UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS VI

D. E. U. G. S S M 2

NOTES POUR L'ETUDE DU COURS DE MECANIQUE

C. MARLE

Année 1978 - 1979

CHAPITRE I : Le temps et l'espace en mécanique classique.

1 . 1 Préambule

La Mécanique est une science qui donne une schématisation mathématique de certains phénomènes physiques, les phénomènes de mouvement des corps dans l'espace au cours du temps. Cette schématisation mathématique comporte une partie descriptive, la Cinématique, et une partie explicative (c'est à dire où l'on relie les mouvements à leurs causes), la Dynamique.

Les principes et les lois de la Mécanique ont été progressivement dégagés de l'expérience. Plusieurs fois au cours de l'histoire de cette science, on a été amené à réviser, ou même à changer totalement ces principes, afin de mieux rendre compte de la réalité expérimentale, ou d'englober de nouveaux phénomènes dans leur domaine d'application. Il existe donc plusieurs Mécaniques, qui rendent compte de la réalité avec différents degrés de précision, et ont différents domaines d'application. Il sera question ici seulement de la Mécanique classique. Les principales autres Mécaniques sont la Mécanique relativiste, et la Mécanique quantique, traditionnellement rattachées au cours de Physique.

1 . 2 Les notions d'espace physique et de temps

L'observation nous conduit à considérer les phénomènes réels comme se déroulant au cours du "temps" , et ayant lieu dans l' "espace physique" . Notre intuition sensible nous fait apparaître le temps comme un continuum à une dimension, muni d'une direction, la "flèche du temps" , dirigée du passé vers l'avenir, et l'espace physique comme un continuum à trois dimensions. L'adjectif "physique" est utilisé ici pour éviter les confusions, car le mot espace est abondamment employé dans des sens différents, en mathématiques. Nous ne nous étendrons pas davantage sur la nature du temps et de l'espace physique (considérations pourtant interessantes, mais qui seraient du domaine de la Philosophie), et nous contenterons d'indiquer leurs schématisations mathématiques.

L'existence de phénomènes physiques périodiques, considérés comme réguliers (émission d'ondes électromagnétiques par des atomes excités) donne la possibilité de graduer le temps. D'autre part on n'a pas de raison de supposer le temps cyclique, ni non plus limité vers le passé ou le futur. Enfin on admet en Mécanique classique que le temps est universel, c'est à dire qu'on peut, au moins conceptuellement, installer des horloges en tous les points de l'espace physique, et les synchroniser. D'où le principe :

Principe 1 Le temps peut être mathématiquement schématisé par un espace affine réel, orienté, muni d'une unité de durée, de dimension 1, noté $\mathcal{T}$.

L'existence de corps physiques considérés comme indéformables, que l'on peut déplacer et utiliser comme des règles pour comparer entre elles les distances séparant des couples de points de l'espace physique, et le fait que certains phénomènes (rayons lumineux) nous donnent la notion intuitive de ligne droite et l'impression qu'on peut, à partir d'un point quelconque, tracer de telles lignes dans toutes les directions et les prolonger indéfiniment, conduisent au principe :

Principe 2 A tout instant $T \in \mathcal{T}$, l'espace physique peut être mathématiquement schématisé par un espace affine réel euclidien $\mathcal{E}_T$, de dimension 3.

On remarquera que contrairement au temps, l'espace physique n'est pas universel : Soient $\mathcal{E}_{T_1}$ et $\mathcal{E}_{T_2}$ les espaces affines qui schématisent mathématiquement l'espace physique à deux instants distincts T_1 et T_2. Ils sont bien entendu isomorphes, et on peut les identifier, par exemple en choisissant un repère orthonormé de chacun d'eux et en considérant l'isométrie qui applique le repère du premier sur celui du second. Mais cette identification est possible d'une infinité de manières, et l'expérience ne permet pas de choisir parmi elles.

