2 . 1 La description mathématique d'un corps physique en mouvement

Notre intuition sensible nous fait concevoir chaque corps A du monde physique, comme existant pendant un certain intervalle de temps (par exemple ouvert) $]T_1, T_2[$, et occupant, à chaque instant $T \in]T_1, T_2[$, une partie A_T de l'espace physique $\mathcal{E}_T$ ($A_T \subset \mathcal{E}_T$).

De plus, on considère généralement qu'il est possible de distinguer entre elles différentes parties du corps A, et de les reconnaître lors d'observations de ce corps faites à différentes époques T et $T' \in]T_1, T_2[$. Cette possibilité est plus ou moins évidente suivant la nature du corps. Considèrons un premier exemple, où le corps observé A est la Lune ; lors d'une première observation, un astronome n'a aucun mal à distinguer une partie du corps A, appelée par exemple cratère de Tycho, et à la reconnaître lors d'une autre observation faite des années plus tard. Considérons un second exemple, où le corps A est une masse d'eau en écoulement dans le lit d'une rivière. Un expérimentateur habile pourra, avec quelque difficulté, marquer une partie de cette masse d'eau, par exemple au moyen d'un colorant, et reconnaître la partie marquée à différents instants successifs.

Ceci étant admis on peut, par passage à la limite, considérer qu'il est possible de distinguer entre eux tous les points du corps A, et les reconnaître lors d'observations faites à différents instants. Ceci conduit au Principe :

Principe 3 Un corps physique, existant et en mouvement pendant un intervalle (par exemple ouvert) $]T_1, T_2[$ du temps $\mathcal{T}$, peut être schématisé par la donnée :

- d'un ensemble abstrait A (qui, en pratique, est une partie d'un espace affine euclidien de dimension 3, munie de la topologie induite).

- pour chaque $T \in]T_1, T_2[$, d'une bijection φ_T de A sur une partie A_T de l'espace $\mathcal{E}_T$.

Lorsque l'ensemble A comporte un seul élément M, on dit que le corps considéré est un point cinématique. Pour chaque instant $T \in]T_1, T_2[$, $M_T = \varphi_T(M) \in \mathcal{E}_T$ est appelé position du point cinématique M à l'instant T.

Lorsque A comporte plusieurs éléments, on dit que le corps considéré est constitué de plusieurs (voire une infinité) points cinématiques, et chaque point M de A est un des points cinématiques constituant le corps A.

On remarquera que l'ensemble abstrait A ne joue qu'un rôle conceptuel dans la description d'un corps physique en mouvement : les données les plus importantes sont celles, pour chaque $T \in]T_1, T_2[$, de la partie A_T de $\mathcal{E}_T$ et, pour chaque couple (T, T') d'éléments de $]T_1, T_2[$, de la bijection de A_T sur $A_{T'}$:

$$\psi_{T'T} = \varphi_{T'} \circ \varphi_T^{-1}$$

On remarque que les $\psi_{T'T}$ vérifient, si T, T', T'' sont trois éléments de $]T_1, T_2[$:

$$\psi_{T''T'} \circ \psi_{T'T} = \psi_{T''T} \quad ; \quad \psi_{TT} = \mathrm{Id}_{A_T}$$

Il est facile de vérifier que la donnée des A_T et des $\psi_{T'T}$, satisfaisant ces propriétés, permet de construire l'ensemble abstrait A et les bijections φ_T de A sur chaque A_T (par exemple en choisissant une valeur particulière T_0 de T, en identifiant A à A_{T_0} et φ_T à ψ_{TT_0}).

Supposons choisi un référentiel admissible $\mathcal{R}$, de domaine de temps $]T_1, T_2[$. L'espace - temps rapporté à ce référentiel, est alors un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. Dans ce référentiel, le mouvement d'un point cinématique M (qui peut être considéré comme constituant à lui seul un corps physique, ou comme étant un des points cinématiques d'un corps physique A), est décrit par la donnée, pour chaque $T \in]T_1, T_2[$, de sa <u>position</u> $M_T \in \mathcal{E}$. Autrement dit ce mouvement est décrit par une application, désignée aussi par M :

$$M : T \to M_T = M(T), \text{ de }]T_1, T_2[\text{ dans } \mathcal{E}$$

<u>Remarque</u> L'expérience montre que l'application $T \to M_T$ qui décrit, dans un référentiel admissible $\mathcal{R}$, le mouvement d'un point cinématique, est <u>toujours continue</u>. Dans la plupart des problèmes courants de Mécanique, cette application est même de classe C^1 et C^2 par morceaux (voir définition en fin du paragraphe 1.4), ou même de classe C^2. Dans certains problèmes (notamment ceux faisant intervenir des chocs), l'application $T \to M_T$ est seulement de classe C^1 par morceaux. Dans la suite, on supposera (sauf mention explicite du contraire) les mouvements considérés décrits par des applications de classe C^2. On remarquera que si cette propriété est vraie dans un certain référentiel admissible, elle est vraie dans tout autre référentiel admissible si, comme cela a été convenu au chapitre 1, on considère comme admissibles les changements de repère de classe C^2.

2 . 2 Vitesse et accélération d'un point cinématique

Considérons un point cinématique M , dont le mouvement, dans un référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par l'application désignée (avec un léger abus de notation) par M :

$$M : T \to M_T = M(T)$$

de $]T_1 , T_2[$ dans $\mathcal{E}$.

Définitions 1. On appelle vitesse du point cinématique M , à l'instant $T \in]T_1 , T_2[$, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée au point T de l'application $T \to M(T)$ de $]T_1 , T_2[$ dans $\mathcal{E}$.

2. On appelle accélération du point cinématique M , à l'instant $T \in]T_1 , T_2[$, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée seconde au point T de l'application $T \to M(T)$ de $]T_1 , T_2[$ dans $\mathcal{E}$.

Remarques 1. La vitesse (resp. l'accélération) du point cinématique M , relativement au référentiel $\mathcal{R}$, existe en tout instant T où l'application $T \to M(T)$ est dérivable (resp. deux fois dérivable). Si cette application est de classe C^2 , vitesse et accélération existent en tout instant T de $]T_1 , T_2[$, et sont des fonctions continues de T .

2. On rappelle (voir Annexe au présent chapitre), que la dérivée de $M : T \to M(T)$ au point T , est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$ des applications linéaires de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{T}}$ (associé à l'espace affine $\mathcal{T}$) dans l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ (associé à $\mathcal{E}$). De même, la dérivée seconde de cette application au point T est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}}))$ des applications linéaires de $\vec{\mathcal{T}}$ dans $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$.

Les définitions ci-dessus ont le mérite d'être intrinsèques : vitesse et accélération d'un point cinématique dépendent du choix d'un référentiel, mais non du choix d'un repère de l'espace - temps. Elles sont aussi indépendantes du choix d'une unité de temps. Toutefois, il est commode de représenter la vitesse et l'accélération d'un point cinématique, à l'instant T , par des vecteurs éléments de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ (associé à l'espace affine $\mathcal{E}$), qu'on considèrera comme attachés au point $M(T)$ représentant la position du point cinématique à cet instant. On évite ainsi d'avoir à considérer d'autres espaces vectoriels $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$ et $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}}))$. Mais une telle représentation de la vitesse et de l'accélération nécessite le choix d'une unité de temps, c'est à dire d'un vecteur $\vec{e}_0$ de $\vec{\mathcal{T}}$, considéré comme unitaire.

Supposons donc choisie une unité de temps $\vec{e}_0 \in \vec{\mathcal{T}}$, ainsi qu'une origine des temps $O_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$. A chaque instant $T \in]\, T_1 , T_2 \,[$ correspond alors un <u>nombre réel</u> t, date de T relativement au repère $(O_{\mathcal{T}} , \vec{e}_0)$ de $\mathcal{T}$. t variera dans l'intervalle $]\, t_1 , t_2 \,[$ de $\mathbb{R}$ (t_1 et t_2 désignant les dates des instants T_1 et T_2). Considérons alors un point cinématique dont le mouvement, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par l'application $T \to M(T)$ de $]\, T_1 , T_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$. En composant cette application avec celle, $t \to T$, qui à une date $t \in]\, t_1 , t_2 \,[$ associe l'instant correspondant $T \in]\, T_1 , T_2 \,[$, on peut définir une application désignée, par abus d'écriture, pour ne pas alourdir les notations, par :

$$t \to M(t) \quad , \quad \text{de }]\, t_1 , t_2 \,[\text{ dans } \mathcal{E}$$

que l'on utilisera désormais pour représenter le mouvement du point M. Cette application étant, maintenant, une fonction d'une <u>variable réelle</u> t, à valeurs dans un espace affine $\mathcal{E}$, on sait (voir Annexe), que ses dérivées première et seconde en un point $t \in]\, t_1 , t_2 \,[$ (et d'ailleurs de tous les ordres), lorsqu'elles existent, peuvent être considérés comme des éléments de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. De plus, ces dérivées dépendent du choix de $\vec{e}_0$, mais non de celui de l'origine des temps $O_{\mathcal{T}}$ (car modifier ce choix ne fait que modifier la définition des dates t par addition d'une constante). On peut donc définir :

<u>Définitions</u> On appelle <u>vecteur vitesse</u> (resp. <u>vecteur accélération</u>) du point cinématique M, à la date $t \in]\, t_1 , t_2 \,[$ (le temps étant rapporté au repère affine $(O_{\mathcal{T}} , \vec{e}_0)$), relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée (respectivement la dérivée seconde) au point t de l'application $t \to M(t)$ (qui, à une date t, associe la position du point à cette date) de $]\, t_1 , t_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$. Ce sont des vecteurs, éléments de $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$). Leur définition dépend des choix du référentiel $\mathcal{R}$ et de l'unité de temps $\vec{e}_0$, mais non du choix de l'origine des temps $O_{\mathcal{T}}$.

<u>Remarques</u> 1. On notera le vecteur vitesse de M à l'instant t :

$$\frac{\overrightarrow{d\,M(t)}}{dt} \quad , \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\dot{M}}(t)$$

et le vecteur accélération de M à l'instant t :

$$\frac{\overrightarrow{d^2\,M(t)}}{dt^2} \quad , \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\ddot{M}}(t)$$

2. Soient $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$, éléments de $\mathcal{E}$, les vecteurs vitesse et accélération d'un point cinématique M, à la date t, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, lorsque le vecteur unitaire de temps choisi est $\vec{e}_0$. Si, toutes choses restant inchangées par ailleurs, on modifie le choix de l'unité de temps le nouveau vecteur unitaire du temps étant $\vec{e}_0' = \lambda\,\vec{e}_0$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0)$, alors les vecteurs vitesse et accélération de M deviennent :

$$\vec{V}' = \lambda\,\vec{V} \qquad\qquad \vec{\Gamma}' = \lambda^2\,\vec{V}$$

2 . 3 Etude du mouvement d'un point cinématique. Exemples.

Soit un point cinématique M dont le mouvement, relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par une application $T \to M(T)$ de l'intervalle $]\,T_1\,,\,T_2\,[\ \subset \mathcal{T}$, dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

Choisissons un repère $\hat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps (ayant $\mathcal{R}$ pour référentiel associé) en prenant une origine $O_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ (déjà muni par convention du vecteur unitaire $\vec{e}_0$) et un repère affine $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$. Le mouvement de est alors décrit par l'application $t \to M(t)$ (où t désigne la date de l'instant T). On écrira :

$$(1) \qquad \begin{cases} M(t) = O_{\mathcal{E}} + x_1(t)\,\vec{e}_1 + x_2(t)\,\vec{e}_2 + x_3(t)\,\vec{e}_3 \quad , \text{ ou :} \\ \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M(t)} = x_1(t)\,\vec{e}_1 + x_2(t)\,\vec{e}_2 + x_3(t)\,\vec{e}_3 \end{cases}$$

On voit donc que le mouvement est décrit par les trois fonctions réelles $x_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ de la variable réelle t, qui sont les valeurs à l'instant de date t des composantes de $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M(t)}$. Si ces fonctions sont dérivables (resp. deux fois dérivables) au point $t \in\ ]\,t_1\,,\,t_2\,[$, on peut définir le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ (resp. le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$) :

$$(2) \qquad \vec{V}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{M(t)}}{d\,t} = \frac{d\,x_1(t)}{d\,t}\,\vec{e}_1 + \frac{d\,x_2(t)}{d\,t}\,\vec{e}_2 + \frac{d\,x_3(t)}{d\,t}\,\vec{e}_3$$

$$(3) \qquad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2\,\overrightarrow{M(t)}}{d\,t^2} = \frac{d^2x_1(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_1 + \frac{d^2x_2(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_2 + \frac{d^2x_3(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_3$$

Signalons que ces formules restent vraies lorsque la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ n'est pas nécessairement orthonormée.

Dans de nombreux exemples pratiques, la position $M(t)$ du point cinématique M, est déterminée par la donnée :

- de cette position $M(q_1, \dots q_n)$ comme une fonction d'un certain nombre de paramètres réels $q_1, \dots q_n$, variant chacun dans un certain intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($(q_1, \dots q_n)$ varie donc dans un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, produit d'intervalles ouverts).

- de la valeur $q_1(t)$, $q_2(t)$, ... $q_n(t)$ de ces paramètres, en fonction de la date t.

Grâce à la propriété de dérivation des applications composées, il est facile de vérifier que si les applications $t \to q_i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$ sont dérivables en un point t de $]t_1, t_2[$, et si l'application $(q_1, \dots q_n) \to M(q_1, \dots q_n)$ est dérivable au point $(q_1(t), \dots q_n(t))$ de $\mathbb{R}^n$ (voir définition en Annexe), alors le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$(4) \qquad \vec{V}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\, q_i(t)}{dt} \frac{\partial \vec{M}(q_1(t), \dots q_n(t))}{\partial q_i}$$

On rappelle que le vecteur dérivée partielle $\dfrac{\partial \vec{M}(q_1, \dots q_n)}{\partial q_i}$ est (pour chaque i, $1 \leq i \leq n$) :

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1, \dots q_n) = \frac{\partial x_1(q_1 \dots q_n)}{\partial q_i} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2(q_1 \dots q_n)}{\partial q_i} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3(q_1 \dots q_n)}{\partial q_i} \vec{e}_3$$

En dérivant une seconde fois l'expression (4), on voit de même que si les applications $t \to q_i(t)$ et $(q_1, \dots q_n) \mapsto M(q_1, \dots q_n)$ sont dérivables deux fois, respectivement aux points $t \in]t_1, t_2[$ et $(q_1(t), \dots q_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est donné par :

$$(6) \quad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1(t), \dots q_n(t)) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} \frac{d\, q_j(t)}{d\, t} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i\, \partial q_j}(q_1(t), \dots q_n(t))$$

<u>Remarque Formule de Lagrange</u> On peut considérer la formule (4) comme exprimant $\vec{V}(t)$ en fonction de $2n$ paramètres réels $q_1, \dots q_n$, $\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$, eux-mêmes fonctions de t, les n derniers $\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ prenant à la date t les valeurs $\dot{q}_i(t) = \dfrac{d\, q_i(t)}{dt}$ $(1 \leq i \leq n)$.

On peut alors écrire :

$$(7) \quad \boxed{\vec{V}\,(q_1, \dots q_n\,,\ \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \,\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q_1, \dots q_n)}$$

Donc si, pour le calcul des dérivées partielles de $\vec{V}$, on considère les 2n paramètres réels $q_1, \dots q_n\,,\ \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ comme indépendants, on peut écrire, en supposant la fonction $(q_1, \dots q_n) \to M\,(q_1, \dots q_n)$ deux fois dérivable :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}(q_1, \dots q_n\,,\ \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q_1, \dots q_n)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_j}\,(q_1, \dots q_n\,,\ \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \,\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i\ \partial q_j}\,(q_1, \dots q_n)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}(q_1(t), \dots q_n(t))\right]$$

Dans cette dernière expression, le symbole $\frac{d}{dt}$ précédant la fonction $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ $(q_1(t), \dots q_n(t))$ désigne ce qu'on appelle parfois dérivée totale par rapport à t, c'est à dire la dérivée de la fonction composée de : $t \to (q_1(t), \dots q_n(t))$, et de $(q_1, \dots q_n) \to \frac{\partial M}{\partial q_i}\,(q_1, \dots q_n)$. Cette convention sera systématiquement utilisée dans la suite.

