la mesure $\mathcal{T}$ est une mesure concentrée en P, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\mathcal{T}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \notin B \\ \mathcal{T}(\{P\}) & \text{si } P \in B \end{cases}$$

On remarquera que le moment de $\mathcal{T}(\{P\})$ au point P n'est pas toujours nul (ce qui serait le cas si l'effort exercé par le rail sur la roue était représentable par une force appliquée au point P) : il peut exister un "couple de résistance au roulement".

Considérons un autre exemple de même nature.
Une poutre rigide est encastrée dans un mur par une de ses extrémités. On peut, si la section de cette poutre est suffisamment petite auprès de sa longueur, la schématiser par un segment de droite, touchant le mur par son extrémité P, son autre extrémité Q étant libre. L'effort exercé par le mur sur la poutre doit, ici encore, être considéré comme concentré au point P. Comme ci-dessus, le moment au point P du torseur $\mathcal{T}_1(\{P\})$ représentant l'effort exercé par le mur sur le point P, n'est pas en général nul.



Supposons la poutre horizontale, au repos, et soumise, en plus de l'effort exercé par le mur, aux efforts de la pesanteur, la masse linéique de la poutre étant ρ. Le torseur $\mathcal{T}_2(A)$ représentant les efforts de la pesanteur sur la poutre A entière a, pour éléments de réduction au point P :

$$\text{résultante générale} : -\int^{L} \rho\, g\, \vec{e}_2\, dx = -\rho\, g\, L\, \vec{e}_2$$

moment au point P : $\int_0^L \vec{Ox} \wedge (-\rho g \vec{e}_2)\, dx$

$$= -\rho g \vec{e}_3 \int_0^L x \, dx = -\rho g \frac{L^2}{2} \vec{e}_3$$

où L est la longueur de la poutre, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ des vecteurs unitaires formant une base orthonormée positive, $\vec{e}_1$ étant parallèle à la poutre et dirigé de P vers Q, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ parallèles au mur et, respectivement, vertical dirigé vers le haut et horizontal.

Le torseur dynamique de la poutre étant nul, le principe fondamental montre que :

$$\mathcal{T}_1 (\{P\}) + \mathcal{T}_2 (\Lambda) = 0$$

On en déduit les éléments de réduction de $\mathcal{T}_1 (\{P\})$ au point P :

résultante générale : $\rho g L \vec{e}_2$

moment au point P : $\rho g \frac{L^2}{2} \vec{e}_3$

3 . A . 3 Torseurs sur un espace affine euclidien de dimension 3 .

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, de dimension 3 , $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé, qu'on supposera orienté. On a vu (Annexe au chapitre II) que l'ensemble des champs de vecteurs équiprojectifs sur $\mathcal{E}$, est un espace vectoriel de dimension 6 , qu'on désignera par $\mathcal{G}$.

Définition. On appelle torseur sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, toute forme linéaire α sur l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs équiprojectifs sur $\mathcal{E}$. (C'est à dire toute application linéaire α de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$).

On sait (cours de mathématiques) que l'ensemble des torseurs sur $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel $\mathcal{G}'$, appelé dual de $\mathcal{G}$, dont la dimension est égale à celle de $\mathcal{G}$, c'est à dire 6 .

Soit P un point quelconque de $\mathcal{E}$. On sait que tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V} \in \mathcal{G}$, est déterminé par la donnée de deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$, appelés éléments de réduction de $\vec{V}$ au point P :

- la valeur $\vec{V}(P)$ du champ $\vec{V}$ au point P
- le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ de $\vec{V}$.

De plus, l'application $\vec{V} \to (\vec{V}(P) , \vec{\Omega})$ qui, à un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V} \in \mathcal{G}$, fait correspondre ses éléments de réduction en un point P fixé, est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ sur l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$.

Par conséquent, pour définir un torseur $\alpha \in \mathcal{G}'$, c'est à dire une forme linéaire sur $\mathcal{G}$, on peut lorsqu'un point P de $\mathcal{E}$ a été choisi, se donner une forme linéaire sur $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$. Or, $\vec{\mathcal{E}}$ étant euclidien, toute forme linéaire sur $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ est déterminée par la donnée de deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{M}$ de $\vec{\mathcal{E}}$: le doublet $(\vec{R} , \vec{M})$ définissant en effet l'application linéaire de $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(\vec{u} , \vec{v}) \to \vec{R} . \vec{u} + \vec{M} . \vec{v} \quad ; \quad (\vec{u} , \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} .$$