Définition On appelle espace - temps l'ensemble $\mathcal{U} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_T$ somme des $\mathcal{E}_T$ (c'est à dire réunion ensembliste des $\mathcal{E}_T$, considérés comme disjoints). On peut considérer $\mathcal{U}$ comme l'ensemble des couples (T, X) d'un instant $T \in \mathcal{T}$ et d'un point de l'espace physique $X \in \mathcal{E}_T$. De tels couples (T, X) seront appelés événements.

Remarque Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel euclidien de dimension 3. Pour chaque $T \in \mathcal{T}$, choisissons une isométrie de $\mathcal{E}_T$ sur $\mathcal{E}$, grâce à laquelle nous identifions ces espaces affines. On peut ainsi identifier l'espace - temps $\mathcal{U}$ avec le produit cartésien $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$. Mais cette construction dépend du choix arbitraire, pour chaque $T \in \mathcal{T}$, d'un isomorphisme de $\mathcal{E}_T$ sur $\mathcal{E}$. C'est pourquoi il n'est pas exact de dire, comme le font certains ouvrages, que l'espace - temps est le produit cartésien $\mathcal{T} \times \mathcal{E}$ d'un espace affine orienté $\mathcal{T}$ de dimension 1, et d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. En fait l'espace - temps $\mathcal{U}$ possède non une structure de produit cartésien, mais ce qu'on appelle en Mathématiques une structure d'espace fibré, de base $\mathcal{T}$ et de fibres $\mathcal{E}_T$.

$\mathcal{T}$ étant un espace affine de dimension 1 orienté, est muni d'une relation d'ordre naturelle, la relation d'antériorité : T_1 antérieur à T_2, notation $T_1 \leq T_2$. On peut donc parler d'intervalle ouvert $]T_1, T_2[$ de $\mathcal{T}$ (ou semi ouvert, ou fermé) comme on le fait pour les intervalles de $\mathbb{R}$. Cette notion est employée dans la suite.

Définition On dit qu'on a choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps, ayant pour domaine de temps l'intervalle ouvert $]T_1, T_2[\subset \mathcal{T}$, (pour fixer les idées, car on pourrait prendre aussi un intervalle semi - ouvert, ou fermé, ou prendre $\mathcal{T}$ entier) lorsque, pour chaque $T \in]T_1, T_2[$ on a choisi une isométrie de $\mathcal{E}_T$ sur un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension 3, indépendant de T.

Comme indiqué dans la Remarque ci-dessus, le choix d'un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps permet d'identifier une partie $\sum_{T \in]T_1, T_2[} \mathcal{E}_T$ de l'espace - temps $\mathcal{U}$ (qui peut être $\mathcal{U}$ entier si le domaine de temps du référentiel est $\mathcal{T}$ entier) avec un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$. On dit alors que $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$ est l'espace - temps rapporté au référentiel $\mathcal{R}$.

Remarques 1°) Le choix d'un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps, de domaine de temps $]T_1, T_2[$, s'appelle en Mathématiques le choix d'une trivialisatio de l'espace fibré $\mathcal{U}$, au dessus de $]T_1, T_2[$.

2°) En pratique on n'utilise que des référentiels admissibles de l'espace - temps, pour lesquels le choix, pour tout $T \in]T_1, T_2[$, d'une isométrie de $\mathcal{E}_T$ sur $\mathcal{E}$ n'est pas absolument quelconque, mais doit respecter la structure différentiable de $\mathcal{U}$. Cela signifie, intuitivement, que le choix des isométries de chaque $\mathcal{E}_T$ sur $\mathcal{E}$ doit dépendre de T d'une manière suffisament régulière. Nous ne chercherons pas à préciser plus complètement cette notion, car cela nous entraînerait un peu loin, mais nous verrons (paragraphe 1 . 4) quelles restrictions on doit apporter aux changements de repères de l'espace - temps (donc aussi aux changements de référentiels) afin qu'ils soient admissibles. Connaissant un référentiel donné, considéré comme admissible, on saura alors quels sont les autres référentiels admissibles.