On peut alors mettre sous une forme remarquable le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{\Gamma}(t)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q_1(t), \dots q_n(t))$ (pour chaque i , $1 \leqslant i \leqslant n$) .
En convenant d'écrire, pour allèger, q pour $(q_1, \dots q_n)$ et $\dot{q}$ pour $(\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)$, on a :

$$\vec{\Gamma}(t) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q(t)) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}\,(q(t), \dot{q}(t))\right] \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q(t))$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit scalaire, et en utilisant les expressions ci-dessus de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ et de $\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right)$:

$$\vec{\Gamma}(t) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q(t)) = \frac{d}{d\,t}\left[\vec{V}\,(q(t), \dot{q}(t)) . \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}\,(q(t), \dot{q}(t))\right]$$

$$- \vec{V}\,(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}\,(q(t), \dot{q}(t))$$

En remarquant que

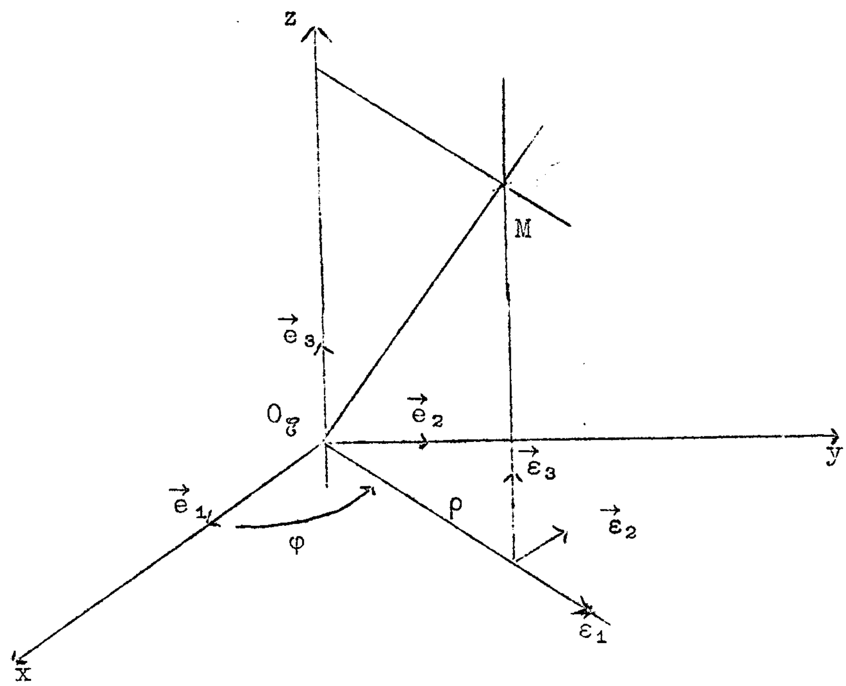
$$\vec{V}\,(q(t),\ \dot q(t))\ .\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot q_i}\,(q(t),\ \dot q(t)) = \frac{\partial}{\partial \dot q_i}\,(\frac{1}{2}\,V^2(q(t),\ \dot q(t))$$

$$\vec{V}\,(q(t),\ \dot q(t))\ .\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}\,(q(t),\ \dot q(t)) = \frac{\partial}{\partial q_i}\,(\frac{1}{2}\,V^2(q(t),\ \dot q(t))$$

($V^2 = \vec{V}\ .\ \vec{V}$ désignant le carré du module de $\vec{V}$), on obtient la <u>formule de Lagrange</u> :

$$(8)\quad \boxed{2\vec{\Gamma}(t)\ .\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\,(q(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\,(V^2(q(t),\ \dot q(t))\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\,(V^2(q(t),\ \dot q(t)))}$$

<u>Exemple 1 vitesse et accélération en coordonnées cylindriques</u>



Les paramètres q_i, ici au nombre de 3, sont les coordonnées semi polaires (ρ, φ, z) (voir figure). Outre la base ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) de $\vec{\mathcal{E}}$, on utilise la base orthonormée ($\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$) où $\vec{\varepsilon}_1$ est parallèle à la projection de $\vec{OM}$ sur le plan déterminé par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, et de même sens, $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_3$, et $\vec{\varepsilon}_2$ normal à $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_3$, les deux bases ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) et ($\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$) étant de même sens. On a :

$$\overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M} = \rho\,\vec{\varepsilon}_1 + z\,\vec{\varepsilon}_3$$

Pour calculer la vitesse et l'accélération, on considère ρ, φ et z comme des fonctions données, 2 fois dérivables, de la variable t. On doit aussi tenir compte du fait que, alors que $\vec{\varepsilon}_3$ est constant, $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ sont fonction de φ, puisque :

$$(9)\quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_2 = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial \varphi} = \vec{\varepsilon}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial \varphi} = - \vec{\varepsilon}_1 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial \rho} = 0$$

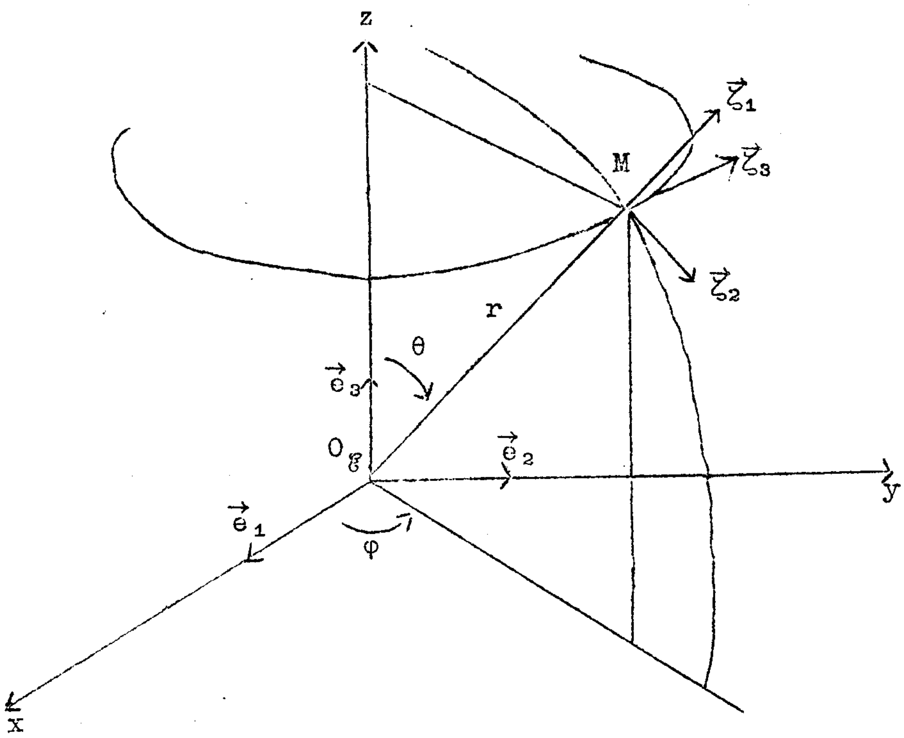
On obtient alors sans difficulté :

$$(10) \quad \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{\varepsilon}_1 + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{\varepsilon}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{\varepsilon}_3$$

$$(11) \quad \vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{\varepsilon}_1 + \left[\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\vec{\varepsilon}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{\varepsilon}_3$$

Bien entendu, en utilisant (9) , il est facile d'en déduire les composantes de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Exemple 2 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques



Les paramètres q_i sont ici les coordonnées sphériques r (distance à l'origine) θ (colatitude) et φ (longitude). (Voir Figure). Outre la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathscr{E}}$, on utilise la base orthonormée $(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_3)$ où $\vec{\zeta}_1$ est parallèle à $\vec{OM}$ et de même sens, $\vec{\zeta}_2$ tangent au cercle méridien au point M et dirigé vers le pôle sud,

et $\vec{\zeta}_3$ tangent au cercle parallèle au point M. On a :

$$\overrightarrow{O_{\mathscr{E}} M} = r\,\vec{\zeta}_1$$

Les vecteurs $\vec{\zeta}_1$, $\vec{\zeta}_2$, $\vec{\zeta}_3$ s'expriment par :

$$
(12)\quad \begin{cases}
\vec{\zeta}_1 = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3 \\
\vec{\zeta}_2 = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_3 \\
\vec{\zeta}_3 = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2
\end{cases}
$$

d'où les dérivées partielles de $\vec{\zeta}_1$:

$$
\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{\zeta}_1}{\partial\theta} = \vec{\zeta}_2 \quad ; \quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{\zeta}_3
$$

On en déduit l'expression du vecteur vitesse :

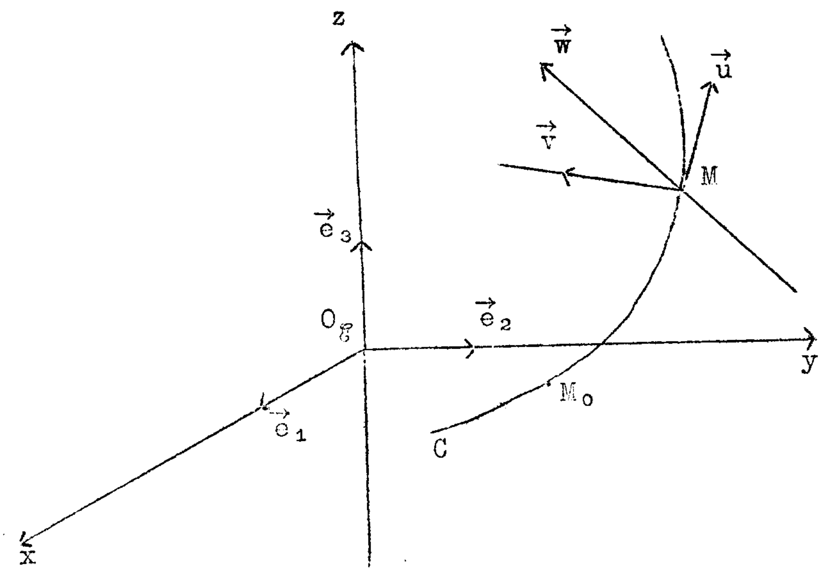
$$
(13)\quad \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{d\,t} = \frac{d\,r}{d\,t}\vec{\zeta}_1 + r\left(\frac{d\,r}{d\,t}\,\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial r} + \frac{d\,\theta}{d\,t}\,\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial\theta} + \frac{d\,\varphi}{d\,t}\,\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial\varphi}\right)
$$

$$
= \frac{d\,r}{d\,t}\vec{\zeta}_1 + r\,\frac{d\,\theta}{d\,t}\vec{\zeta}_2 + r\sin\theta\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}\vec{\zeta}_3
$$

Le calcul du vecteur accélération, qui se fait de la même manière (et nécessite le calcul des dérivées partielles de $\vec{\zeta}_2$ et $\vec{\zeta}_3$) est laissé en exercice. On pourra également utiliser la formule de Lagrange (8).

Exemple 3 Point mobile sur une courbe

Il arrive dans les applications qu'on sache à l'avance que le mouvement du point cinématique étudié se fait sur une courbe C, déterminée, dans le repère choisi, par la donnée des composantes de $\vec{OM}$ en fonction d'un paramètre réel q. Il est souvent commode de prendre pour paramètre q, l'abscisse curviligne s (mesurée sur la courbe C à partir d'une origine M_0, et après le choix d'un sens positif sur C).



On supposera la fonction $s \to M(s)$ de classe C^2. On pose :

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} = \vec{u}(s)$$

$$\frac{d^2\vec{M}(s)}{ds^2} = \frac{1}{R(s)}\vec{v}(s)$$

Le vecteur $\vec{u}(s)$ est tangent à la courbe C au point $M(s)$, et unitaire. Cela résulte de la définition même de l'abscisse curviligne. Si $\frac{d^2 M(s)}{dt^2} \neq 0$, on définit $R(s) > 0$ et $\vec{v}(s)$, de telle sorte que le vecteur $\vec{v}(s)$ soit unitaire. Ce vecteur est normal à $\vec{u}(s)$, comme on le voit en dérivant l'expression

$$\vec{u}(s) \cdot \vec{u}(s) = 1$$

$$\frac{d\vec{u}(s)}{ds} \cdot \vec{u}(s) = \frac{1}{R(s)}\vec{v}(s) \cdot \vec{u}(s) = 0$$

$R(s)$ est appelé rayon de courbure, et $\frac{1}{R(s)}$ courbure, de la courbe C au point $M(s)$. La droite passant par $M(s)$ et parallèle à $\vec{v}(s)$ est dite normale principale à la courbe C au point $M(s)$. On prend enfin le vecteur $\vec{w}(s)$ tel que $(\vec{u}(s), \vec{v}(s), \vec{w}(s))$ soit un repère orthonormé de $\vec{\mathcal{E}}$, de même sens que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. $(M(s), \vec{u}(s), \vec{v}(s), \vec{w}(s))$ est appelé repère de Frenet au point $M(s)$.

Lorsque $\frac{d^2\vec{M}(s)}{ds^2} = 0$, on convient que $\frac{1}{R(s)} = 0$ et on choisit $\vec{v}(s)$ unitaire normal à $\vec{u}(s)$, généralement par continuité (ce qui n'est pas toujours possible).

Le mouvement du point M étant défini par la donnée de son abscisse curviligne s en fonction de la date t, on obtient facilement les expressions des vecteurs vitesse et accélération, dans la <u>base de Frenet</u> :

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{M(s(t))} = \frac{d\,s(t)}{dt}\vec{u}(s) \quad , \text{ donc}$$

$$|V(t)| = \left|\frac{d\,s(t)}{dt}\right|$$

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}\vec{u}(s(t)) + \frac{V^2(t)}{R(s(t))}\vec{v}(s(t))$$

Remarque Lorsque la courbe C est plane on choisit généralement le repère de sorte qu'elle soit contenue dans le plan $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On n'impose plus dans ce cas à $\frac{1}{R(s)}$ d'être nécessairement $\geqslant 0$: on choisit le sens du vecteur $\vec{v}(s_0)$ en un point $M(s_0)$ de C et on détermine $\vec{v}(s)$ aux points voisins par continuité, $\frac{1}{R(s)}$ pouvant alors prendre des valeurs positives ou négatives.

2 . 4 Mouvement d'un milieu continu

Soit A un corps physique dont on étudie le mouvement pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$, $\mathcal{R}$ un référentiel de l'espace - temps, de domaine de temps $]T_1, T_2[$. Pour tout instant $T \in]T_1, T_2[$, la position $A_T \subset \mathcal{E}_T$ du corps, peut être considérée comme une partie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ (puisque le choix du référentiel $\mathcal{R}$ implique qu'on identifie tous les $\mathcal{E}_T$ à un même espace affine euclidien $\mathcal{E}$). La bijection $\varphi_T : A \to A_T$ qui, à tout point cinématique M du corps A fait correspondre sa position $M(T)$ à l'instant T, est donc à valeurs dans $\mathcal{E}$. On peut par conséquent définir une application φ de $]T_1, T_2[\times A$ dans $\mathcal{E}$, par :

$$\varphi(T, M) = \varphi_T(M) = M(T)$$

On connaît déjà certaines propriétés de cette application : pour tout $T \in]T_1, T_2[$ fixé, l'application partielle $M \to \varphi(T, M)$ est une bijection de A sur $A_T \subset \mathcal{E}$; d'autre part (paragraphe 2.2) pour tout $M \in A$ fixé, l'application $T \to \varphi(T, M)$ de $]T_1, T_2[$ dans $\mathcal{E}$, est continue, et même en général de classe C^2. Pour certains corps physiques particuliers, notamment les milieux continus, cette application possède des propriétés de régularité supplémentaires (dans la définition suivante A est considéré comme une partie d'un espace affine euclidien de dimension 3, munie de la topologie induite) :

Définition. On dit que le corps physique A est un milieu continu si l'application $\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$, est continue (par rapport au couple de variables $(T, M) \in]T_1, T_2[\times A$).