On voit donc que tout torseur α peut être défini, une fois choisi un point P de $\mathcal{E}$, par la donnée de deux vecteurs $(\vec{R}(P) , \vec{M}(P))$ éléments de $\vec{\mathcal{E}}$ (on écrit maintenant $\vec{R}(P)$ et $\vec{M}(P)$ au lieu de $\vec{R}$ et $\vec{M}$ pour souligner le fait que ces vecteurs peuvent dépendre du choix de P) ; le torseur α défini par $(\vec{R}(P) , \vec{M}(P))$ est alors l'application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\vec{V} \to \alpha(\vec{V}) = \vec{R}(P) . \vec{V}(P) + \vec{M}(P) . \vec{\Omega}$$

$(\vec{V}(P) , \vec{\Omega})$ étant les éléments de réduction de $\vec{V}$ au point P .

On dit que $(\vec{R}(P), \vec{M}(P))$ sont les <u>éléments de réduction</u> du torseur α au point P. On va voir comment ils varient lorsque le point choisi P varie. On sait que si Q est un autre point de $\mathcal{E}$, tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ qui a pour éléments de réduction au point P $(\vec{V}(P), \vec{\Omega})$, a pour éléments de réduction au point Q $(\vec{V}(Q), \vec{\Omega})$ avec :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

En écrivant $\alpha(\vec{V})$ de deux manières différentes on a :

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{V}) &= \vec{R}(P) \cdot \vec{V}(P) + \vec{M}(P) \cdot \vec{\Omega} \\ &= \vec{R}(Q) \cdot (\vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}) + \vec{M}(Q) \cdot \vec{\Omega}\end{aligned}$$

d'où (en utilisant la propriété d'antisymétrie du produit mixte) :

$$(\vec{R}(Q) - \vec{R}(P)) \cdot \vec{V}(P) + (\vec{M}(Q) - \vec{M}(P) - \vec{R}(Q) \wedge \vec{PQ}) \cdot \vec{\Omega} = 0$$

Ceci doit être vrai pour tout $\vec{V} \in \mathcal{G}$, c'est à dire pour tout choix des deux vecteurs $\vec{V}(P)$ et $\vec{\Omega}$. En faisant d'abord $\vec{\Omega} = 0$ on voit qu'on doit avoir

$(\vec{R}(Q) - \vec{R}(P)) \cdot \vec{V}(P) = 0$ quel que soit $\vec{V}(P)$ ce qui impose :

$$\boxed{\vec{R}(Q) = \vec{R}(P) = \vec{R}}$$

En remplaçant $\vec{R}(Q)$ et $\vec{R}(P)$ par $\vec{R}$ (puisqu'on vient de voir que ce vecteur ne dépend pas en fait du point choisi) on voit qu'on doit encore avoir :

$(\vec{M}(Q) - \vec{M}(P) - \vec{R} \wedge \vec{PQ}) \cdot \vec{\Omega} = 0$ quel que soit $\vec{\Omega}$ ce qui impose :

$$\boxed{\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}}$$

On peut donc énoncer :

<u>Proposition</u>. Lorsqu'on a choisi un point P de $\mathcal{E}$, tout torseur α peut être défini par la donnée de deux vecteurs $(\vec{R}, \vec{M}(P))$, tous deux éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, appelés éléments de réduction du torseur α au point P. Le premier, $\vec{R}$, est indépendant du choix du point P. On l'appelle <u>résultante générale</u> du torseur α. Le second $\vec{M}(P)$, varie avec le choix du point $P \in \mathcal{E}$ selon la formule :

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$

On l'appelle <u>moment</u> du torseur α au point P. Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs équiprojectif de vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$, la valeur de $\alpha(\vec{V})$ est :

$$\alpha(\vec{V}) = \vec{R} \cdot \vec{V}(P) + \vec{M}(P) \cdot \vec{\Omega}$$

Remarque. Soit un torseur α . L'application de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ qui, à tout point P , fait correspondre le moment $\vec{M}(P)$ du torseur α au point P , est visiblement un champ de vecteurs équiprojectif dont le vecteur taux de rotation est la résultante générale $\vec{R}$ de α . C'est pourquoi en pratique, on confond souvent les notions de champ de vecteurs équiprojectif, et de torseur : cela est légitime car à tout torseur on peut faire correspondre le champ de vecteurs équiprojectif de ses moments, et réciproquement, à tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ on peut faire correspondre le torseur qui a pour résultante générale le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de $\vec{V}$, et pour moment en un point P , la valeur $\vec{V}(P)$ de $\vec{V}$ en ce point. Un torseur et un champ de vecteurs équiprojectif ainsi mis en correspondance seront dits associés. On vérifie que cette correspondance est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs équiprojectifs sur son dual $\mathcal{G}'$. L'existence d'une telle bijection est particulière au cas où l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ est euclidien et de dimension 3 , et il paraît préférable, pour éviter certaines confusions, de considérer comme distinctes les deux notions de torseur, et de champ de vecteurs équiprojectif. C'est ce qui sera fait dans la suite de ce cours.