3°) $\mathcal{T}$ étant simplement connexe (puisqu'isomorphe à une droite) on montre qu'il existe un référentiel admissible ayant $\mathcal{T}$ entier pour domaine de temps. Il n'en serait pas nécessairement de même si le temps $\mathcal{T}$ était cyclique (isomorphe à un cercle).

4°) La nécessité d'orienter le temps résulte clairement de notre expérience sensible, qui nous fait percevoir de manière très différente le pass et le futur. Par contre, les phénomènes étudiés en Mécanique classique ne semblent pas privilégier une orientation de l'espace physique. On dira qu'on a orienté l'espace physique lorsque, pour chaque valeur de $T \in \mathcal{T}$, on a choisi une des deux orientations de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_T$ associé à l'espace affine $\mathcal{E}_T$, considérée comme positive, ce choix devant (en termes intuitifs) dépendre régulièrement de T, comme pour la définition d'un référentiel admissible.

On montre (toujours en remarquant que $\mathcal{T}$ est simplement connexe) qu'il est toujours possible d'orienter l'espace et qu'il n'existe que deux orientations distinctes (car lorsque, pour une certaine valeur T_0 de T, on a choisi une orientation de $\vec{\mathcal{E}}_{T_0}$, cela détermine par continuité l'orientation qu'on doit choisir pour tous les autres $\vec{\mathcal{E}}_T$). On peut, par exemple choisir l'oreintation de l'espace physique en choisissant un référentiel admissible, l'espace - temps rapporté à ce référentiel étant le produit cartésien $]\,T_1\,,\,T_2\,[\,\times\,\mathcal{E}$, et en choisissant une orientation de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. Mais il faut remarquer que ce choix, fait par commodité mathématique (notamment pour pouvoir utiliser le produit vectoriel) résulte d'une convention arbitraire, non de l'expérience.

1 . 3 Repères de l'espace - temps

L'expérience ne permet de reconnaître et d'étudier le mouvement d'un corps que relativement à d'autres corps, considérés comme fixes. Un observateur pourra par exemple après avoir vérifié que le sol et les murs de son laboratoire forment un solide indéformable, tracer sur ceux-ci un trièdre, qu'il utilisera comme un système d'axes de coordonnées. Il se munira d'autre part d'une horloge lui permettant de mesurer l'écoulement du temps. Il pourra alors étudier le mouvement d'un corps physique (par exemple la Lune) relativement à son laboratoire, en repérant un certain nombre de points matériels attachés à ce corps (tels que les centres d'un certain nombre de cratères de la Lune), et en déterminant, en fonction du temps, la succession des valeurs des coordonnées de ces points, dans le repère choisi. Si, au lieu d'un trièdre attaché à son laboratoire, l'observateur utilise un trièdre formé par les droites joignant le centre du Soleil à trois étoiles lointaines, le mouvement étudié lui paraîtra différent.

L'absence d'un choix naturel, qui serait fait une fois pour toutes, d'un repère de l'espace physique valable à tout instant, est la cause profonde pour laquelle, dans le paragraphe précédent, nous avons dû considérer comme distincts les espaces affines $\mathcal{E}_T$ schématisant l'espace physique pour différents instants $T \in \mathcal{T}$. L'observateur considéré ci-dessus, en traçant sur le sol et les murs de son laboratoire un trièdre qu'il utilise comme repère pendant toute la durée de son expérience, ne fait pas autre chose qu'identifier entre eux tous les espaces $\mathcal{E}_T$ pour les T éléments d'un certain intervalle $]\,T_1, T_2\,[\,\subset \mathcal{T}$. Cela revient à identifier tous ces espaces à l'un d'entre eux, qu'on peut désigner par $\mathcal{E}$; par conséquent en faisant cela, l'observateur choisit un référentiel de l'espace - temps, au sens où on a défini cette notion dans le paragraphe précédent.

Cet observateur fait même un peu plus, puisqu'il choisit le repère affine auquel rapporter $\mathcal{E}$, et la manière de mesurer le temps : il choisit un repère de l'espace - temps (définition ci-dessous).