De nombreux corps physiques rencontrés en pratique peuvent être considérés comme des milieux continus. Certains cas toutefois échappent à cette description, comme celui d'un jet de liquide qui se brise en gouttelettes isolées.

On suppose souvent l'application φ , non seulement continue, mais de classe C^2 (toujours par rapport au couple de variables (T, M). On peut alors définir diverses notions classiques de la cinématique des milieux continus, telles que celle de tenseur des vitesses de déformation, qui seront enseignées dans les cours de Mécanique des milieux continus.

2 . 5 Mouvement d'un corps rigide

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent, l'application $\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$ décrivant, relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, le mouvement d'un milieu continu A .

Définition On dit que A est un corps rigide (ou un solide parfait) si, quels que soient les points cinématiques M_1 et M_2 de A , la distance de leurs positions $M_1(T)$ et $M_2(T)$ à tout instant $T \in]T_1, T_2[$, est indépendante de T .

On supposera dans la suite que le corps A comporte au moins trois points cinématiques non alignés M_0 , M_1 et M_2 . (Cela a un sens car si, à un instant T particulier, $M_0(T)$, $M_1(T)$ et $M_2(T)$ ne sont pas alignés, il en est de même à tout autre instant élément de $]T_1, T_2[$). La donnée, à un instant T , des positions $M_0(T)$, $M_1(T)$, $M_2(T)$ de ces trois points cinématiques, suffit pour déterminer la position à l'instant T de tout autre point cinématique du corps rigide. On peut en effet construire un repère unique d'origine $M_0(T)$, ayant pour deux premiers vecteurs de base $\overrightarrow{M_0(T) M_1(T)}$ et $\overrightarrow{M_0(T) M_2(T)}$, le troisième $\overrightarrow{M_0(T) M_3(T)}$ étant pris, par exemple, unitaire, normal aux deux premiers et de sens tel que la base de $\vec{\mathcal{E}}$ ainsi construite soit directe. La position de tout point cinématique M du corps A est alors définie par ses coordonnées dans ce repère. On voit que les coordonnées de la position $M(T)$ de tout point cinématique M du corps A , dans le repère ainsi construit, sont indépendantes de T . On dit que ce repère est lié au corps rigide A .

Il est alors possible de considérer, au moins conceptuellement, le corps rigide A comme s'étendant à l'infini dans toutes les directions, ce qui signifie que sa position A_T à chaque instant T , est en fait l'espace $\mathcal{E}$ tout entier. On peut en effet repérer, à chaque instant, la position d'un point de $\mathcal{E}$ relativement au repère lié au solide A , et étudier son mouvement comme si ce point faisait partie de A . On définit ainsi un point cinématique, dit cinématiquement lié à A . Ainsi, par exemple, l'extrémité M_3 du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_3}$ ci-dessus défini, est un point cinématique, cinématiquement lié au corps A .

En remplaçant, si nécessaire, les points cinématiques M_0, M_1, M_2, M_3 par d'autres points cinématiquement liés au corps A, qu'on désignera toujours par les mêmes lettres pour ne pas embrouiller inutilement les notations, on peut supposer qu'à chaque instant T, les vecteurs :

$$\vec{\varepsilon}_1 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_1 (T)} \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_2 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_2 (T)} \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_3 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_3 (T)}$$

forment une base orthonormée de $\mathcal{E}$. On voit, par continuité, que les bases $(\vec{\varepsilon}_1 (T), \vec{\varepsilon}_2 (T), \vec{\varepsilon}_3 (T))$ correspondant à différentes valeurs de $T \in \,]T_1, T_2[$, sont toutes de même sens, et on peut, par un choix convenable de points cinématiques définissant le repère, faire en sorte qu'elles soient de sens positif (en supposant $\mathcal{E}$ orienté).

D'autre part, soit $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère affine orthonormé fixe de $\mathcal{E}$, de sens positif (obtenu par exemple, <u>mais pas obligatoirement</u>, en choisissant un instant $T_0 \in \,]T_1, T_2[$ et en prenant $O_{\mathcal{E}} = M_0 (T_0)$, $\vec{e}_1 = \vec{\varepsilon}_1 (T_0)$, $\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2 (T_0)$, $\vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_3 (T_0)$).

On a alors un repère affine orthonormé de sens positif fixe de $\mathcal{E}$, $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et, pour tout instant $T \in \,]T_1, T_2[$, un autre repère (dit lié au corps rigide en mouvement) $(M_0 (T), \vec{\varepsilon}_1 (T), \vec{\varepsilon}_2 (T), \vec{\varepsilon}_3 (T))$. Les positions relatives de ces deux repères sont décrites par les formules du paragraphe 1.4 :

$$(2.5.1) \quad \begin{cases} M_0 (T) = O_{\mathcal{E}} + A_1 (T) \vec{e}_1 + A_2 (T) \vec{e}_2 + A_3 (T) \vec{e}_3 \\ \\ \vec{\varepsilon}_i (T) = B_{1i} (T) \vec{e}_1 + B_{2i} (T) \vec{e}_2 + B_{3i} (T) \vec{e}_3 \qquad (1 \leq i \leq 3) \end{cases}$$

La donnée, en fonction de $T \in \,]T_1, T_2[$, des trois composantes $A_i (T)$ $(1 \leq i \leq 3)$ du vecteur $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M_0 (T)}$, et des coefficients de la matrice orthogonale $B (T) = (B_{ij} (T))$, détermine complètement la position du corps rigide. Soit par exemple un point cinématique M du corps rigide ayant, dans le repère lié au corps rigide, les coordonnées (a_1, a_2, a_3). Cela signifie que pour tout $T \in \,]T_1, T_2[$, la position $M (T)$ de M est :

$$(2.5.2) \qquad M (T) = M_0 (T) + a_1 \vec{\varepsilon}_1 (T) + a_2 \vec{\varepsilon}_2 (T) + a_3 \vec{\varepsilon}_3 (T)$$

Alors les coordonnées $(x_1 (T), x_2 (T), x_3 (T))$ de $M (T)$ dans le repère fixe $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont :

$$(2.5.3) \qquad x_i (T) = A_i (T) + B_{i1} (T) a_1 + B_{i2} (T) a_2 + B_{i3} (T) a_3 \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$(2.5.4) \quad x\ (T) = A\ (T) + B\ (T)\ a$$

où $x\ (T)$, $A\ (T)$ et a désignent les vecteurs colonnes :

$$(2.5.5) \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_1\ (T) \\ x_2\ (T) \\ x_3\ (T) \end{pmatrix} \quad ; \quad A\ (T) = \begin{pmatrix} A_1\ (T) \\ A_2\ (T) \\ A_3\ (T) \end{pmatrix} \quad ; \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

et $B\ (T)$ la matrice 3×3 :

$$(2.5.6) \quad B\ (T) = (B_{ij}\ (T)) = \begin{pmatrix} B_{11}\ (T) & B_{12}\ (T) & B_{13}\ (T) \\ B_{21}\ (T) & B_{22}\ (T) & B_{23}\ (T) \\ B_{31}\ (T) & B_{32}\ (T) & B_{33}\ (T) \end{pmatrix}$$

Remarque 1 Pour définir un mouvement d'un corps rigide, une fois choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps et un repère affine orthonormé $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$, on peut d'après ce qui précède, se donner en fonction de $T \in \,]\, T_1, T_2\, [$, les trois composantes $A_i\ (T)$ $(1 \leq i \leq 3)$ de $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M_0}\ (T)$, et les neuf composantes $B_{ij}\ (T)$ de la matrice B. Mais alors que les trois $A_i\ (T)$ peuvent être choisis arbitrairement (sous la seule réserve d'être assez réguliers, par exemple de classe C^2), les $B_{ij}\ (T)$ ne peuvent pas être tous choisis indépendamment, car la matrice $B\ (T)$ doit être orthogonale et de déterminant $+ 1$. On verra plus loin qu'en fait les neuf $B_{ij}\ (T)$ dépendent de trois paramètres scalaires seulement.

Remarque 2 On peut donner aux formules (2.5.3), qui expriment en fonction de T les coordonnées d'un point cinématiquement lié au corps rigide, une signification géométrique plus intrinsèque. Pour cela, désignons par :

- $\mathfrak{B}(T)$ l'application linéaire de $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$) dans lui-même, qui applique $\vec{e}_1$ sur $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{e}_2$ sur $\vec{\varepsilon}_2$ et $\vec{e}_3$ sur $\vec{\varepsilon}_3$, ce qui suffit à la définir ;

- $\vec{a}$ le vecteur, élément de $\vec{\mathcal{E}}$:

On remarque que l'application linéaire $\mathcal{B}(T)$ n'est pas quelconque, puisqu'elle transforme une base orthonormée positive en une autre base orthonormée positive. On dit que $\mathcal{B}(T)$ est une application linéaire orthogonale positive de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même. Une telle application est nécessairement inversible, et s'exprime dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ par une matrice orthogonale $B\ (T)$ de déterminant + 1 .

On peut alors interpréter (2.5.2) comme exprimant :

$$\overrightarrow{M_0\ (T)\ M\ (T)} = a_1\ \overrightarrow{\varepsilon_1\ (T)} + a_2\ \overrightarrow{\varepsilon_2\ (T)} + a_3\ \overrightarrow{\varepsilon_3\ (T)}$$

$$= \mathcal{B}(T)\ (\vec{a})$$

d'autre part on a :

$$\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\ M\ (T)} = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\ M_0\ (T)} + \overrightarrow{M_0\ (T)\ M\ (T)}$$

de sorte que la formule (2.5.3) exprime l'égalité vectorielle :

$$(2.5.8) \qquad \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\ M\ (T)} = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\ M_0\ (T)} + \mathcal{B}(T)\ (\vec{a})$$

Le mouvement du corps rigide est donc défini par la donnée, en fonction de $T \in \ ]\ T_1, T_2\ [$:

- d'un vecteur $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\ M_0\ (T)}$ de $\vec{\mathcal{E}}$, ou (ce qui revient au même, mais à l'avantage de ne pas dépendre du choix de $O_{\mathcal{E}}$), d'un point $M_0\ (T)$ de l'espace affine $\mathcal{E}$.

- d'une application linéaire orthogonale positive $\mathcal{B}(T)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même.

La position à l'instant T d'un point cinématiquement lié au corps mobile (défini par la donnée de $\vec{a}$) est alors donnée par (2.5.8).

Le vecteur $\vec{a}$ admet une interprétation simple lorsque le choix du repère affine orthonormé fixe $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$ est fait en considérant un instant particulier $T_0 \in \ ]\ T_1, T_2\ [$, et en prenant $O_{\mathcal{E}} = M_0\ (T_0)$, $\vec{e}_1 = \vec{\varepsilon}_1\ (T_0)$, $\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2\ (T_0)$, $\vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_3\ (T_0)$. Dans ce cas on a simplement (d'après 2.5.2 et 2.5.7) :

$$(2.5.9) \qquad \vec{a} = \overrightarrow{M_0\ (T_0)\ M\ (T_0)}$$

Définir un point cinématiquement lié au corps rigide par la donnée du vecteur $\vec{a}$ consiste donc à définir ce point cinématique par la donnée de sa position M (T_0) à l'instant T_0 .

La formule (2.5.8) exprime, dans ce cas, la transformation affine de $\mathcal{E}$ qui fait correspondre, à la position M (T_0) occupée, à l'instant T_0 , par un point cinématique du corps rigide, la position M (T) de ce même point à l'instant T . On peut l'écrire :

$$(2.5.10) \qquad M(T) = M_0(T) + \mathcal{B}(T) \quad (\overrightarrow{M_0(T_0)\, M(T_0)})$$

On remarquera que cette transformation affine est en fait une isométrie respectant l'orientation.

2 . 6 Le champ des vitesses d'un corps rigide

On conserve les hypothèses et les notations du paragraphe précédent. De plus, on choisit un repère affine $(0_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ du temps $\mathcal{T}$ ($\vec{e}_0$ étant d'ailleurs déjà donné, par convention). En considérant tout instant $T \in \,]T_1, T_2[$ comme fonction de sa date $t \in \,]t_1, t_2[$, on peut exprimer les quantités $A_i(T)$ et $B_{ij}(T)$ qui décrivent le mouvement du corps rigide, comme des fonctions de la variable réelle t, (qu'on désignera par les mêmes lettres pour ne pas alourdir les notations). L'expression (2.5.3) des coordonnées d'un point cinématiquement lié au corps rigide devient $(1 \leq i \leq 3)$:

$$(2.6.1) \qquad x_i(t) = A_i(t) + B_{i1}(t)\, a_1 + B_{i2}(t)\, a_2 + B_{i3}(t)\, a_3$$

ou, sous forme matricielle

$$(2.6.2) \qquad x(t) = A(t) + B(t)\, a$$

De même (2.5.8) , qui exprime la même relation, sous une forme plus intrinsèque, devient :

$$(2.6.3) \qquad 0_{\mathcal{E}}\overrightarrow{M}(t) = 0_{\mathcal{E}}\overrightarrow{M_0}(t) + \mathcal{B}(t)\,(\vec{a})$$

En dérivant ces relations par rapport à t , on obtient l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_M(t)$ du point cinématique M , à la date t :

$$(2.6.4) \qquad v_i(t) = \frac{d\,A_i(t)}{d\,t} + \frac{d\,B_{i1}(t)}{d\,t}\, a_1 + \frac{d\,B_{i2}(t)}{d\,t}\, a_2 + \frac{d\,B_{i3}(t)}{d\,t}\, a_3$$

($v_i(t)$, $1 \leq i \leq 3$, désignant les composantes de $\vec{V}_M(t)$. Sous forme matricielle :

$$(2.6.5) \qquad V(t) = \frac{d\,A(t)}{d\,t} + B(t)\,a$$

ou encore, sous forme intrinsèque :

$$\overrightarrow{V_M}(t) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M}(t)) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M_0}(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{a})$$

En remarquant que $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M_0}(t))$ n'est autre que le vecteur vitesse $\vec{V}_{M_0}(t)$ du point cinématique M_0 :

$$(2.6.6) \qquad \overrightarrow{V_M}(t) = \overrightarrow{V_{M_0}}(t) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{a})$$

A la date $t \in\,]t_1, t_2[$ fixée, on a donc pour chaque point cinématique M du corps rigide, un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}(t)$. On peut considérer $\overrightarrow{V_M}(t)$ comme dépendant de la position $M(t)$ du point cinématique M , à la datet.On voit ainsi que l'ensemble des vecteurs vitesses de tous les points cinématiques du corps rigide, à la date t , est un <u>champ de vecteurs</u> défini sur l'espace affine $\mathcal{E}$ entier. On rappelle en effet la définition :

<u>Définition</u> Soit A une partie (en général ouverte)d'un espace affine $\mathcal{E}$. On appelle <u>champ de vecteurs</u> défini sur A une application $P \to \vec{V}(P)$ de A dans l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. $\vec{V}(P)$ est appelé valeur du champ de vecteurs considéré, au point $P \in A$.