3 . A . 2 . Classification des torseurs.

a) Couples Un torseur α (sur l'espace affine euclidien de dimension 3 orienté $\mathcal{E}$) est appelé couple si sa résultante générale $\vec{R}$ est nulle. Dans ce cas, le moment $\vec{M}(P)$ de α en un point P de $\mathcal{E}$, ne dépend pas du choix du point P .

Il est facile de vérifier qu'un torseur α est un couple si et seulement si, pour tout champ de vecteurs constant $\vec{V}$ sur $\mathcal{E}$ (c'est à dire, avec la terminologie de l'Annexe au chapitre II , pour toute translation infinitésimale $\vec{V}$) on a $\alpha(\vec{V}) = 0$

b) Torseurs uniforces Un torseur α est dit uniforce (ou univectoriel) s'il existe un point P de $\mathcal{E}$, tel que le moment $\vec{M}(P)$ de α au point P soit nul. Supposons de plus la résultante générale $\vec{R}$ du torseur uniforce α non nulle (le cas contraire étant trivial, α étant alors nul). On voit alors, d'après la formule :

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \vec{PQ}$$

que le moment de α en un point Q de $\mathcal{E}$ est nul si et seulement si Q est situé sur la droite Δ passant par P et parallèle à $\vec{R}$. Cette droite est appelée axe du torseur α .

c) Cas général. Tout torseur α peut, d'une infinité de manières si sa résultante générale $\vec{R}$ est non nulle, être décomposé en une somme d'un couple α_1 et d'un torseur uniforce α_2. Il suffit en effet de choisir un point P quelconque de $\mathcal{E}$, et de prendre pour α_1 et α_2 les torseurs dont les éléments de réduction au point P sont respectivement :

$$(0\ ,\ \vec{M}(P)) \qquad \text{pour } \alpha_1$$

$$(\vec{R}\ ,\ 0\ ) \qquad \text{pour } \alpha_2$$

$(\vec{R}\ ,\ \vec{M}(P))$ désignent ici les éléments de réduction de α au point P. Parmi toutes ces décompositions possibles, correspondant aux divers choix possibles du point P, il en est une privilégiée pour laquelle le moment $\vec{M}(P)$ du couple α_1 est module minimum. Le raisonnement permettant de la déterminer est identique à celui fait dans l'Annexe au chapitre II, dans le cas d'un champ de vecteurs équiprojectif. La droite Δ passant par un point P tel que $|\vec{M}(P)|$ soit minimum ; et parallèle à $\vec{R}$, est appelée axe du torseur α (le minimum de $|\vec{M}(P)|$ étant nul, si et seulement si le torseur α est uniforce).

3 . A . 3 Torseur déterminé par la donnée d'une mesure vectorielle

Les torseurs rencontrés en Mécanique sont généralement déterminés par la donnée d'une mesure vectorielle sur l'espace affine euclidien de dimension 3 orienté $\mathcal{E}$. La notion de mesure vectorielle (qui se rattache à celle de mesure positive, dont la définition a été esquissée dans le paragraphe 3.2) n'étant pas au programme, on se contentera d'indiquer ici les cas particuliers les plus fréquemment rencontrés.

a) Torseur déterminé par une famille finie de vecteurs liés.

On rappelle qu'un vecteur lié sur l'espace affine $\mathcal{E}$ est un doublet $(N\ ,\ \vec{F})$ constitué par un point N de $\mathcal{E}$ et un vecteur $\vec{F}$ élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$.

Considèrons une famille d'un nombre fini p de vecteurs liés $(N_i\ ,\ \vec{F}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. On peut définir un torseur α, dit déterminé par la famille $\left\{(N_i\ ,\ \vec{F}_i)\right\}$, en posant, pour tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V} \in \mathcal{G}$:

$$\alpha(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i \cdot \vec{V}(N_i)$$

Le second membre est visiblement une forme linéaire, donc on définit bien ainsi un torseur.