Unités. Pour l'instant, nous considérons le choix des unités de temps et de longueur comme fixé. Ce choix résulte de l'observation de certains phénomènes physiques : par exemple, la seconde, unité de temps, est par définition "la durée de 9 1 9 2 6 3 1 7 7 0 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 1 3 3" ; le mètre est "la longueur égale à 1 650 763 , 73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation entre les niveaux $2\,P_{10}$ et $5\,D_5$ de l'atome de Krypton 86".

Le temps $\mathcal{T}$ étant orienté, et une unité de temps étant choisie, on dispose d'un vecteur $\vec{e}_0$ de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{T}$, unitaire et d'orientation positive (c'est à dire dirigé vers le futur). Par conséquent, pour définir un repère affine de $\mathcal{T}$, il suffit de choisir une origine des temps $O_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$.

D'autre part, parmi les repères affines de l'espace $\mathcal{E}_T$, nous considérerons seulement les repères orthonormés, consistant en une origine $O_{\mathcal{E}_T} \in \mathcal{E}_T$ et en trois vecteurs unitaires $\vec{e}_{1\,T}$, $\vec{e}_{2\,T}$, $\vec{e}_{3\,T}$ de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}_T$, deux à deux orthogonaux. Cette restriction n'est pas fondamentale, mais seulement dictée par la commodité.

Définition Choisir un repère $\widehat{R}$ de l'espace - temps, ayant pour domaine de temps l'intervalle ouvert $]\,T_1\,,\,T_2\,[\, \subset \mathcal{T}$ (on pourrait aussi prendre un intervalle semi-ouvert ou fermé, ou prendre $\mathcal{T}$ entier) consiste à choisir :

1°) Une origine des temps $O_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ (et, par suite, un repère affine du temps $\mathcal{T}$, puisqu'on dispose déjà du vecteur unitaire $\vec{e}_0$).

2°) Pour chaque $T \in \,]\,T_1\,,\,T_2\,[$, un repère affine orthonormé $(O_{\mathcal{E}_T}\,,\,\vec{e}_{1T}\,,\,\vec{e}_{2T}\,,\,\vec{e}_{3T})$ de $\mathcal{E}_T$.

Si (T, X) $(T \in \,]\,T_1\,,\,T_2\,[\,,\, X \in \mathcal{E}_T)$ est un événement, on appelle coordonnées de temps et d'espace de cet événement dans le repère $\widehat{R}$, le quadruplet de nombres réels (t, x_1, x_2, x_3), où t est l'abscisse de T , appelée aussi date de T , dans le repère $(O_{\mathcal{T}}\,,\,\vec{e}_0)$ de $\mathcal{T}$, et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de X dans le repère $(O_{\mathcal{E}_T}\,,\,\vec{e}_{1T}\,,\,\vec{e}_{2T}\,,\,\vec{e}_{3T})$ de $\mathcal{E}_T$:

$$\begin{cases} T = O_{\mathcal{T}} + t\,\vec{e}_0 \\ X = O_{\mathcal{E}_T} + x_1\,\vec{e}_{1T} + x_2\,\vec{e}_{2T} + x_3\,\vec{e}_{3T} \end{cases}$$

<u>Remarques</u> 1°) Le choix d'un repère $\hat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps, de domaine de temps $]\, T_1 , T_2 \,[$, détermine le choix d'un référentiel de l'espace - temps, de même domaine de temps, dit référentiel associé et noté $\mathcal{R}$. En effet, soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère $(O_{\mathcal{E}} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$. Convenons d'identifier, pour chaque $T \in \,]\, T_1 , T_2 \,[$, l'espace affine $\mathcal{E}_T$ et l'espace affine $\mathcal{E}$, au moyen de l'isométrie qui applique le point de $\mathcal{E}_T$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère $(O_{\mathcal{E}_T} , \vec{e}_{1T} , \vec{e}_{2T} , \vec{e}_{3T})$, sur le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère $(O_{\mathcal{E}} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$. On a ainsi défini un référentiel de l'espace - temps, au sens de la définition du paragraphe précédent.