En fait, on a dans le cas présent un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{E}$ entier, pour chaque $t \in\,]t_1, t_2[$, c'est à dire une application $(t, P) \to \vec{V}(t, P)$ de $]t_1, t_2[\times \mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$. On dit dans ce cas qu'on a un champ de vecteurs <u>dépendant de t</u> . Afin de mieux mettre en évidence l'expression de ce champ, on doit exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}(t)$ du point cinématique M à la date t non plus, comme dans (2.6.6) , en fonction du vecteur $\vec{a}$, mais en fonction de la position $M(t)$ de M à la date t . On écrira $\vec{V}(t, M(t))$ au lieu de $\overrightarrow{V_M}(t)$ pour bien faire ressortir qu'il s'agit de la valeur, à la date t et au point $M(t)$ de $\mathcal{E}$, d'un champ de vecteurs dépendant de t . Pour obtenir l'expression cherchée il suffit de remarquer qu'on a, d'après (2.6.3) :

$$\overrightarrow{M_0(t)\,M}(t) = \mathcal{B}(t)\,\vec{a}$$

d'où, puisque $\mathcal{B}(t)$ est une application linéaire inversible de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même :

$$\vec{a} = \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)}\right)$$

et en remplaçant $\vec{a}$ par cette expression dans (2.6.6) :

$$\vec{V}(t, M(t)) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)}\right)$$

Mais ceci est vrai pour tout choix du point cinématique M. Soit P un point quelconque de $\mathcal{E}$. Choisissons M de telle sorte que sa position à la date t soit $M(t) = P$. Nous avons :

$$\vec{V}(t, P) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,P}\right)$$

et de même, si Q est un autre point quelconque de $\mathcal{E}$:

$$\vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,Q}\right)$$

En retranchant la dernière expression de la précédente on voit que le champ de vecteurs $\vec{V}$ du corps rigide à l'instant t vérifie, quels que soient P et $Q \in \mathcal{E}$:

$$(2.6.7) \qquad \vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, P) + \Phi(t)\,(\overrightarrow{PQ})$$

où on a posé :

$$(2.6.8) \qquad \Phi(t) = \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1}$$

$\Phi(t)$, composée de deux applications linéaires, est une application linéaire d $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même. On va voir que, du fait que $\mathcal{B}(t)$ est orthogonale pour tout t, $\Phi(t)$ n'est pas quelconque.

<u>Lemme</u> Pour tout couple $\vec{v}$ et $\vec{w}$ d'éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, $\Phi(t)$ vérifie .

$$(2.6.9) \qquad (\Phi(t)\,(\vec{v}))\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,(\Phi(t)\,(\vec{w})) = 0$$

Une telle application linéaire d'un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-mêm est dite <u>antisymétrique</u>.

Démonstration $\mathcal{B}(t)$ étant une application linéaire orthogonale, conserve le produit scalaire, ce qui signifie que si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$(\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_1)) \,.\, (\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_2)) = \vec{u}_1 \,.\, \vec{u}_2$$

donc, le second membre ne dépendant pas de t :

$$\frac{d}{d\,t}\left[(\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_1)) \,.\, (\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_2)) \right] = 0$$

Mais on vérifie facilement, si on ne le sait pas déjà, qu'un produit scalaire de deux fonctions de t à valeurs vectorielles, se dérive comme un produit usuel de deux fonctions. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\left[(\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_1)) \,.\, (\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_2)) \right] &= \left(\frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{u}_1) \right) . \left(\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_2)\right) \\ &\quad + \left(\mathcal{B}(t)\,(\vec{u}_1)\right) . \left(\frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}\,(\vec{u}_2)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et $\mathcal{B}(t)$ étant inversible, on peut prendre $\vec{u}_1 = \mathcal{B}(t)^{-1}\,(\vec{v})$, $\vec{u}_2 = \mathcal{B}(t)^{-1}\,(\vec{w})$ et on obtient (compte tenu de la définition de $\Phi\,(t)$ (2.6.8) :

$$(\Phi\,(t)\,(\vec{v}))\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,(\Phi\,(t)\,(\vec{w})) = 0$$

Or on sait (voir Annexe au présent chapitre) qu'un champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$ vérifiant (2.6.7) , avec $\Phi\,(t)$ antisymétrique, est un champ de vecteurs affine antisymétrique, ou ce qui est équivalent, un <u>champ de vecteurs équiprojectif</u>, c'est à dire vérifiant :

(2.6.10) $\boxed{\vec{V}\,(t,\,P)\,.\,\vec{PQ} = \vec{V}\,(t,\,Q)\,.\,\vec{PQ}}$ pour tous P et $Q \in \mathcal{E}$

On peut donc énoncer :

<u>Proposition</u> A toute date t , le champ des vecteurs vitesses d'un corps rigide est équiprojectif (donc aussi affine et antisymétrique).

Remarque 1 Il est facile de montrer directement que, pour tout t , le champ de vecteurs du corps rigide considéré est équiprojectif. Soient en effet P et Q deux points cinématiques, cinématiquement liés au corps rigide, P (t) et Q (t) leurs positions à la date t . On a puisque le corps est rigide :

$$|\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}| = (\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)})^{\frac{1}{2}} \text{ indépendant de } t .$$

d'où en élevant au carré et en dérivant par rapport à t :

$$\frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

Mais un produit scalaire se dérivant comme un produit ordinaire, cela donne :

$$\frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} + \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

c'est à dire :

$$2\,\frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} = 0$$

Or on a :

$$\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} = \overrightarrow{0_g\,Q(t)} - \overrightarrow{0_g\,P(t)}$$

$$\frac{d}{d\,t}(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = \frac{d\,\overrightarrow{Q(t)}}{d\,t} - \frac{d\,\overrightarrow{P(t)}}{d\,t} = \vec{V}(t, Q(t)) - \vec{V}(t, P(t))$$

et par suite

$$2\,(\vec{V}(t, Q(t)) - \vec{V}(t, P(t)) \cdot (\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

ce qui exprime la propriété d'équiprojectivité.

Remarque 2 On a recherché l'expression du champ de vecteurs d'un corps rigide à partir de la formule (2.6.6) , qui donne le vecteur vitesse d'un point cinématique de ce corps sous forme vectorielle intrinsèque. C'est ainsi qu'on a abouti au résultat (2.6.7) , avec l'expression (2.6.8) de l'application linéaire Φ . Des calculs semblables peuvent être faits à partir de la formule (2.6.4) exprimant les composantes du vecteur vitesse, ou de la formule (2.6.5) qui en est l'analogue sous forme matricielle. Le lecteur est instamment invité à refaire ces calculs lui-même en détail, surtout s'il ne manie pas encore avec beaucoup d'aisance la dérivation de fonctions vectorielles.

Ainsi par exemple, en partant de (2.6.4) , et compte tenu de :

$$(2.6.11) \qquad a_i = \sum_{k=1}^{3} C_{ik}(t)\,(x_k(t) - A_k(t)) \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3$$

qu'on obtient en inversant (2.6.1) , et en désignant par $C_{ik}(t)$ les coefficients de la matrice $C(t)$ inverse de $B(t) = (B_{ik}(t))$, on trouve :

$$(2.6.12) \qquad V_i(t) = \frac{d\,A_i(t)}{d\,t} + \sum_{k=1}^{3} \varphi_{ik}(t)\,(x_k(t) - A_k(t))$$

où on a désigné par $\varphi_{ik}(t)$ les coefficients de la matrice $\varphi(t)$, produit des matrices $\frac{d\,B(t)}{d\,t}$ (à gauche) et $C(t)$ (à droite) :

$$(2.6.13) \qquad \varphi_{ik}(t) = \sum_{\ell=1}^{3} \left(\frac{d\,B_{i\ell}(t)}{d\,t}\right) C_{\ell k}(t) \quad ; \quad \varphi(t) = \frac{d\,B(t)}{d\,t}\,C(t)$$

Comme précédemment, puisqu'on considère maintenant le champ des vecteurs vitesses, à la date t , du corps rigide, on écrit $V_i(t, x_1, x_2, x_3)$ au lieu de $V_i(t)$, (x_1, x_2, x_3) désignant les coordonnées de la position, à la date t , du point cinématique considéré (auparavant désignées par $x_i(t)$).
La formule (2.6.12) s'écrit :

$$(2.6.14) \qquad V_i(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{d\,A_i(t)}{d\,t} + \sum_{k=1}^{3} \varphi_{ik}(t)\,(x_k - A_k(t))$$

où on remarque que les $A_i(t)$ sont les coordonnées de la position, à la date t , du point cinématique M_0 . Les $\varphi_{ik}(t)$, définis par (2.6.13) , sont les coefficients de la matrice qui exprime, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'application linéaire $\Phi(t)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même définie en (2.6.8). On voit alors facilement que la propriété <u>d'antisymétrie</u> de l'application $\Phi(t)$ se traduit par l'antisymétrie de sa matrice représentative :

$$(2.6.16) \qquad \varphi_{ik}(t) = -\varphi_{ki}(t)$$

2 . 7 Eléments caractéristiques du champ de vitesses d'un corps rigide.

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent, et on suppose de plus $\mathcal{E}$ orienté. On trouvera en Annexe les résultats de l'étude des champs de vecteurs équiprojectifs sur un espace affine euclidien orienté de dimension 3 . En les appliquant on obtient :

Proposition 1. A chaque date $t \in \left] t_1, t_2 \right[$, le champ des vecteurs vitesses du corps rigide considéré est de la forme (P et Q étant deux points de $\mathcal{E}$) :

$$(2.7.1) \quad \boxed{\vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, P) + \Omega(t) \wedge \vec{PQ}}$$

$\vec{\Omega}(t)$ est appelé vecteur taux de rotation du corps rigide.

2. Si $\vec{\Omega}(t) = 0$, le champ des vecteurs vitesses à la date t est constant dans l'espace. Sa valeur $\vec{V}(t, P)$ ($P \in \mathcal{E}$ quelconque) est appelée vecteur vitesse de glissement du corps à la date t . On dit alors qu'à la date t, le mouvement du corps est tangent à une translation.

3. Si $\vec{\Omega}(t) \neq 0$, il existe une droite unique $\Delta(t)$, appelée axe instantané de rotation et de glissement du corps à la date t , et un vecteur $\vec{V}_1(t) \in \vec{\mathcal{E}}$ parallèle à $\vec{\Omega}(t)$ unique appelé vecteur vitesse de glissement du corps à la date t , tel que, si $P \in \Delta(t)$ et $Q \in \mathcal{E}$ quelconque :

$$(2.7.2) \quad \vec{V}(t, Q) = \vec{V}_1(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{PQ}$$

Lorsque $\vec{V}_1(t) = 0$, on dit que le mouvement du corps est tangent à la date t à une rotation d'axe $\Delta(t)$, et dans ce cas on appelle Δ axe instantané de rotation à la date t .

Cette proposition montre que dans le cas général, le champ des vecteurs vitesses du corps rigide est somme de deux champs de vecteurs :

un champ $\vec{V}_1(t)$ constant dans l'espace ;

un champ $\vec{V}_2(t)$ de la forme :

$$\vec{V}_2(t, Q) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{PQ}$$

où $P \in \Delta(t)$ et $Q \in \mathcal{E}$ quelconque. Tous deux sont équiprojectifs, donc peuvent être considérés comme des champs de vecteurs vitesses d'un corps rigide ; le premier $\vec{V}_1(t)$ est celui d'un mouvement tangent à l'instant t à une translation, le second celui d'un mouvement tangent à l'instant t à une rotation d'axe $\Delta(t)$ ($\Delta(t)$ étant parallèle à $\vec{V}_1(t)$).

En pratique, il peut être utile de savoir déterminer $\vec{\Omega}(t)$, $\vec{V}_1(t)$ et l'axe $\Delta(t)$, connaissant, en fonction de t , par exemple par leurs coordonnées et composantes dans le repère fixe $(O_{\mathcal{g}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'origine $M_0(t)$ et les vecteurs de base $\vec{\varepsilon}_1(t)$, $\vec{\varepsilon}_2(t)$, $\vec{\varepsilon}_3(t)$, du repère lié au corps rigide. Pour cela on remarque que, pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$

$$\vec{V}(t, M_0(t) + \vec{\varepsilon}_i(t)) - \vec{V}(t, M_0) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{\varepsilon}_i(t)$$

ce qui s'écrit, compte tenu de :

$$\vec{V}(t, M_0(t) + \vec{\varepsilon}_i(t)) = \frac{d\,\overrightarrow{M_0}(t)}{d\,t} + \frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t} = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t}$$

$$\boxed{\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t} = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{\varepsilon}_i(t)}$$

d'où, d'après la formule du double produit vectoriel (voir Annexe) :

$$\vec{\varepsilon_i}(t) \wedge \frac{d\,\vec{\varepsilon_i}(t)}{d\,t} = \vec{\Omega}(t) - (\vec{\varepsilon_i}(t) \cdot \vec{\Omega}(t))\,\vec{\varepsilon_i}(t)$$

et en faisant successivement $i = 1, 2$ et 3 et en ajoutant

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{\varepsilon}_i(t) \wedge \frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t} = 3\,\vec{\Omega}(t) - \sum_{i=1}^{3} (\vec{\varepsilon}_i(t) \cdot \vec{\Omega}(t))\,\vec{\varepsilon_i}(t) = 2\,\vec{\Omega}(t)$$

car la base $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$ est orthonormée. D'où :

$$(2.7.3) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2}\left[\vec{\varepsilon}_1(t) \wedge \frac{d\,\vec{\varepsilon}_1(t)}{d\,t} + \vec{\varepsilon}_2(t) \wedge \frac{d\,\vec{\varepsilon}_2(t)}{d\,t} + \vec{\varepsilon}_3(t) \wedge \frac{d\,\vec{\varepsilon}_3(t)}{d\,t}\right]$$

Une fois $\vec{\Omega}(t)$ déterminé, il est facile en utilisant les résultats donnés en Annexe 2 . A . 4 . c) de déterminer, si $\vec{\Omega}(t)$ est non nul, l'axe $\Delta(t)$. En effet le point :

$$(2.7.4) \quad M_0(t) + \frac{\vec{\Omega}(t) \wedge \dfrac{d\,\vec{M}_0(t)}{d\,t}}{|\,\vec{\Omega}(t)\,|^2}$$

appartient à $\Delta(t)$. Enfin, $\vec{V}_1(t)$ s'en déduit, puisque c'est la valeur du champ $\vec{V}(t)$ en un point quelconque de l'axe $\Delta(t)$, par exemple celui trou-

2 . 8 . Exemples de mouvements d'un corps rigide.

Comme dans les paragraphes 2. 5 et 2 . 6 , nous étudions le mouvement d'un corps rigide, relativement à un repère $\hat{\mathcal{R}}$. Une origine $0_{\mathcal{T}}$ et une une unité $\vec{e}_0$ du temps $\mathcal{T}$ étant choisies, chaque instant T est repéré par sa date t (nombre réel variant dans l'intervalle $]\, t_1\, ,\, t_2\, [$). L'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ est rapporté au repère affine orthonormé positif $(0_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le mouvement du corps rigide est déterminé par la donnée, en fonction de t , du repère affine orthonormé positif $(M_0\,(t), \vec{\varepsilon}_1\,(t), \vec{\varepsilon}_2\,(t), \vec{\varepsilon}_3\,(t))$ lié au corps rigide.

a) Mouvements uniformes

Supposons le champ des vecteurs vitesses du corps rigide, relativement au repère considéré, indépendant de t . Ses éléments caractéristiques, c'est à dire le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$, le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}_1$ (parallèle à $\vec{\Omega}$), et (s'il est défini, c'est à dire si $\vec{\Omega} \neq 0$) l'axe instantané de rotation et de glissement Δ , sont indépendants de t . On dit alors que le corps rigide a, relativement à $\hat{\mathcal{R}}$, un mouvement uniforme. Il est facile, dans ce cas, d'exprimer sous forme explicite, le mouvement de tout point du corps rigide, au moyen de ces éléments caractéristiques.

Si $\vec{\Omega} = 0$, le champ de vecteurs $\vec{V}$ qui, par hypothèse est indépendant de t , est aussi constant dans l'espace. On a donc, si M est un point cinématique quelconque du corps :

$$\frac{d\,\vec{M}\,(t)}{d\,t} = \vec{V}$$

qui s'intègre immédiatement en :

$$M\,(t) = M\,(t_0) + (t - t_0)\,\vec{V}$$

t_0 étant un point quelconque de $]\, t_1, t_2\, [$. On dit dans ce cas que le corps rigide est, relativement au repère $\hat{\mathcal{R}}$, en translation uniforme à la vitesse $\vec{V}$.