Pour trouver ses éléments de réduction en unnpoint P quelconque de $\mathscr{E}$, il suffit d'écrire ($\vec{\Omega}$ désignant le vecteur taux de rotation de $\vec{V}$) :

$$\vec{V}(N_i) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PN_i}$$

d'où (en utilisant le produit mixte pour remplacer $\vec{F}_i \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{PN_i})$ par $(\vec{PN_i} \wedge \vec{F}_i) \cdot \vec{\Omega}$) :

$$\alpha(\vec{V}) = \left(\sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i\right) \cdot \vec{V}(P) + \left(\sum_{i=1}^{p} \vec{PN_i} \wedge \vec{F}_i\right) \cdot \vec{\Omega}$$

Cette expression montre que les éléments de réduction $(\vec{R}, \vec{M}(P))$ de α au point P sont :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{p} \vec{F}_i \qquad ; \qquad \vec{M}(P) = \sum_{i=1}^{p} \vec{PN_i} \wedge \vec{F}_i$$

Remarque 1. Le torseur déterminé par un vecteur lié unique $(N, \vec{F})$ est manifestement uniforce. Le torseur déterminé par deux vecteurs liés $(N_1, \vec{F}_1)$ et $(N_2, \vec{F}_2)$ tels que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, est un couple. Cela explique la terminologie employée.

Remarque 2. Etant donné un torseur quelconque α, il est possible, d'une infinité de manières, de choisir une famille finie $\left\{ (N_i, \vec{F}_i) \right\}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de vecteurs liés qui le détermine. On peut même toujours s'arranger pour que le nombre p de vecteurs liés soit inférieur ou égal à 2 (p peut être égal à 1 si et seulement si α est uniforce).

Remarque 3. Le torseur déterminé par une famille finie $\left\{ (N_i, \vec{F}_i) \right\}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de vecteurs liés, n'est pas modifié si on remplace chaque point N_i par un autre point N_i' situé sur la droite passant par N_i et parallèle à $\vec{F}_i$. Cela résulte en effet de :

$$\vec{PN_i'} \wedge \vec{F}_i = (\vec{PN_i} + \overrightarrow{N_i N_i'}) \wedge \vec{F}_i = \vec{PN_i} \wedge \vec{F}_i$$

si $\overrightarrow{N_i N_i'}$ est parallèle à $\vec{F}_i$.

b) Torseur défini par une densité volumique et un champ de vecteurs.

On se donne, sur une partie mesurable A de $\mathscr{E}$:

- une fonction ρ, dite densité volumique, en général suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux), à valeurs réelles (mais pas nécessairement $\geqslant 0$).

- un champ de vecteurs $\vec{F}$ qui, à tout point x de A , associe un vecteur $\vec{F}(x) \in \vec{\mathcal{E}}$, supposé lui aussi suffisamment régulier.

Dans les applications à la mécanique, A sera souvent la position, à un instant fixé, d'un corps physique. La fonction ρ pourra être la densité de masse (ou masse volumique) de ce corps. Mais ρ pourra être aussi la densité d'une autre propriété du corps, par exemple la densité de charge électrique, ce qui explique que ρ puisse prendre des valeurs de signe quelconque.

Ces données déterminent un torseur α , sous certaines conditions d'intégrabilité (satisfaites notamment si A , ρ et $\vec{F}$ sont bornés), dit torseur déterminé par la densité ρ et le champ de vecteurs $\vec{F}$. On peut en effet poser, pour tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$:

$$\alpha(\vec{V}) = \iiint_A \vec{F}(x) \cdot \vec{V}(x)\, \rho(x)\, d^3x$$

Un calcul analogue à celui fait dans le paragraphe précédent, permet de déterminer les éléments de réduction $(\vec{R}, \vec{M}(P))_P$ de α en un point quelconque $P \in \mathcal{E}$ (il suffit de remplacer la somme finie $\sum_{i=1}^{p}$ par l'intégrale) :

$$\vec{R} = \iiint_A \vec{F}(x)\, \rho(x)\, d^3x$$

$$\vec{M}(P) = \iiint_A \vec{Px} \wedge \vec{F}(x)\, \rho(x)\, d^3x \ .$$

c) Torseur défini par une densité superficielle et un champ de vecteurs.