2°) En fait, choisir un repère $\hat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps revient à choisir d'abord un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps, puis à choisir une origine des temps $O_{\mathcal{T}}$ et un repère affine $(O_{\mathcal{E}} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$. En effet cela détermine alors, pour tout élément T du domaine de temps du référentiel $\mathcal{R}$, un repère affine $(O_{\mathcal{E}_T} , \vec{e}_{1T} , \vec{e}_{2T} , \vec{e}_{3T})$ de $\mathcal{E}_T$, obtenu en prenant l'image réciproque du repère affine $(O_{\mathcal{E}} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$ par l'isométrie de $\mathcal{E}_T$ sur $\mathcal{E}$ donnée par le choix du référentiel $\mathcal{R}$.

3°) Comme on l'a déjà remarqué pour le cas des référentiels, on se limite en pratique aux repères <u>admissibles</u> de l'espace - temps. On verra dans le paragraphe suivant quelles restrictions apporter aux changements de repères pour obtenir, à partir d'un repère admissible, d'autres repères admissibles aussi.

<u>1 . 4 Changement de repère de l'espace - temps.</u>

Considérons deux repères de l'espace - temps : l'un, $\hat{\mathcal{R}}$, défini par une origine $O_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ et, pour tout $T \in \,]\, T_1 , T_2 \,[$, par un repère affine orthonormé $(O_{\mathcal{E}_T} , \vec{e}_{1T} , \vec{e}_{2T} , \vec{e}_{3T})$ de $\mathcal{E}_T$; l'autre, $\hat{\mathcal{R}}'$, par une origine $O'_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ et, pour tout $T \in \,]\, T_1 , T_2 \,[$, par un repère orthonormé $(O'_{\mathcal{E}_T} , \vec{e}\,'_{1T} , \vec{e}\,'_{2T} , \vec{e}\,'_{3T})$ de $\mathcal{E}_T$.

On peut écrire :

$$O'_{\mathcal{T}} = O_{\mathcal{T}} + \theta\, \vec{e}_0$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est la <u>date</u> de la nouvelle origine des temps $O'_{\mathcal{T}}$ relativement au repère affine $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ du temps $\mathcal{T}$. Si on désigne par t et t' les date d'un même instant $T \in \,]T_1, T_2[$, dans les repères affines, respectivemen $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ et $(O'_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$, on a :

$$t = \theta + t'$$

Pour chaque $T \in \,]T_1, T_2[$, $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}_T} O'_{\mathcal{E}_T}}$ est un vecteur élément de l'esp vectoriel associé à $\mathcal{E}_T$. En désignant ses composantes, dans la base $(\vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$ de cet espace vectoriel, par $A_1(T)$, $A_2(T)$, $A_3(T)$, or peut écrire :

$$O'_{\mathcal{E}_T} = O_{\mathcal{E}_T} + A_1(T)\,\vec{e}_{1T} + A_2(T)\,\vec{e}_{2T} + A_3(T)\,\vec{e}_{3T}$$

De même pour chaque $T \in \,]T_1, T_2[$, $(\vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$ et $(\vec{e}\,'_{1T}, \vec{e}\,'_{2T}, \vec{e}\,'_{3T})$ sont deux bases orthonormées d'un même espace vectoriel euclidien. Il existe donc une matrice orthogonale $B(T)$ dont les colonnes so les composantes de $\vec{e}\,'_{1T}, \vec{e}\,'_{2T}, \vec{e}\,'_{3T}$ dans la base $(\vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$:

$$B(T) = \begin{pmatrix} B_{11}(T) & B_{12}(T) & B_{13}(T) \\ B_{21}(T) & B_{22}(T) & B_{23}(T) \\ B_{31}(T) & B_{32}(T) & B_{33}(T) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}\,'_{iT} = B_{1i}(T)\,\vec{e}_{1T} + B_{2i}(T)\,\vec{e}_{2T} + B_{3i}(T)\,\vec{e}_{3T} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