Si $\vec{\Omega} \neq 0$, l'axe Δ existe et on remarque que si le point cinématique M du corps rigide est, à un instant t_0 , situé sur Δ , alors M est à tout autre instant sur Δ . En effet on a :

$$M\,(t) = M\,(t_0) + (t - t_0)\,\vec{V}_1$$

où $M(t_0) \in \Delta$, $\vec{V}_1$ étant le vecteur vitesse de glissement du solide (parallèle à Δ). L'axe Δ , qui par hypothèse a été supposé indépendant de t dans le repère $\hat{\mathcal{R}}$, est donc aussi indépendant de t dans le repère lié au corps rigide. On peut alors choisir $\vec{e}_3$ et $\vec{\varepsilon}_3(t)$ égaux et parallèles à Δ , c'est à dire à $\vec{\Omega}$, et $M_0(t)$ situé sur Δ . Les coordonnées $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ de la position à la date t d'un point cinématique quelconque M lié au corps rigide sont de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = r\cos(\Omega t - \alpha) \\ x_2(t) = r\sin(\Omega t - \alpha) \\ x_3(t) = x_3(t_0) + V_1(t - t_0) \end{cases}$$

où Ω et V désignent les composantes sur $\vec{e}_3$ des vecteurs taux de rotation $\vec{\Omega}$ et vitesse de glissement $\vec{V}_1$ (tous deux parallèles à $\vec{e}_3$). On voit que la trajectoire du point cinématique M est une hélice d'axe $O_{\mathcal{E}}\vec{e}_3$. On dit que le corps rigide est, relativement au repère $\hat{\mathcal{R}}$ un mouvement hélicoïdal uniforme. Dans le cas particulier où, de plus, $\vec{V}_1 = 0$, les trajectoires sont des cercles et on dit que le corps rigide a, relativement au repère $\hat{\mathcal{R}}$, un mouvement circulaire uniforme.

Remarque On dit que deux mouvements d'un corps rigide sont tangents à la date t si, relativement à un certain repère $\hat{\mathcal{R}}$, leurs champs de vecteurs vitesses à la date t sont égaux. On verra plus loin que cette propriété est indépendante du choix du repère $\hat{\mathcal{R}}$: si elle est satisfaite pour un certain choix de $\hat{\mathcal{R}}$, elle l'est aussi pour tout autre choix. L'étude faite ci-dessus montre qu'étant donné un champ de vecteurs équiprojectif quelconque sur $\mathcal{E}$, on peut toujours trouver un mouvement d'un corps rigide dont le champ de vecteurs vitesses est, à tout instant, égal au champ donné. En particulier, étant donné un mouvement quelconque d'un corps rigide, dont le champ de vecteurs dépend de t , on peut, pour chaque valeur t_0 de t , trouver un autre mouvement d'un corps rigide dont le champ de vecteurs est indépendant de t et égal au champ de vecteurs vitesses du premier corps à la date t_0 . Autrement dit, il existe pour chaque date t_0 un mouvement uniforme (pouvant être une translation, une rotation ou un mouvement hélicoïdal) tangent à la date t_0 au mouvement considéré. Cela justifie la terminologie utilisée dans le paragraphe précédent, lorsqu'il a été question de mouvement tangent, à une certaine date, à une rotation ou à une translation.

b) Mouvements de translation

Supposons que, pour tout $t \in \left] t_1, t_2 \right[$, le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(t)$ soit nul. Il est facile de voir (en revenant à la définition de $\vec{\Omega}$) que cette condition est équivalente à la suivante : les vecteurs $\vec{\varepsilon_i}(t)$ de la base de $\vec{\mathcal{E}}$ liée au corps rigide, sont indépendants de t. Autrement dit, si t et t' sont deux points quelconques de $\left] t_1, t_2 \right[$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui associe, à la position qu'occupe à la date t un point cinématique du corps, la position du même point cinématique à la date t', est une translation. On dit dans ce cas que le corps a, par rapport au repère considéré, un mouvement de translation. (On a déjà rencontré ci-dessus certains mouvements de translation particuliers, les mouvements de translation uniforme).

A chaque date t, le champ des vecteurs vitesses $\vec{V}(t)$ est constant dans l'espace. On a donc, si M est un point cinématique quelconque du corps rigide :

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = \vec{V}(t)$$

donc ($\vec{V}(t)$ étant continue, donc intégrable) :

$$M(t) = M(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t)\, dt$$

On voit que les trajectoires de tous les points du corps se déduisent de l'une d'elles par translation.

c) Mouvements plans

Supposons qu'il existe un plan Π de $\mathcal{E}$ globalement invariant par le mouvement du corps rigide étudié. Cela signifie que si un point cinématique M du corps rigide a, à une date particulière t_0, sa position $M(t_0)$ élément de Π, alors toute la trajectoire de M est contenue dans Π.

Dans ce cas, tout plan parallèle à Π est évidemment aussi globalement invariant et, pour étudier le mouvement du corps rigide considéré, il suffit d'étudier le mouvement des points du plan Π (celui des autres points s'en déduisant, par une translation perpendiculairement au plan Π).

D'autre part, le champ des vecteurs vitesses est nécessairement, à chaque date t, parallèle à Π. On sait que dans ce cas (Annexe N° 2.A.4 c) le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(t)$ est, pour tout t, soit nul, soit perpendiculaire à Π, et que si $\vec{\Omega}(t)$ est non nul, le mouvement est tangent à la date t à une rotation d'axe $\Delta(t)$, perpendiculaire à Π. Lorsqu'on étudie le mouvement des points du plan Π, il suffit de considérer, au lieu de l'axe $\Delta(t)$, son intersection $C(t)$ avec le plan Π, appelé <u>centre instantané de rotation</u> à la date t.

Il est en général facile, dans les exemples pratiques, de déterminer ce centre instantané de rotation : le champ des vecteurs vitesses à la date t prend, en chaque point P de Π, une valeur $\vec{V}(t, P)$ normale à $\overrightarrow{C(t)P}$, puisque :

$$\vec{V}(t, P) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{C(t)P}$$

Il suffit donc de déterminer les valeurs de ce champ en deux points distincts P et Q où les vitesses $\vec{V}(t, P)$ et $\vec{V}(t, Q)$ sont non nulles. Le point cherché $C(t)$ est l'intersection des deux droites du plan Π, passant respectivement par P et par Q, et normales respectivement à $\vec{V}(t, P)$ et $\vec{V}(t, Q)$.

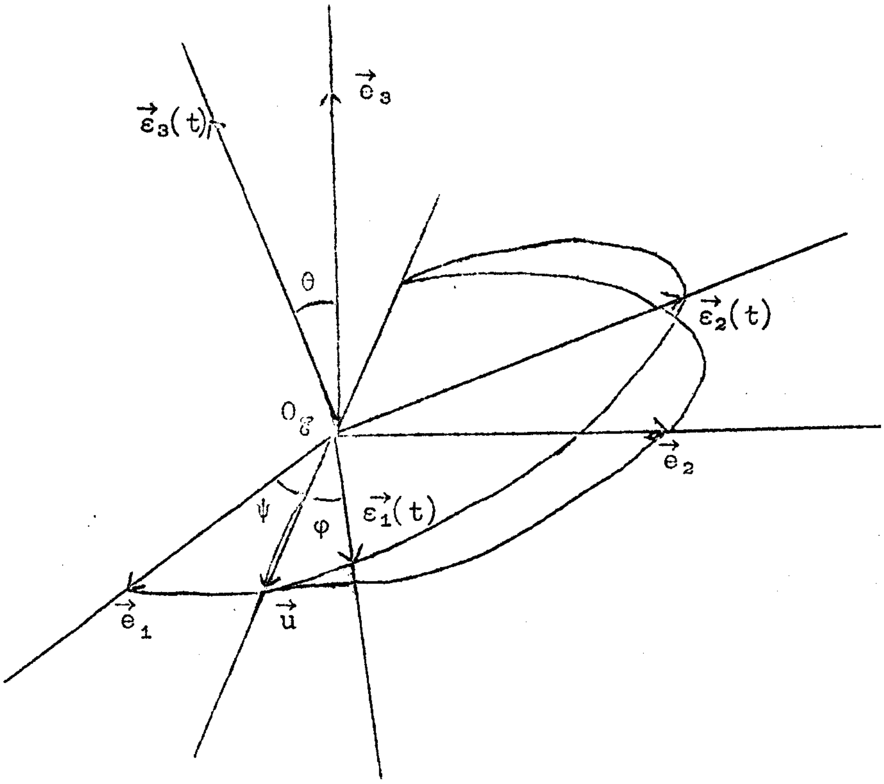
Lorsque t varie, $C(t)$ parcourt dans le plan Π une courbe appelée <u>base</u>, tandis que l'ensemble des points cinématiques liés au corps rigide qui, à un instant t, occupent la position $C(t)$, forme une "courbe tracée sur le corps rigide", appelée <u>roulante</u>. On peut montrer qu'au cours du mouvement, la roulante roule sans glisser sur la base. On pourra voir des exemples de mouvements de ce type en Travaux Dirigés.

d) <u>Mouvements avec un point fixe. Angles d'Euler.</u>

Supposons qu'il existe un point cinématique O du corps rigide dont la position est indépendante de t, et prenons cette position pour origine $O_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Le vecteur vitesse de O est donc nul, et par conséquent, à chaque date t, le mouvement est tangent à une rotation, dont l'axe instantané $\Delta(t)$ passe par $O_{\mathcal{E}}$.

Un des moyens de repérer la position de la base orthonormée $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$ liée au corps rigide par rapport à la base orthonormée "fixe" $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, consiste à utiliser les <u>angles d'Euler</u>, ainsi définis (voir figure).

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire parallèle à l'intersection des plans $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $(O_{\mathcal{E}}, \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t))$. (Si ces deux plans ne sont pas confondus, la direction de $\vec{u}$ est déterminée et on choisit pour $\vec{u}$ l'un des deux sens possibles. Si les deux plans sont confondus, on choisit $\vec{u}$ arbitrairement, parallèle au plan $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$). La droite parallèle à $\vec{u}$ passant par $O_{\mathcal{E}}$ est appelée <u>ligne des noeuds</u>.



Les angles d'Euler sont :

- l'angle de précession $\psi = \widehat{(\vec{e}_1, \vec{u})}$, mesuré dans le plan $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orienté par la donnée de la base positive $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- l'angle de nutation $\theta = \widehat{(\vec{e}_3, \vec{\varepsilon}_3(t))}$, mesuré dans le plan normal à $\vec{u}$ (orienté par le choix d'une base de ce plan telle qu'en prenant $\vec{u}$ pour troisième vecteur, on obtienne une base positive de $\vec{\mathcal{E}}$)

- l'angle de rotation propre $\varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{\varepsilon}_1(t))}$, mesuré dans le plan $(O_{\mathcal{E}}, \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t)$ orienté par la donnée de la base positive $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))$.

On remarque que pour une position donnée de la base $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$, les angles d'Euler ψ , θ et φ ne sont pas en général déterminés de manière unique ; si la ligne des noeuds n'est pas arbitraire, une fois $\vec{u}$ choisi, ψ, θ et φ sont déterminés modulo $2\pi\mathbb{Z}$; si on remplace $\vec{u}$ par son opposé ψ , θ et φ sont augmentés de π . Par contre, à un jeu de valeurs $(\psi , \theta , \varphi)$ des angles d'Euler correspond une position unique de la base $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$. Ceci justifie le résultat annoncé paragraphe 2 . 5 (la donnée d'une matrice 3×3 orthogonale positive peut être définie par trois paramètres scalaires ; autrement dit, le groupe $SO(3)$ de ces matrices, est de dimension 3).

Il est facile d'exprimer les $\vec{\varepsilon}_i(t)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ au moyen des angles d'Euler :

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1(t) = (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\,\vec{e}_1 + (\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi) \\ \qquad \vec{e}_2 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2(t) = (-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi) \\ \qquad \vec{e}_2 + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3(t) = \sin\psi\sin\theta\,\vec{e}_1 - \cos\psi\sin\theta\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3 \end{cases}$$

Il est alors facile de calculer le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(t)$, en utilisant par exemple la formule (2.7.3) ; il est toutefois plus simple d'étudier le mouvement du corps rigide comme un mouvement composé, en utilisant les résultats du paragraphe suivant.

. 9 Changement de repère de l'espace - temps. Mouvements composés.

On considère un point cinématique M, dont on étudie le mouvement pendant un intervalle $]\,T_1, T_2\,[$ du temps $\mathcal{T}$. On choisit une origine $O_{\mathcal{T}}$ et une unité $\vec{e}_0$ du temps $\mathcal{T}$, de sorte que chaque instant $T \in\,]\,T_1, T_2\,[$ est repéré par sa date t, nombre réel élément de l'intervalle $]\,t_1, t_2\,[$

On peut étudier le mouvement de M en rapportant l'espace - temps à divers référentiels de domaine de temps $]\,T_1, T_2\,[$. Considérons deux de ces référentiels $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}$. L'un deux ($\mathcal{R}_0$ par exemple) est traditionnellement qualifié de "fixe", l'autre ($\mathcal{R}$) de "mobile", quoique ces notions n'aient aucune signification intrinsèque : elles n'ont de sens que pour un observateur donné, cinématiquement lié au référentiel dit "fixe". On va voir, dans ce paragraphe, comment déterminer les éléments caractéristiques du mouvement de M (notamment ses vecteurs vitesse et accélération) relativement à $\mathcal{R}_0$, connaissant ces mêmes éléments relativement à $\mathcal{R}$. Il s'agit donc de résoudre un problème de <u>changement de référentiel</u>, ou (si, pour les besoins des calculs, on choisit des repères de l'espace - temps $\hat{\mathcal{R}}_0$ et $\hat{\mathcal{R}}$, de référentiels associés, respectivement, $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}$), de <u>changement de repère</u> de l'espace - temps.

Ce même problème de changement de référentiel (ou de repère), peut recevoir une autre interprétation. On peut en effet concevoir un corps rigide en mouvement S, tel que le repère $\hat{\mathcal{R}}$ lui soit cinématiquement lié. La donnée du mouvement de ce corps rigide pendant l'intervalle de temps $]T_1, T_2[$ équivaut en effet à celle du référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps. Le mouvement du point cinématique M, lorsqu'il est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$, est appelé <u>mouvement relatif</u> de M (relativement au corps rigide S). Ce même mouvement, étudié dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, est appelé <u>mouvement absolu</u> de M (remarquons que cette dénomination est abusive : ce mouvement n'a rien de plus absolu que l'autre ; il serait plus conforme aux conceptions actuelles du monde physique, de considérer un autre corps rigide S_0 tel que $\hat{\mathcal{R}}_0$ lui soit cinématiquement lié, et de parler de mouvement relatif de M, relativement à S_0 ; nous utiliserons toutefois le terme de mouvement absolu pour respecter les traditions). Enfin, le mouvement du corps rigide S, étudié dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, est appelé <u>mouvement d'entraînement</u>. Le problème étudié peut donc être interprété comme un problème de <u>composition de mouvements</u> : il consiste en effet à déterminer le mouvement "absolu" de M, connaissant son mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

L'espace - temps rapporté au référentiel $\mathcal{R}_0$ est un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}_0$, où $\mathcal{E}_0$ est un espace affine euclidien de dimension 3, qu'on supposera orienté. On choisit un repère affine orthonormé $(O_0, \vec{e}_{01}, \vec{e}_{02}, \vec{e}_{03})$ de $\mathcal{E}_0$, définissant ainsi un repère $\hat{\mathcal{R}}_0$ de l'espace - temps, de référentiel associé $\mathcal{R}_0$. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2 . 5 le référentiel $\mathcal{R}$, c'est à dire le mouvement d'entraînement (du corps rigide S, rapporté au référentiel $\mathcal{R}_0$) est défini par la donnée, pour chaque $t \in]t_1, t_2[$, d'un autre repère affine orthonormé de $\mathcal{E}_0$, $(O(t), \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$, lié au corps rigide S. On supposera dans la suite l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_0$ (associé à l'espace affine $\mathcal{E}_0$) orienté, et les bases $(\vec{e}_{01}, \vec{e}_{02}, \vec{e}_{03})$, $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$ d'orientation positive.