A est maintenant une surface de $\mathcal{E}$, qu'on suppose suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux) , ρ_S une fonction suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) définie sur A , et $\vec{F}$ un champ de vecteurs (supposé, par exemple, continu par morceaux) défini sur A . Ces données déterminent un torseur α (sous réserve de conditions d'intégrabilité, satisfaites si A , ρ et $\vec{F}$, ainsi que la surface totale de A sont bornés), exactement comme dans le cas précédent, les intégrales ~~triples~~ étant remplacées par des intégrales de surface sur A : pour tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ on a :

$$\alpha(\vec{V}) = \iint_A \vec{F}(x) \cdot \vec{V}(x)\, \rho_S(x)\, d^2\sigma(x)$$

et les éléments de réduction de α en un point P quelconque de $\mathscr{E}$ sont :

$$\vec{R} = \iint_A \vec{F}(x)\ \rho_S(x)\ d^2\sigma(x)$$

$$\vec{M}(P) = \iint_A \vec{Px} \wedge \vec{F}(x)\ \rho_S(x)\ d^2\sigma(x)$$

d) <u>Torseur défini par une densité linéique et un champ de vecteurs</u>

A est maintenant une <u>courbe</u> de $\mathscr{E}$, suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux) , ρ_L une fonction définie sur A (par exemple continue par morceaux) et $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini sur A (par exemple continu par morceaux). Comme ci-dessus, sous réserve de conditions d'intégrabilité (satisfaites si ρ et F sont bornés, ainsi que la longueur totale de la courbe A) ces données définissent un torseur α . Les formules donnant $\alpha(\vec{V})$ pour un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ quelconque, ainsi que les éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{M}(P)$ de α en un point P quelconque de $\mathscr{E}$, sont les mêmes que ci-dessus, à ceci près que les intégrales sont maintenant des intégrales curvilignes sur la courbe A :

$$\alpha(\vec{V}) = \int_A \vec{F}(x) \cdot \vec{V}(x)\ \rho_L(x)\ ds(x)$$

$$\vec{R} = \int_A \vec{F}(x) \cdot \rho_L(x)\ ds(x)$$

$$\vec{M}(P) = \int_A \vec{Px} \wedge \vec{F}(x)\ \rho_S(x)\ ds(x)$$

e) <u>Torseur déterminé par une mesure réelle et un champ de vecteurs.</u>

Les quatre cas précédents, peuvent être considérés comme des cas particuliers du cas présent, où on se donne sur une partie A de $\mathscr{E}$ une <u>mesure réelle</u> m , et un champ de vecteurs $\vec{F}$ suffisamment régulier. La théorie de la mesure n'étant pas au programme nous n'insisterons pas sur les aspects théoriques relatifs à ce cas, mais nous en utiliserons, à l'occasion, les notations, car elles sont plus condensées et plus commodes que celles introduites précédemment. On devra simplement savoir ce que ces notations signifient, dans chacun des cas précédents.

Le cas a) est celui où A est un ensemble fini $\left\{ N_1, \dots N_p \right\}$ où la mesure m prend la valeur 1 sur chacune des parties de A contenant un seul point N_i, et où le champ de vecteurs $\vec{F}$ prend la valeur $\vec{F}_i$ au point N_i. Les cas b), c), d) sont ceux où la mesure m est déterminée par la donnée d'une densité soit volumique ρ, soit superficielle ρ_S, soit linéique ρ_L au sens indiqué paragraphe 3.2 .

On définit le torseur α en posant, pour tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$:

$$\alpha(\vec{V}) = \int_A \vec{F}(x) \cdot \vec{V}(x) \, d\, m(x)$$

l'intégrale désignant ici une intégrale sur A, <u>relativement à la mesure</u> m.

De même, les éléments de réduction du torseur α en un point P quelconque de $\mathcal{E}$ s'expriment par les intégrales (relativement à la mesure m)

$$\boxed{\vec{R} = \int_A \vec{F}(x) \, d\, m(x)}$$

$$\boxed{\vec{M}(P) = \int_A \vec{Px} \wedge \vec{F}(x) \, d\, m(x)}$$

<u>Remarque</u> Si λ est une fonction partout non nulle et si on remplace la mesure m par $\lambda\, m$ et, simultanément, le champ de vecteurs $\vec{F}$ par $\frac{\vec{F}}{\lambda}$, cela ne modifie pas le torseur défini. On peut dire que ce torseur ne dépend que du produit de la mesure m et du champ de vecteurs $\vec{F}$. Celui-ci est ce qu'on appelle une <u>mesure à valeurs vectorielles</u> (d'où le titre de ce paragraphe).