Si on désigne par (x_1, x_2, x_3) d'une part, (x'_1, x'_2, x'_3) d'autre part, les coordonnées d'un même point X de $\mathcal{E}_T$, respectivement dans les repères $(O_{\mathcal{E}_T}, \vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$ et $(O'_{\mathcal{E}_T}, \vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$, on a (pour $1 \leqslant i \leqslant 3$

$$x_i = A_i(T) + B_{i1}(T)\,x'_1 + B_{i2}(T)\,x'_2 + B_{i3}(T)\,x'_3$$

ce qui, en notation matricielle, s'écrit :

$$x = A(T) + B(T)\,x'$$

où $A(T)$, x et x' désignent les vecteurs colonnes :

$$A(T) = \begin{pmatrix} A_1 (T) \\ A_2 (T) \\ A_3 (T) \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

On sait d'autre part que la correspondance entre les instants $T \in]T_1, T_2[$ et leurs dates t' dans le repère $(O'_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ de $\mathcal{T}$ est bijective. En considérant T comme fonction de t' on peut donc considérer A et B comme des fonctions (respectivement vectorielles et matricielles) de la variable réelle t' ; on les notera $A(t')$ et $B(t')$ pour ne pas alourdir l'écriture (bien qu'en fait ce soient des fonctions composées).

Les formules donnant les coordonnées de temps et d'espace (t, x_1, x_2, x_3) d'un événement (T, X) dans le repère $\widehat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps, en fonction des coordonnées (t', x'_1, x'_2, x'_3) de ce même événement dans le repère $\widehat{\mathcal{R}'}$, s'écrivent donc :

$$t = \theta + t'$$

$$x_i = A_i(t') + B_{i1}(t')\, x'_1 + B_{i2}(t')\, x'_2 + B_{i3}(t')\, x'_3 \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

la seconde égalité pouvant s'écrire sous forme matricielle

$$x = A(t') + B(t')\, x'$$

Remarque L'espace - temps rapporté au réferentiel $\mathcal{R}$ associé au repère $\widehat{\mathcal{R}}$, est un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$; (t, x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées d'un point de ce produit cartésien, représentant l'événement (T, X), lorsque $]T_1, T_2[$ est rapporté au repère affine $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ et $\mathcal{E}$ au repère affine $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ définis par le choix du repère $\widehat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps. De même l'espace - temps rapporté au référentiel $\mathcal{R}'$ associé au repère $\widehat{\mathcal{R}'}$, est un autre produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}'$ ($\mathcal{E}'$ étant un espace affine euclidien de dimensions 3, qui peut être identifié à $\mathcal{E}$, mais pas obligatoirement). On peut alors considérer les formules ci-dessus comme exprimant la bijection de $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}'$ sur $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$, qui associe un point représentant un événement lorsque l'espace - temps est rapporté au référentiel $\mathcal{R}$, au point représentant le même événement lorsque l'espace-temps est rapporté à $\mathcal{R}'$.

Définition On dit que le changement de repère de l'espace - temps consistant à passer du repère $\widehat{\mathcal{R}}$ au repère $\widehat{\mathcal{R}'}$ est de classe C^k (resp. de classe C^{k+1} par morceaux) si les fonctions $A(t')$ et $B(t')$, de la variable réelle t', sont de classe C^k (resp. de classe C^{k+1} par morceaux) (k entier ≥ 0).

<u>Rappel</u> Une fonction (qui peut être à valeurs scalaires, vectorielles, ma cielles ...) d'une variable réelle t' est dite de classe C^k (k entier ≥ si toutes ses composantes sont k fois continûment dérivables sur tout son dom de définition ; on dit qu'elle est de classe C^o si elle est continue. On di qu'elle est de classe C^{k+1} par morceaux (k entier ≥ 0) si elle est continue et si tout intervalle fermé borné $[t'_a , t'_b]$ contenu dans le domaine de dé nition de la fonction peut être subdivisé en un nombre fini d'intervalles $[t'_a , t'_1]$, $[t'_1 \; t'_2]$, ... $[t'_{n-1} \; t'_n]$, $[t'_n \; t'_b]$, à l'intérieur de quels les composantes de la fonction sont de classe C^{k+1} , leurs dérivées $1^{ère}$, $2^{ème}$, ... k + 1 ^{ième} pouvant avoir, à la traversée des valeurs t'_2, .. des discontinuités de <u>première espèce</u> (ce qui signifie que les limites à droi et à gauche de ces dérivées existent).