Le mouvement relatif du point cinématique M (c'est à dire le mouvement de ce point, rapporté au référentiel $\mathcal{R}$) est défini par la donnée, en fonction de $t \in]t_1, t_2[$, des coordonnées $(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ de sa position $M(t)$ à la date t, relativement au repère $(O(t), \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$:

$$(2.9.1) \quad M(t) = O(t) + a_1(t)\,\vec{\varepsilon}_1(t) + a_2(t)\,\vec{\varepsilon}_2(t) + a_3(t)\,\vec{\varepsilon}_3(t)$$

De même, le mouvement "absolu" du point cinématique M, c'est à dire le mouvement de ce point rapporté au référentiel $\mathcal{R}_0$, est connu lorsqu'on connaît, en fonction de $t \in]t_1, t_2[$, les coordonnées $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ de la position $M(t)$, relativement au repère $(O_0, \vec{e}_{10}, \vec{e}_{20}, \vec{e}_{30})$:

$$(2.9.2) \qquad M(t) = O_0 + x_1(t)\,\vec{e}_1 + x_2(t)\,\vec{e}_2 + x_3(t)\,\vec{e}_3$$

Les formules de changement de repère (chapitre 1, ~~paragraphe~~ 1.4, chapitre 2, formules 2.5.1 et 2.5.8) permettent d'exprimer les $x_i(t)$ au moyen des $a_i(t)$, lorsqu'on connaît les composantes $A_i(t)$ de $\overrightarrow{O_0 O}(t)$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ainsi que la matrice $(B_{ij}(t))$ de changement de base (passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t))$. On a :

$$(2.9.3) \quad O(t) = O_0 + A_1(t)\,\vec{e}_1 + A_2(t)\,\vec{e}_2 + A_3(t)\,\vec{e}_3$$

$$(2.9.4) \quad \vec{\varepsilon}_i(t) = B_{1i}(t)\,\vec{e}_1 + B_{2i}(t)\,\vec{e}_2 + B_{3i}(t)\,\vec{e}_3 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

et par conséquent :

$$(2.9.5) \quad x_i(t) = A_i(t) + B_{i1}(t)\,a_1(t) + B_{i2}(t)\,a_2(t) + B_{i3}(t)\,a_3(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

Cette formule résoud en principe le problème de changement de repère (ou de composition des mouvements). En la dérivant par rapport à t (ou, ce qui revient au même, en dérivant par rapport à t les formules (2.9.1) et (2.9.2)), on va obtenir les règles de composition des vitesses, puis des accélérations. Dérivons par exemple (2.9.1) par rapport à t.

$$(2.9.6) \quad \vec{V}_a(t) = \frac{d\,\vec{M}(t)}{d\,t} = \left[\frac{d\,\vec{O}(t)}{d\,t} + \sum_{i=1}^{3} a_i(t)\,\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t} \right] + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t}\,\vec{\varepsilon}_i(t)$$

où $\vec{V}_a(t)$ désigne le vecteur vitesse "absolue" du point cinématique M, c'est à dire son vecteur vitesse relativement au référentiel $\mathcal{R}_0$. Afin d'interpréter ce résultat, posons :

$$(2.9.7) \quad \vec{V}_c(t, M(t)) = \frac{d\,\vec{O}(t)}{d\,t} + \sum_{i=1}^{3} a_i(t)\,\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t}$$

$$(2.9.8) \quad \vec{V}(t) = \sum^{3} \frac{d\,a_i(t)}{} \quad \vec{\varepsilon}_i(t)$$

On reconnaît dans $\vec{V}_e(t, M(t))$ le vecteur vitesse du point du corps rigide S (auquel est lié le repère $\mathcal{R}$) dont la position à la date t est $M(t)$, donc coïncide avec la position, à cette même date, du point cinématique M. C'est pourquoi on appelle $\vec{V}_e(t, M(t))$ le vecteur vitesse d'entraînement de M à la date t. Plus généralement, le champ des vecteurs vitesses du corps rigide S à la date t, noté $\vec{V}_e(t, P)$ ($P \in \mathcal{E}$ quelconque) est appelé champ des vecteurs vitesse d'entraînement à la date t.
En particulier pour $P = O(t)$ on a bien entendu :

$$(2.9.9) \qquad \vec{V}_e(t, O(t)) = \frac{d\,\vec{O}(t)}{d\,t}$$

D'après les résultats du paragraphe 2.7, on sait que $\vec{V}_e(t, P)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$(2.9.10) \qquad \boxed{\vec{V}_e(t, P) = \vec{V}_e(t, O(t)) + \vec{\Omega}_e(t) \wedge \overrightarrow{O(t)P}}$$

où $\vec{\Omega}_e(t)$, vecteur taux de rotation du corps rigide S, est appelé vecteur taux de rotation d'entraînement à la date t.

Quant à $\vec{V}_r(t)$, on l'appelle vecteur vitesse relative du point cinématique M (relativement au référentiel $\mathcal{R}$). Cette dénomination paraît justifiée lorsqu'on remarque que les $\frac{d\,a_i(t)}{d\,t}$ sont les composantes du vecteur vitesse de M à la date t, lorsqu'on rapporte l'espace - temps au repère $\hat{\mathcal{R}}$ lié au corps rigide S. On peut toutefois remarquer que l'espace - temps rapporté au référentiel $\mathcal{R}_0$ est un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}_0$ et que, rapporté au référentiel $\mathcal{R}$, c'est un autre produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}$ étant deux espaces affines euclidiens qu'il n'est pas obligatoire d'identifier. Le vecteur vitesse de M à la date t, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, est un élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. Lorsqu'on l'identifie à $\vec{V}_r(t)$, qui lui, est un élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_0$ associé à $\mathcal{E}_0$, on utilise implicitement une identification naturelle de $\mathcal{E}_0$ et de $\mathcal{E}$ (donc aussi de $\vec{\mathcal{E}}_0$ et de $\vec{\mathcal{E}}$), faite au moyen de l'isométrie, dépendant de t, qui applique le repère affine $(O(t), \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$ de $\mathcal{E}_0$, sur le repère affine de $\mathcal{E}$ déterminé par le choix du repère $\hat{\mathcal{R}}$.

L'expression (2.9.6) s'écrit, compte tenu des définitions (2.9.7) et (2.9.8)

$$(2.9.11) \qquad \vec{V}_a(t) = \vec{V}_e(t, M(t)) + \vec{V}_r(t)$$

et on peut énoncer :

roposition Le vecteur vitesse "absolue" $\vec{V}_a(t)$ du point cinématique M la date t , est somme de la valeur au point M (t) , du champ des vecteurs itesse d'entraînement à la date t , $\vec{V}_e(t, M(t))$, et du vecteur vitesse elative $\vec{V}_r(t)$ de M à la date t .

En dérivant une seconde fois (2.9.6) par rapport à t , on obtient :

$$\vec{\Gamma}_a(t) = \frac{d\,\vec{V}_a(t)}{d\,t} = \left[\frac{d^2\vec{O}(t)}{d\,t^2} + \sum_{i=1}^{3} a_i(t)\,\frac{d^2\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t^2}\right] + \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2\,a_i(t)}{d\,t^2}\,\vec{\varepsilon}_i(t)$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{3} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t}\,\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t}$$

ù $\vec{\Gamma}_a(t)$ désigne le vecteur accélération "absolue" de M à la date t .
osons :

$$(2.9.12)\quad \vec{\Gamma}_e(t, M(t)) = \frac{d^2\,\vec{O}\,(t)}{d\,t} + \sum_{i=1}^{3} a_i(t)\,\frac{d^2\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t^2}$$

$$(2.9.13)\quad \vec{\Gamma}_r(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2\,a_i(t)}{d\,t^2}\,\vec{\varepsilon}_i(t)$$

$$(2.9.14)\quad \vec{\Gamma}_c(t) = 2\sum_{i=1}^{3} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t}\,\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t}$$

Le champ de vecteurs qui, en chaque point $P \in \mathcal{E}$, vaut $\vec{\Gamma}_e(t, P)$, est ppelé champ des vecteurs accélération d'entraînement à la date t . Son interprétation est analogue à celle du champ des vecteurs vitesse d'entraînement : 'est le champ des vecteurs accélération du corps rigide S à la date t , elativement au repère $\widehat{\mathcal{R}}_0$.

De même, $\vec{\Gamma}_r(t)$ est appelé vecteur accélération relative de M à la date t (relativement au référentiel $\mathcal{R}$). Son interprétation est analogue à celle du vecteur vitesse relative.

Quant au terme $\vec{\Gamma}_c(t)$, on l'appelle vecteur accélération complémentaire, ou de Coriolis (du nom du mathématicien français du 19ème siècle qui en a découvert l'existence).

On peut alors exprimer le vecteur accélération absolue de M par :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_a(t) = \vec{\Gamma}_e(t, M(t)) + \vec{\Gamma}_r(t) + \vec{\Gamma}_c(t)} \tag{2.9.15}$$

et énoncer :

<u>Proposition</u> Le vecteur accélération "absolue" du point cinématique M, à la date t, est somme de trois termes : la valeur, au point $M(t)$, du champ des vecteurs accélération d'entraînement à la date t, $\vec{\Gamma}_e(t, M(t))$; le vecteur accélération relative (à la date t) $\vec{\Gamma}_r(t)$, et le vecteur accélération de Coriolis (à la date t) $\vec{\Gamma}_c(t)$.

Dans les applications, il peut être intéressant de disposer d'une formule donnant le vecteur accélération de Coriolis $\vec{\Gamma}_c(t)$, en fonction du vecteur rotation d'entraînement $\vec{\Omega}_e(t)$ et du vecteur vitesse relative $\vec{V}_r(t)$. Elle s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_c(t) = 2\,\vec{\Omega}_e(t) \wedge \vec{V}_r(t)} \tag{2.9.16}$$

On a en effet d'après (2.9.10) :

$$\vec{\Omega}_e(t) \wedge \vec{V}_r(t) = \vec{V}_e(t, O(t) + \vec{V}_r(t)) - \vec{V}_e(t, O(t))$$

$$= \vec{V}_e(t, O(t) + \vec{V}_r(t)) - \frac{d\,\vec{O}(t)}{d\,t}$$

Mais en remarquant que $\vec{V}_e(t, O(t) + \vec{V}_r(t))$ s'obtient tout simplement en remplaçant, dans (2.9.7), les coordonnées $a_i(t)$ de $M(t)$ (dans le repère $(O(t), \vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t)))$ par les composantes $\frac{d\,a_i(t)}{d\,t}$ de $\vec{V}_r(t)$ (dans base $(\vec{\varepsilon}_1(t), \vec{\varepsilon}_2(t), \vec{\varepsilon}_3(t))$, on obtient :

$$\vec{\Omega}_e(t) \wedge \vec{V}_r(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\,a_i(t)}{d\,t}\,\frac{d\,\vec{\varepsilon}_i(t)}{d\,t}$$

d'où le résultat, compte tenu de (2.9.14).

En terminant ce paragraphe, remarquons qu'on peut utiliser les résultats qui précèdent pour étudier le mouvement composé, non plus d'un point cinématique unique M, mais d'un corps rigide S_1. Il suffit en effet de prendre po point cinématique, différents points M, N etc ..., cinématiquement liés à S

n a, en désignant par $\vec{V}_{aM}(t)$, $\vec{V}_{eM}(t)$ et $\vec{V}_{rM}(t)$ les vecteurs vitesses ab-
olue, d'entraînement et relative, à la date t ,du point cinématique M , et
n utilisant des notations analogues pour N :

$$\vec{V}_{eN}(t) - \vec{V}_{eM}(t) = \vec{\Omega}_e(t) \wedge \overrightarrow{M(t)\,N(t)}$$

$$\vec{V}_{rN}(t) - \vec{V}_{rM}(t) = \vec{\Omega}_r(t) \wedge \overrightarrow{M(t)\,N(t)}$$

ù $\vec{\Omega}_e(t)$ désigne le vecteur taux de rotation d'entraînement (déjà introduit) et
$\vec{\Omega}_r(t)$ le vecteur taux de <u>rotation relative</u> (élément caractéristique du champ des vec-
teurs vitesses relatives du corps rigide S_1). On en déduit, en ajoutant ces
leux égalités, compte tenu de (2.9.11) :

$$\vec{V}_{aN}(t) - \vec{V}_{aM}(t) = (\vec{\Omega}_e(t) + \vec{\Omega}_r(t)) \wedge \overrightarrow{M(t)\,N(t)}$$

ce qui prouve que le vecteur taux de rotation "absolue" de S_1 est :

$$\boxed{\vec{\Omega}_a(t) = \vec{\Omega}_e(t) + \vec{\Omega}_r(t)}$$

On pourra, à titre d'exercice, utiliser ce résultat pour le calcul de l'ex-
pression du vecteur taux de rotation d'un corps rigide ayant un point fixe, en fonction
des angles d'Euler et de leurs dérivées par rapport à t , en considérant ce
mouvement comme composé des trois mouvements correspondant aux variations de
chacun des trois angles d'Euler.

Annexe au chapitre 2

2 . A . 1 Dérivée d'une application (Rappel de mathématiques)

Rappelons tout d'abord qu'une norme sur un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$, est une application, notée $\vec{V} \to |\vec{V}|$, de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les propriétés :

pour tous $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| \ |\vec{v}|$

pour tous $\vec{v}$ et $\vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$, $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$

$|\vec{v}| = 0$ si et seulement si $\vec{v} = 0$.

Si $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$, la donnée d'une norme sur $\vec{\mathcal{E}}$ permet de définir sur $\mathcal{E}$ une distance :

si M et $N \in \mathcal{E}$, $d(M, N) = |\vec{MN}|$

On a vu un exemple de norme dans l'Annexe au chapitre 1 : si $\vec{\mathcal{E}}$ est euclidie son produit scalaire étant noté $(\vec{v}, \vec{w}) \to \vec{v} \cdot \vec{w}$; l'application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{R}^+$ $\vec{v} \to (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}}$ est une norme dite euclidienne.

Si $\vec{\mathcal{E}}$ est de dimension finie, on peut toujours le munir d'une norme (et on montre que dans ce cas, toutes les normes sur $\vec{\mathcal{E}}$ sont équivalentes, dans un sens qu'on précisera dans le cours de Mathématiques).

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de dimensions finies n_1 et n_2 , d'espaces vectoriels associés $\vec{\mathcal{E}}_1$ et $\vec{\mathcal{E}}_2$. On les suppose munis de normes (par exemple les normes euclidiennes, s'ils sont euclidiens). On montre d'aillev que tout ce qui va être dit ci-après est indépendant du choix de ces normes.

Soit A une partie ouverte de $\mathcal{E}_1$ (c'est à dire une partie de $\mathcal{E}_1$ telle qv pour tout $M \in A$, il existe $r > 0$ tel que tout $N \in \mathcal{E}_1$ vérifiant $|\vec{MN}| < r$ soit élément de A).

Une application Ψ de A dans $\mathcal{E}_2$ est dite affine si, étant donné un point $M_0 \in A$, il existe une application linéaire Φ de $\vec{\mathcal{E}}_1$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ telle que :

$$\Psi(M) = \Psi(M_0) + \Phi(\vec{M_0 M}) \quad \text{pour tout } M \in A .$$

On vérifie facilement que si c'est le cas, l'application Φ , dite partie linéaire de Ψ , ne dépend pas du choix de M_0.

Soit maintenant f une application (pas nécessairement affine) de A dans $\mathcal{E}_2$, et M_0 un point de A.

<u>Définition</u> On dit que f est dérivable au point M_0 s'il existe une application <u>linéaire</u> Φ de $\vec{\mathcal{E}}_1$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $M \in A$ vérifiant $|\overrightarrow{M_0 M}| \leqslant \eta$, on a :

$$|f(M) - f(M_0) - \Phi(\overrightarrow{M_0 M})| \leqslant \varepsilon \, . \, |\overrightarrow{M_0 M}|$$

lorsque c'est le cas, l'application linéaire Φ est dite dérivée de f au point M_0, et notée $f'(M_0)$.

On remarque que si f est dérivable en M_0, l'inégalité figurant dans la définition signifie que l'application affine :

$$M \to f(M_0) + \Phi(\overrightarrow{M_0 M})$$

est une approximation de f qu'on peut rendre aussi proche de f qu'on le désire en se restreignant à un voisinage suffisamment petit de M_0. On peut donc dire, en termes intuitifs, que chercher si f est dérivable au point M_0 et, dans l'affirmative, chercher sa dérivée, consiste à chercher s'il est possible de trouver une approximation de f par une fonction affine prenant en M_0 la même valeur que f, et à déterminer cette approximation.

On montre que si f est dérivable en M_0, f est continue en M_0 (car l'application affine qui en est l'approximation est continue, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ étant de dimensions finies), et sa dérivée en ce point est unique.

On dit que f est dérivable sur A, si elle est dérivable en tout point M de A. Sa dérivée est alors une application $f' : M \mapsto f'(M)$ de A dans l'espace $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{E}}_2)$ des applications linéaires de $\vec{\mathcal{E}}_1$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$.

On remarque qu'en particulier si f est une application affine, elle est dérivable sur A, et sa dérivée est constante sur A (égale, en tout point de A, à la partie linéaire de f).

<u>Dérivation d'une application composée</u> Soit comme ci-dessus une application f de A (partie ouverte de $\mathcal{E}_1$) dans $\mathcal{E}_2$, et g une application d'une partie B ouverte de $\mathcal{E}_2$, contenant $f(A)$, dans un troisième espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension finie. $g \circ f$ est alors une application de A dans $\mathcal{E}_3$.

Soit $M_0 \in A$, $M_1 = f(M_0)$. On montre facilement que si f est dérivable en M_0 et a pour dérivée en ce point $f'(M_0)$, et si g est dérivable en M_1 et a pour dérivée en ce point $g'(f(M_0))$, alors $g_0 f$ est dérivable en M_0 et a pour dérivée en ce point $g'(f(M_0)) \circ f'(M_0)$. C'est bien en effet une application linéaire de $\vec{\mathcal{E}}_1$ dans $\vec{\mathcal{E}}_3$ (puisque composée des deux applications linéaires $f'(M_0) : \vec{\mathcal{E}}_1 \to \vec{\mathcal{E}}_2$ et $g'(f(M_0)) : \vec{\mathcal{E}}_2 \to \vec{\mathcal{E}}_3$.

Cas particulier où $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}$ Soit A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, et $f : A \to \mathcal{E}_2$ une application. Si cette application f est dérivable en un point t_0 de A , sa dérivée en ce point est une application linéaire $f'(t_0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ (puisque l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathbb{R}$, est $\mathbb{R}$ lui - même). Or on peut identifier l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \vec{\mathcal{E}}_2)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ avec $\vec{\mathcal{E}}_2$ de la manière suivante :

- si $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \vec{\mathcal{E}}_2)$, on identifie Φ à $\Phi(1) \in \vec{\mathcal{E}}_2$

- réciproquement si $\vec{V} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, on identifie $\vec{V}$ à l'application $\Phi_{\vec{V}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ qui, à $t \in \mathbb{R}$, fait correspondre $\Phi_{\vec{V}}(t) = t\,\vec{V}$
C'est une application linéaire telle que $\Phi_{\vec{V}}(1) = \vec{V}$

Grâce à cette identification, $f'(t_0)$ peut être considéré comme un élément de $\vec{\mathcal{E}}_2$. En particulier si $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}$, f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles et sa dérivée en un point t_0 , si elle existe, est un nombre réel; si f est dérivable sur A , sa dérivée est une fonction d'une variable réelle, définie sur A et à valeurs réelles. On retrouve bien ainsi la notion familière de dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

Expression de la dérivée dans un repère. Supposons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ rapportés aux repères affines, respectivement, $(O_1, \vec{e}_1, \dots \vec{e}_{n_1})$ et $(O_2, f_1, \dots \vec{f}_{n_2})$. On désignera par $(x_1, \dots x_{n_1})$ les coordonnées, dans le repère de $\mathcal{E}_1$, d'un point courant M de A , et par $(x_{10}, \dots x_{n_10})$ celles du point M_0 . Les coordonnées $(y_1, \dots y_{n_2})$ du point $f(M)$ sont alors des fonctions de $(x_1, \dots x_{n_1})$. Il est facile de voir que si f est dérivable au point M_0 , ces coordonnées $(y_1, \dots y_{n_2})$ possèdent au point $(x_{10}, \dots x_{n_10})$, des dérivées partielles (par rapport aux variables réelles $x_1, \dots x_n$).
Considérons la matrice à n_2 lignes et n_1 colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_{10}, \dots x_{n_10}) , & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_{10}, \dots x_{n_10}), & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n_1}}(x_{10}, \dots x_{n_10}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_{n_2}}{\partial x_1}(x_{10}, \dots x_{n_10}), & \dots\dots\dots & & \frac{\partial y_{n_2}}{\partial x_{n_1}}(x_{10}, \dots x_{n_10}) \end{pmatrix}$$

appelée parfois matrice jacobienne de la fonction f au point M_0, dans les repères considérés. On vérifiera que cette matrice n'est autre que la matrice représentative de l'application linéaire $f'(M_0)$ de $\vec{\mathcal{E}}_1$ rapporté à la base $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_{n_1})$, dans $\vec{\mathcal{E}}_2$ rapporté à la base $(\vec{f}_1, \dots \vec{f}_{n_2})$; sa $i^{\text{ème}}$ colonne est constituée des n_2 composantes, dans la base $(\vec{f}_1, \dots \vec{f}_{n_2})$, de $f'(M_0)\,(\vec{e}_i)$.

2 . A . 2 Champs de vecteurs équiprojectifs.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie n, $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé. On rappelle qu'un champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$ est une application $\vec{V}$ de $\mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$. Si $M \in \mathcal{E}$, $\vec{V}(M)$ est appelé valeur du champ de vecteurs $\vec{V}$ au point M.

L'ensemble des champs de vecteurs sur $\mathcal{E}$ est évidemment un espace vectoriel (de dimension infinie). On va dans la suite s'intéresser à <u>certains</u> champs de vecteurs particuliers, formant un sous-espace vectoriel de dimension finie; de l'espace de tous les champs de vecteurs.

<u>Définition 1</u> On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $\mathcal{E}$ est <u>affine</u> si, étant donné un point P de $\mathcal{E}$, il existe une application linéaire Φ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même telle que, pour tout $Q \in \mathcal{E}$:

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \Phi(\overrightarrow{PQ})$$

On remarque que lorsqu'elle existe, Φ ne dépend pas du choix de P. En effet si P' est un autre point de $\mathcal{E}$ on a

$$\vec{V}(P') = V(P) + \Phi(\overrightarrow{PP'})$$

d'où, en retrnachant et en tenant compte de la linéarité de Φ et de la relation de Chasles :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P') + \Phi(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'}) = \vec{V}(P') + \Phi(\overrightarrow{P'Q})$$

<u>Définition 2</u> Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs affine sur $\mathcal{E}$, Φ l'application linéaire de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même qui lui est associée. On dit que $\vec{V}$ est antisymétrique si l'application Φ est antisymétrique, c'est à dire vérifie, pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$:

Contrairement à la définition 1, la définition suivante utilise le fait que $\mathcal{E}$ est euclidien.

<u>Définition 3</u> Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$. On dit que $\vec{V}$ est <u>équi-projectif</u> si, pour tout couple (P, Q) de points de $\mathcal{E}$, on a :

$$\vec{V}(Q) \cdot \vec{PQ} = \vec{V}(P) \cdot \vec{PQ}$$

<u>Proposition</u> Un champ de vecteurs $\vec{V}$ sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est équiprojectif si et seulement si il est affine et antisymétrique.

<u>Démonstration</u> Supposons $\vec{V}$ affine antisymétrique. On a alors :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \Phi(\vec{PQ}) \qquad \text{pour tous } P \text{ et } Q \in \mathcal{E}$$

donc en faisant le produit scalaire des deux membres par $\vec{PQ}$

$$\vec{V}(Q) \cdot \vec{PQ} = \vec{V}(P) \cdot \vec{PQ}$$

car Φ étant antisymétrique, $\Phi(\vec{PQ}) \cdot \vec{PQ} = 0$

Réciproquement, supposons $\vec{V}$ équiprojectif. Soit P un point fixé de $\mathcal{E}$. Pour tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, posons :

$$\Phi(\vec{u}) = \vec{V}(P + \vec{u}) - \vec{V}(P)$$

Φ est une application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même, qui a priori dépend du choix du point P (on verra qu'en fait elle n'en dépend pas). Il reste à montrer que Φ est linéaire et antisymétrique. Φ vérifie, pour tout $\vec{u} \in \mathcal{E}$:

$$\Phi(\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$\vec{V}(P + \vec{u} + \vec{v}) - \vec{V}(P) = \vec{V}(P + \vec{u} + \vec{v}) - \vec{V}(P + \vec{u}) + \vec{V}(P + \vec{u}) - \vec{V}(P)$$

et, en tenant compte de la définition de Φ :

$$\Phi(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{V}(P + \vec{u} + \vec{v}) - \vec{V}(P + \vec{u}) + \Phi(\vec{u})$$

Faisons le produit scalaire des deux membres par $\vec{v}$. Compte tenu de l'équiprojectivité de $\vec{V}$ on a

$$(\vec{V}\,(P + \vec{u} + \vec{v}) - \vec{V}\,(P + \vec{u}))\ .\ \vec{v} = 0$$

et par suite :

$$\Phi\,(\vec{u} + \vec{v})\ .\ \vec{v} = \Phi\,(\vec{u})\ .\ \vec{v}$$

En permutant $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\Phi\,(\vec{u} + \vec{v})\ .\ \vec{u} = \Phi\,(\vec{v})\ .\ \vec{u}$$

et en ajoutant :

$$\Phi\,(\vec{u})\ .\ \vec{v} + \Phi\,(\vec{v})\ .\ \vec{u} = \Phi\,(\vec{u} + \vec{v})\ .\ (\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

ce qui prouve que Φ est antisymétrique. Enfin pour prouver la linéarité de Φ , soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques éléments de $\vec{\mathscr{E}}$, λ et μ deux scalaires. On a, compte tenu de l'antisymétrie :

$$\begin{aligned} &(\Phi\,(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}) - \lambda\,\Phi\,(\vec{u}) - \mu\,\Phi\,(\vec{v}))\ .\ \vec{w} \\ &= \Phi\,(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v})\ .\ \vec{w} - \lambda\,\Phi\,(\vec{u})\ .\ \vec{w} - \mu\,\Phi\,(\vec{v})\ .\ \vec{w} \\ &= -\,(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v})\ .\ \Phi\,(\vec{w}) + \lambda\,\vec{u}\ .\ \Phi\,(\vec{w}) + \mu\,\vec{v}\ .\ \Phi\,(\vec{w}) = 0 \end{aligned}$$

Son produit scalaire par un vecteur $\vec{w}$ quelconque étant nul, le vecteur :

$$\Phi\,(\lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}) - \lambda\,\Phi\,(\vec{u}) - \mu\,\Phi\,(\vec{v})$$

est nul, ce qui prouve que Φ est linéaire. La remarque qui suit la définition 1 montre alors que Φ ne dépend pas du choix de P .

<u>Proposition</u> L'ensemble des champs de vecteurs équiprojectifs sur l'espace affine $\mathscr{E}$, de dimension n , est un espace vectoriel réel de dimension $\frac{n\,(n+1)}{2}$

Démonstration Soient $\vec{V}$ et $\vec{W}$ deux champs de vecteurs équiprojectifs, λ et μ deux scalaires réels. Le champ de vecteurs $\lambda \vec{V} + \mu \vec{W}$ est équiprojectif car, si P et Q sont deux points de $\mathcal{E}$ on a :

$$(\lambda \vec{V} + \mu \vec{W})(P) \cdot \overrightarrow{PQ} - (\lambda \vec{V} + \mu \vec{W})(Q) \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= (\lambda \vec{V}(P) + \mu \vec{W}(P)) \cdot \overrightarrow{PQ} - (\lambda \vec{V}(Q) + \mu \vec{W}(Q)) \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= \lambda (\vec{V}(P) - \vec{V}(Q)) \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu (\vec{W}(P) - \vec{W}(Q)) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

Donc l'ensemble des champs de vecteurs équiprojectifs est bien un espace vectoriel. Il reste à déterminer sa dimension. Soit P un point quelconque de $\mathcal{E}$. Tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$, est déterminé par les données suivantes :

- sa valeur $\vec{V}(P)$ au point P
- l'application linéaire antisymétrique Φ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même telle que, pour tout point Q de $\mathcal{E}$, on ait :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \Phi \cdot (\overrightarrow{PQ})$$

Il est alors facile de vérifier que l'application qui, à un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ fait correspondre le couple $(\vec{V}(P), \Phi)$ de sa valeur au point P et de l'application linéaire antisymétrique associée, est un isomorphisme de l'espace vectoriel des champs de vecteurs équiprojectifs, sur l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$ (produit de $\vec{\mathcal{E}}$, espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$, de dimension n, et de $\mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$, espace des applications linéaires antisymétriques de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$). Ceci prouve que l'espace vectoriel des champs de vecteurs équiprojectifs est de dimension :

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 . A . 3 Cas où l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est de dimension 3 .

On va voir que dans ce cas, qui est celui rencontré en Mécanique, l'expression d'un champ de vecteurs équiprojectif peut se mettre sous une forme simple, grâce à l'emploi de la notion de produit vectoriel, dont on rappelle ci-dessous la définition.

Choisissons une orientation de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, et une base orthonormée positive $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

<u>Produit vectoriel. Définition.</u> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans la base orthonormée positive $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,\vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\vec{e}_3$$

<u>Remarques et propriétés.</u>

1) Cette définition est légitime, car $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ainsi défini ne dépend pas du choix de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, pourvu qu'elle soit orthonormée et positive (cela résulte de l'interprétation géométrique ci-après du produit vectoriel). Si on remplace l'orientation initialement choisie de $\vec{\mathcal{E}}$ par l'orientation opposée, la définition du produit vectoriel est modifiée, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se changeant en son opposé.

2) L'application de $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$: $(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \wedge \vec{v}$, est bilinéaire antisymétrique ;

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

3) Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée positive, on a :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad ; \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

4) Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs éléments de $\vec{\mathcal{E}}$. On établit facilement la formule, dite du <u>double produit vectoriel</u> :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$$

, ou encore; compte tenu de 2) :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$$

<u>Produit mixte. Définition.</u> Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs éléments de $\vec{\mathcal{E}}$. On appelle produit mixte de ces trois vecteurs, et on note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, le nombre :

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Propriétés du produit mixte et du produit vectoriel.

1) L'application de $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{R}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, est trilinéaire et antisymétrique. Cela signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments (les deux autres étant fixés) et qu'elle se change en son opposée lorsqu'on permute deux de ces arguments :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = - (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = - (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = - (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

Cela résulte en effet de l'expression ci-après du produit mixte au moyen des composantes des trois vecteurs.

2) Si les composantes des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base orthonormée positive $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont respectivement (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) , (w_1, w_2, w_3) , le produit mixte de ces trois vecteurs n'est autre que le déterminant de la matrice qui représente, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même qui applique $\vec{e}_1$ sur $\vec{u}$, $\vec{e}_2$ sur $\vec{v}$ et $\vec{e}_3$ sur $\vec{w}$:

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

3) Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est nul si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants. En particulier si deux des vecteurs considérés sont colinéaires, le produit mixte est nul.