<u>Définition</u> Selon le problème de mécanique étudié, on considérera comme <u>admi ble</u> un <u>changement de repère de l'espace - temps</u> de classe C^k , ou de classe C^{k+1} par morceaux, l'entier k dépendant du problème étudié. Le plus souvent, les changements de repère admissibles seront les changements de repère de cla C^2. C'est ce qui sera fait dans la suite, sauf mention explicite d'autre chos

<u>Remarque</u> La définition répond en grande partie à la question soulevée dans deux paragraphes précédents : quand dit - on qu'un repère de l'espace - temps est admissible ? On supposera <u>donné</u> un repère admissible particulier, et on dira qu'un autre repère est admissible lorsque le changement de repère corres pondant est admissible. La cohérence d'une telle convention est assurée car i est facile de vérifier que si le passage d'un repère $\widehat{R}$ à un autre $\widehat{R}'$, ain que le passage de $\widehat{R}'$ à $\widehat{R}''$, sont admissibles, alors le passage inverse (de $\widehat{R}'$ à $\widehat{R}$) et le composé des deux (de $\widehat{R}$ à $\widehat{R}''$) sont également admissib

Annexe au chapitre I

Rappels d'algèbre linéaire

On suppose connue la notion d'espace vectoriel réel, ainsi que ses principales propriétés élémentaires (dimension, base, etc ...)

Espace affine Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel réel. Un espace affine réel, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$, est un ensemble $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une application de $\mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{E}$, notée :

$$(M , \vec{V}) \rightarrow M + \vec{V} \qquad (M \in \mathcal{E} , \vec{V} \in \vec{\mathcal{E}})$$

vérifiant les propriétés :

- pour tout $\vec{V} \in \vec{\mathcal{E}}$ fixé, $M \rightarrow M + \vec{V}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$
- si $M \in \mathcal{E}$, $\vec{V}$ et $\vec{W} \in \vec{\mathcal{E}}$, $(M + \vec{V}) + \vec{W} = M + (\vec{V} + \vec{W})$
- pour tout $M \in \mathcal{E}$ fixé, $\vec{V} \rightarrow M + \vec{V}$ est une bijection de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$.

On remarque qu'il résulte de ces propriétés : pour tout $M \in \mathcal{E}$, $M + \vec{0} = M$ ($\vec{0}$ origine de $\vec{\mathcal{E}}$). Si M et N sont deux points de $\mathcal{E}$, on désigne par $\vec{MN}$ le vecteur élément de $\vec{\mathcal{E}}$ unique tel que $N = M + \vec{MN}$.

Dimension et repère affine On dit que l'espace affine réel $\mathcal{E}$ est de dimension finie n, si l'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$ est de dimension finie n. Soit alors $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$, et O un point de $\mathcal{E}$. On dit que $(O, \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ il existe un n - uplé unique de nombres réels $(x_1, \dots x_n)$, appelés coordonnées de M dans le repère affine $(O, \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ tel que :

$$M = O + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

Espace vectoriel et espace affine euclidiens On dit que l'espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$, de dimension finie n, est euclidien lorsqu'on l'a muni d'une forme bilinéaire (application de $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}}$ dans $\mathbb{R}$ linéaire en chacun de ses arguments), appelée produit scalaire et notée $(\vec{V} , \vec{W}) \rightarrow \vec{V} . \vec{W}$, symétrique ($\vec{V} . \vec{W} = \vec{W} . \vec{V}$ pour tous $\vec{V}$ et $\vec{W} \in \vec{\mathcal{E}}$) et définie positive ($\vec{V} . \vec{V} > 0$ pour tout $\vec{V} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\vec{V} \neq \vec{0}$)