4) On peut déduire de ces propriétés une interprétation géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On remarque qu'il est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, car $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0$. Cela détermine sa direction. De plus la propriété 2) ci-dessus montre que la base (pas nécessairement orthonormée) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est de sens positif, car le déterminant de la matrice de changement de base (passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$, n'est autre que :

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right] = |\vec{u} \wedge \vec{v}|^2 > 0$$

Cela détermine donc le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Enfin pour calculer $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$, il suffit de choisir la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de telle sorte que $\vec{e}_1$ soit colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens, et que $\vec{v}$ soit dans le plan déterminé par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

En appelant α l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ (dans le plan déterminé par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ orienté du fait qu'on choisit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ comme base positive de ce plan) on a :

$$\vec{u} = |\vec{u}|\,\vec{e}_1$$
$$\vec{v} = |\vec{v}| \cos\alpha\,\vec{e}_1 + |\vec{v}| \sin\alpha\,\vec{e}_2$$

donc :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|\;|\vec{v}| \sin\alpha\,\vec{e}_3 \quad ; \quad |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\;|\vec{v}|\,|\sin\alpha|$$

La proposition suivante explique pourquoi le produit vectoriel est un outil commode pour exprimer les champs de vecteurs équiprojectifs.

<u>Proposition</u>. L'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ étant, comme ci-dessus, supposé orienté et de dimension 3, soit $\vec{\Omega}$ un vecteur élément de $\vec{\mathcal{E}}$. L'application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même, notée un peu abusivement $(\vec{\Omega} \wedge .)$:

$$\vec{v} \to \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

est linéaire antisymétrique. De plus, la correspondance $\vec{\Omega} \to (\vec{\Omega} \wedge .)$ ainsi définie, qui associe à tout $\vec{\Omega} \in \vec{\mathcal{E}}$ une application linéaire antisymétrique $(\vec{\Omega} \wedge .)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même, est un isomorphisme de $\vec{\mathcal{E}}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$ des applications linéaires antisymétriques de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même.

<u>Démonstration</u>. Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \left[\vec{\Omega}, \vec{v}, \vec{w}\right] = -\left[\vec{\Omega}, \vec{w}, \vec{v}\right] = -(\vec{\Omega} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v}$$

ce qui prouve que $(\vec{\Omega} \wedge .)$ est bien antisymétrique (sa linéarité étant évidente). D'autre part, l'application de $\vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$: $\vec{\Omega} \to (\vec{\Omega} \wedge .)$, est visiblement linéaire et injective. Il reste donc seulement à montrer qu'elle est surjective. Soit donc $\Phi \in \mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$. Rapportons $\vec{\mathcal{E}}$ à une base orthonormée positive $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La matrice qui représente Φ dans cette base, est antisymétrique. On peut donc l'écrire sous la forme :

$$(\Phi_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit alors $\vec{\Omega}$ le vecteur :

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3$$

On vérifie immédiatement que $(\vec{\Omega} \wedge .)$ est égale à Φ, ce qui établit le résultat désiré (et montre en même temps que le vecteur $\vec{\Omega}$ ainsi trouvé ne dépend pas du choix de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$). On aurait pu aussi remarquer que $\vec{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$ sont tous deux de dimension 3, car $\mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, la dimension n de $\vec{\mathcal{E}}$ étant ici égale à 3 .

<u>Corollaire : expression d'un champ de vecteurs équiprojectif</u>. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs équiprojectif sur l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, de dimension 3 . Il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ élément de $\vec{\mathcal{E}}$ unique, appelé <u>vecteur taux de rotation</u> du champ $\vec{V}$, tel que, pour tous P et $Q \in \mathcal{E}$:

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

<u>Démonstration</u> D'après 2.A.2 , il existe $\Phi \in \mathcal{L}_a(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}})$ unique tel que, pour tous P et $Q \in \mathcal{E}$:

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \Phi . (\vec{PQ})$$

Il suffit alors d'utiliser la proposition précédente.

<u>Remarque</u> Soit P un point quelconque, fixé, de l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, de dimension 3 . Tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ sur $\mathcal{E}$ est déterminé par les deux données suivantes, appelées <u>éléments de réduction</u> de $\vec{V}$ au point P :

- sa valeur $\vec{V}(P)$ au point P
- son vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$

On vérifie de plus facilement que les applications de l'espace vectoriel des champs de vecteurs équiprojectifs, dans $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\vec{V} \to \vec{V}(P) \qquad \text{et} \qquad \vec{V} \to \vec{\Omega}$$

sont linéaires, et que leur couple : $\vec{V} \to (\vec{V}(P), \vec{\Omega})$ est un isomorphisme de l'espace des champs de vecteurs équiprojectifs sur $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$. Cela confirme la valeur trouvée $\frac{n(n+1)}{2} = 6$ (puisqu'ici $n = 3$) pour la dimension de l'espace des champs de vecteurs équiprojectifs, $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ étant de dimension $3 + 3 = 6$.

A . 4 Elements caractéristiques et classification des champs de vecteurs équiprojectifs, sur un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3.

Comme dans le paragraphe précédent, on suppose $\mathcal{E}$ orienté. Voyons d'abord les cas particuliers qu'on peut rencontrer, pour les champs de vecteurs équiprojectifs.

a) Champs de vectuers constants. D'après la formule :

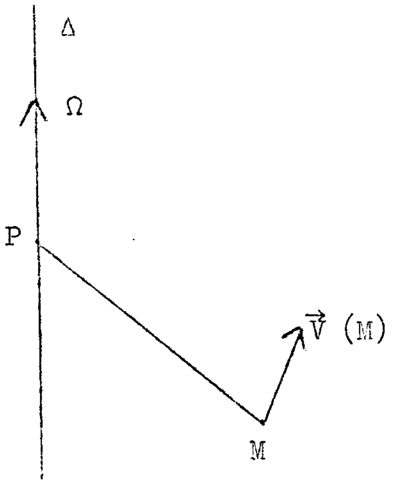
$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ est constant, si et seulement si son vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ est nul. L'ensemble des champs de vecteurs constants est visiblement un sous - espace vectoriel de dimension 3 de l'espace des champs de vecteurs équiprojectifs. On appelle parfois glisseur, ou translation infinitésimale, un champ de vecteurs constant sur $\mathcal{E}$.

b) Rotations infinitésimales. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs équiprojectif. S'il existe un point $P \in \mathcal{E}$ tel que $\vec{V}(P) = 0$, on dit que $\vec{V}$ est une rotation infinitésimale. On a alors, pour tout point $Q \in \mathcal{E}$:

$$\vec{V}(Q) = \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

donc (en supposant $\vec{V}$, non identiquement nul, donc $\vec{\Omega} \neq 0$), $\vec{V}(Q)$ est nul si et seulement si Q est situé sur la droite Δ passant par P et parallèle à $\vec{\Omega}$. Cette droite s'appelle l'axe de la rotation infinitésimale. On remarque que la valeur $\vec{V}(M)$ de $\vec{V}$ en un point M quelconque, non situé sur Δ , est un vecteur normal au plan contenant l'axe Δ et le point M , et que son module $|\vec{V}(M)|$ est proportionnel à la distance de M à l'axe Δ .



L'ensemble des fotations infinitésimales autour d'un axe passant par un point P donné, est évidemment un sous - espace de dimension 3 de l'espace des champs de vecteurs équiprojectifs (car une rotation infinitésimale dont l'axe passe par un point P donné, est caractérisée par son vecteur rotation $\vec{\Omega}$).

Par contre, si on n'impose pas à l'axe de passer par un point fixé, l'ensemble des rotations infinitésimales n'est pas un espace vectoriel.

c) Cas général. Tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$, de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ peut, en général d'une infinité de manières (si $\vec{\Omega} \neq 0$), se mettre sous forme d'une somme d'une translation infinitésimale $\vec{V}_1$ et d'une rotation infinitésimale $\vec{V}_2$. Il suffit en effet de choisir un point $P \in \mathcal{E}$ et de poser, pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\vec{V}_1(M) = \vec{V}(P)$$

$$\vec{V}_2(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{PM}$$

La décomposition de $\vec{V}$ ainsi obtenue dépend évidemment du choix du point P, sauf dans le cas particulier où $\vec{\Omega} = 0$, c'est à dire où $\vec{V}$ est une translation infinitésimale.

Parmi toutes les décompositions de ce type possibles, associées aux divers choix du point P, il en est une privilégiée unique : celle pour laquelle le module $|\vec{V}_1(M)|$ de la translation infinitésimale $\vec{V}_1$, est minimum. Pour la déterminer (et en même temps prouver son existence et son unicité) cherchons donc un point P de $\mathcal{E}$ tel que $|\vec{V}(P)|$ soit minimum. Si P et Q sont deux points de $\mathcal{E}$, on a :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

et le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$ est orthogonal à $\vec{\Omega}$. Par conséquent, si le point P est tel que $\vec{V}(P)$ soit parallèle à $\vec{\Omega}$, on a (théorème de Pythagore) :

$$|\vec{V}(Q)|^2 = |\vec{V}(P)|^2 + |\vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}|^2 \geqslant |\vec{V}(P)|^2$$

l'inégalité étant stricte si $\vec{\Omega}$ et $\vec{PQ}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent le module de la valeur du champ de vecteurs $\vec{V}$, est minimum au point P
On est donc ramené à la recherche d'un point P de $\mathcal{E}$, tel que $\vec{V}(P)$ soit parallèle à $\vec{\Omega}$, c'est à dire tel que :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(P) = 0$$

Or si P_0 est un point quelconque de $\mathcal{E}$, on a :

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(P_0) + \vec{\Omega} \wedge \vec{P_0P}$$

et la condition ci-dessus s'écrit :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(P_0) + \Omega \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{P_0P}) = 0$$

d'où, compte tenu de la formule du double produit vectoriel :

$$|\vec{\Omega}|^2 \overrightarrow{P_0P} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V}(P_0) + (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{P_0P})\vec{\Omega}$$

Cette formule montre que si $\vec{\Omega} \neq 0$, le point P défini par :

$$P = P_0 + \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(P_0)}{|\vec{\Omega}|^2}$$

répond à la question, tout autre point P' de $\mathcal{E}$ répondant à la question si et seulement si il est situé sur la droite Δ passant par P et parallèle à $\vec{\Omega}$. On a donc bien prouvé l'existence de la décomposition privilégiée, (et aussi son unicité car en déplaçant P sur la droite Δ , on ne modifie pas la décomposition de $\vec{V}$). La droite Δ est appelée <u>axe</u> du champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$. On remarque que pour cette décomposition, $\vec{V}_1(M)$ et $\vec{V}_2(M)$ sont orthogonaux en tout point M de $\mathcal{E}$.

Le cas où $\vec{\Omega} = 0$ est trivial : le champ $\vec{V}$ est alors constant ($\vec{V}(P)$ indépendant du choix de $P \in \mathcal{E}$). Toute droite parallèle à $\vec{V}$ peut être considérée comme axe de $\vec{V}$, et on a $\vec{V}_1 = \vec{V}$, $\vec{V}_2 = 0$.

Si $\vec{V}$ est une rotation infinitésimale, la recherche d'un point P tel que $|\vec{V}(P)|$ soit minimum conduit à un point P où $\vec{V}(P) = 0$, c'est à dire à un point de l'axe de la rotation infinitésimale.

En résumé, on peut énoncer :

<u>Proposition</u> Tout champ de vecteurs équiprojectif $\vec{V}$ sur l'espace euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, peut se décomposer en une somme d'une translation infinitésimale $\vec{V}_1$ et d'une rotation infinitésimale $\vec{V}_2$. Si le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ de $\vec{V}$ est nul, la seule décomposition possible est $\vec{V}_1 = \vec{V}$, $\vec{V}_2 = 0$. Si $\vec{\Omega} \neq 0$, on peut choisir arbitrairement la position de l'axe de la rotation infinitésimale $\vec{V}_2$ (la direction de cet axe, parallèle à $\vec{\Omega}$, étant imposée) et, une fois ce choix fait, la décomposition est unique. Parmi tous les choix possibles de la position de l'axe de $\vec{V}_2$, il en est un privilégié unique, pour lequel le module de $\vec{V}_1$ est minimum. Pour ce choix, $\vec{V}_1$ est parallèle à $\vec{\Omega}$, et la position correspondante de l'axe de $\vec{V}_2$ est appelée axe du champ de

Remarque 1 On montre en Mathématiques que l'espace $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs équiprojectifs sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension 3, est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Cela signifie qu'il existe une application bilinéaire antisymétrique de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, appelée crochet et notée :

$$\vec{U}, \vec{V} \to [\vec{U}, \vec{V}]$$

vérifiant l'identité de Jacobi :

$$\left[[\vec{U}, \vec{V}], \vec{W} \right] + \left[[\vec{V}, \vec{W}], \vec{U} \right] + \left[[\vec{W}, \vec{U}], \vec{V} \right] = 0$$

On montre en effet que le groupe des isométries de $\mathcal{E}$ est ce qu'on appelle en Mathématiques un groupe de Lie, et que l'ensemble des champs de vecteurs équiprojectifs (qu'on peut, en un sens intuitif, considérer comme des isométrie infinitésimales de $\mathcal{E}$) est ce qu'on appelle l'algèbre de Lie de ce groupe de Lie. L'expression du crochet est la suivante. Si $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ sont deux champs de vecteurs équiprojectifs dont les vecteurs taux de rotation sont respectivement $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$, la valeur en un point P élément de $\mathcal{E}$ du crochet $[\vec{U}_1, \vec{U}_2]$ est donnée par la formule :

$$\left[\vec{U}_1, \vec{U}_2 \right](P) = \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{U}_1(P) - \vec{\Omega}_1 \wedge U_2(P)$$

En calculant la valeur de $[\vec{U}_1, \vec{U}_2]$ en un autre point Q élément de $\mathcal{E}$, et en tenant compte de la formule du double produit vectoriel, on trouve :

$$\left[\vec{U}_1, \vec{U}_2 \right](Q) = \left[\vec{U}_1, \vec{U}_2 \right](P) + (\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{\Omega}_1) \wedge \vec{PQ}$$

ce qui montre que le vecteur taux de rotation de $[U_1, U_2]$ est $\vec{\Omega}_2 \wedge \vec{\Omega}_1$.

Les considérations ci-dessus s'étendent au cas des champs de vecteurs équiprojectifs sur un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n quelconque.

Remarque 2 Certains auteurs appellent "torseurs" les champs de vecteurs équiprojectifs sur un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension 3. Il nous semble préférable de réserver ce nom aux éléments du dual de l'espace vectoriel des champs de vecteurs équiprojectifs, afin d'éviter certaines confusions. On verra cependant qu'il existe un isomorphisme naturel de l'espace vectoriel des champs de vecteurs équiprojectifs sur son dual, et qu'il est donc possible d'identifier ces deux espaces (ce qui explique la terminologie mentionnée).

Remarque 3 Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs équiprojectif sur un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3. Supposons qu'il existe une droite Δ telle qu'en tout point M de Δ, $\vec{V}(M)$ soit parallèle à Δ. Alors Δ est l'axe de $\vec{V}$ (démonstration laissée au lecteur).

Remarque 4 D'une manière analogue, supposons qu'il existe un plan affine Π de $\mathcal{E}$ tel qu'en tout point M de Π, $\vec{V}(M)$ soit parallèle à Π. Alors le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$ de $\vec{V}$ est nul ou perpendiculaire à Π, et pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\vec{V}(M)$ est parallèle à Π (démonstration facile laissée au lecteur). De plus, si $\vec{V}$ n'est pas constant, c'est à dire si $\vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{V}$ est nécessairement une rotation infinitésimale, car $\vec{V}$ est nul sur l'axe.