On dit qu'un espace affine réel $\mathcal{E}$, de dimension finie n , est euclidien lorsque l'espace vectoriel réel associé $\vec{\mathcal{E}}$ est euclidien. On peut alors définir la distance d (M , N) de deux points M et N de $\mathcal{E}$ par

$$d(M, N) = |\overrightarrow{MN}| = (\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MN})^{\frac{1}{2}}$$

Soit $(0, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ un repère de $\mathcal{E}$. On dit que ce repère est orthonormé si la base associée $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ est orthonormée, c'est à dire vérifie $\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (1 \leqslant i , j \leqslant n)$. Il existe toujours des bases orthonormées d'un espace vectoriel réel euclidien, donc toujours des repères orthonormés d'un espace affine réel euclidien.

Matrice de changement de base Soient $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \ldots \vec{e}'_n)$ deux bases de l'espace vectoriel réel E (de dimension finie n). Pour chaque i ($1 \leqslant i \leqslant n$) il existe un n - uplé unique de nombres réels $(a_{1i} , \ldots a_{ni})$ tels que

$$\vec{e}'_i = a_{1i} \vec{e}_1 + a_{2i} \vec{e}_2 + \ldots + a_{ni} \vec{e}_n$$

La matrice n x n :

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est dite matrice de changement de base, faisant passer de la base $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ à la base $(\vec{e}'_1, \ldots \vec{e}'_n)$. Soit $\vec{V}$ un élément de $\vec{\mathcal{E}}$, $(V_1, \ldots V_n)$ et $(V'_1, \ldots V'_n)$ ses composantes, respectivement dans les bases $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n)$. On a :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + \ldots + V_n \vec{e}_n = V'_1 \vec{e}'_1 + \ldots V'_n \vec{e}'_n$$

d'où

$$V_i = a_{i1} V'_1 + a_{i2} V'_2 + \ldots + a_{in} V'_n$$

qu'on peut écrire en notation matricielle

$$V = a V'$$

où V et V' désignent les "vecteurs colonnes" (éléments de $\mathbb{R}^n$) :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \qquad V' = \begin{pmatrix} V'_1 \\ \vdots \\ V'_n \end{pmatrix}$$

en faisant la convention habituelle pour le produit des matrices (lignes de matrice de gauche, par colonnes de celle de droite).

Groupe orthogonal Supposons l'espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$ euclidien et la ba $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ orthonormée.
Alors l'autre base $(\vec{e}'_1, \dots \vec{e}'_n)$ est orthonormée si et seulement si la matric $a = (a_{ij})$, qui fait passer de la base $(e_1, \dots e_n)$ à la base $(e'_1, \dots e'_n)$, vérifie :

$$a_{1i}\, a_{1j} + a_{2i}\, a_{2j} + \dots a_{ni}\, a_{nj} = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n)$$

ce qui s'écrit, en désignant par ${}^t a$ la matrice transposée de a (déduite d en permutant lignes et colonnes)

$${}^t a = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$${}^t a \; a = a \; {}^t a = I$$

I étant la matrice unité, ou encore :

$$a^{-1} = {}^t a$$

Les matrices réelles n x n vérifiant cette propriété sont visiblement rég (comme toute matrice de changement de base) et forment un groupe (pour la l composition de produit des matrices) appelé groupe orthogonal et désigné pa O (n).

Orientation. Soit E un espace vectoriel réel, de dimension finie $n > 0$. dit que deux bases $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \dots \vec{e}'_n)$ de E sont de même sens (res de sens contraires) si la matrice de changement de base $a = (a_{ij})$ a un déte nant positif (resp. négatif). La propriété d'être de même sens est une rela d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, et cet ensemble se partition deux classes d'équivalence. On dit qu'on a orienté E lorsqu'on a choisi u ces deux classes. Les bases appartenant à cette classe seront dites positiv directes, celles appartenant à l'autre classe négatives ou inverses.