# Algèbre et Géométrie dans le monde symplectique
# III. Structures de Poisson

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

10 juin 2008

## Table des matières

# 1 Les structures de Poisson : propriétés générales

## 1.1 Pourquoi les structures de Poisson ?

On a vu que la réduction symplectique d'une variété symplectique $(M, \omega)$ comportait deux étapes :

1. restriction à une sous-variété de rang constant $N$ de $M$,
2. quotient de $N$ par son feuilletage caractéristique.

La structure symplectique n'est rétablie quà l'issue de la seconde étape. Elle n'est pas stable sous l'efffet d'une de ces deux opérations, effectuée seule :

– la restriction à une sous-variété $N$ transforme la forme symplectique de $M$ en une 2-forme sur $N$, *fermée,* mais *pas forcément non dégénérée* ; Lorsqu'elle est de rang constant, la 2-forme fermée ainsi induite sur $N$ est dite *présymplectique*.

– le quotient par un feuilletage, appliqué à une variété symplectique, fait apparaître une notion nouvelle, celle de *structure de Poisson*.

#### 1.1.1 Origine des structures de Poisson

Le *crochet de Poisson* de deux fonctions définies sur le fibré cotangent $T^*N$ à une variété $N$ a été découvert par Siméon Denis Poisson en 1809 [21]. Lagrange et Poisson l'ont employé pour résoudre le problème de variation des constantes d'intégration. Ils n'ont considéré cependant que le crochet des fonctions coordonnées, pas celui de deux fonctions quelconques, et n'ont pas mentionné la propriété la plus importante de ce crochet : l'identité de Jacobi, découverte par Carl Gustav Jacobi [7].

Ce n'est qu'au cours de la seconde moitié du XX-ème siècle que la notion de structure de Poisson, sous sa forme générale, a été identifiée et systématiquement étudiée.

L'étude approfondie des structures de Poisson est due à André Lichnerowicz [16] et indépendamment Alexander Kirillov [8], Alan Weinstein [27].

## 1.2 Définition et premières propriétés

**1.2.1 Définition.** Une *structure de Poisson* sur une variété différentiable $M$ est déterminée par la donnée d'une loi de composition sur l'espace $C^\infty(M, \mathbb{R})$, appelée *crochet,* $(f, g) \mapsto \{f, g\}$, vérifiant les propriété :

– bilinéarité,

– antisymétrie, $\{g, f\} = -\{f, g\}$,

– identité de Jacobi,

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0\,,$$

– identité de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}\,.$$

**1.2.2 Remarques.** D'après les trois premières propriétés $C^\infty(M, \mathbb{R})$, avec le crochet pour loi de composition, est une algèbre de Lie.

La troisième propriété a pour conséquence : la valeur $\{f, g\}(x)$ en un point $x \in M$ du crochet des fonctions $f$ et $g$ ne dépend que de $df(x)$ et de $dg(x)$, de manière bilinéaire antisymétrique. La proposition suivante en découle.

**1.2.3 Proposition.** *Sur une variété $M$ munie d'une structure de Poisson, il existe un unique champ de bivecteurs $\Lambda \in A^2(M)$, deux fois contravariant et antisymétrique, appelé* tenseur de Poisson*, tel que le crochet $\{f,g\}$ de deux fonctions ait pour expression*

$$\{f,g\} = \Lambda(df,dg)\,.$$

*On dit alors que $(M,\Lambda)$ est une* variété de Poisson.

**1.2.4 Observation importante** Soit $\Lambda$ un champ de tenseurs deux fois contravariant et antisymétrique défini sur une variété différentiable $M$. On définit une loi de composition sur $C^\infty(M,\mathbb{R})$ en posant, pour $f$ et $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

$$\{f,g\} = \Lambda(df,dg)\,.$$

Cette loi de composition est bilinéaire, antisymétrique, et elle vérifie l'identité de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}\,.$$

Mais *elle ne vérifie pas nécessairement l'identité de Jacobi*, de sorte que $(M,\Lambda)$ *n'est en général pas* une variété de Poisson.

**1.2.5 Proposition.** *Soit $\Lambda$ un champ de tenseurs deux fois contravariant et antisymétrique défini sur une variété différentiable $M$. On définit une loi de composition sur $C^\infty(M,\mathbb{R})$ en posant*

$$\{f,g\} = \Lambda(df,dg)\,, \quad f \text{ et } g \in C^\infty(M,\mathbb{R})\,.$$

*Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Cette loi de composition vérifie l'identité de Jacobi, donc fait de $(M,\Lambda)$ une variété de Poisson.*
2. *Le champ de bivecteurs $\Lambda$ vérifie*

   $$[\Lambda,\Lambda] = 0\,,$$

   *le crochet figurant au membre de gauche de cette égalité étant le* crochet de Schouten-Nijenhuis.

**1.2.6 Commentaire** Le crochet de Schouten-Nijenhuis est une loi de composition sur l'algèbre $A(M)$ des champs de multivecteurs, qui prolonge de manière naturelle le crochet des champs de vecteurs, défini sur $A^1(M)$. On verra plus loin sa définition et ses propriétés.

**1.2.7 Exemples de variétés de Poisson**

**1. Premier exemple.** Toute variété symplectique $(M,\Omega)$ possède une structure de Poisson associée à sa structure symplectique. Son tenseur de Poisson $\Lambda$ est l'image de la forme symplectique $\omega$ par le prolongement aux puissances extérieures de l'isomorphisme

$$\Lambda^\sharp : T^*M \to TM\,, \quad \text{inverse de} \quad \omega^\flat : TM \to TM\,, \quad v \mapsto \omega^\flat(v) = -i(v)\omega\,.$$

$\Lambda$ ainsi défini vérifie $[\Lambda,\Lambda] = 0$ parce que $\omega$ vérifie $d\omega = 0$.

Inversement, si $(M,\Lambda$ est une variété de Poisson dont le tenseur $\Lambda$ est partout de rang $\dim M$, $M$ possède une forme symplectique $\omega$ dont $\Lambda$ est le tenseur de Poisson associé.

**2. Second exemple.** Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie et $\mathcal{G}^*$ l'espace vetoriel dual. Le crochet $[\ ,\ ]$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est une loi de composition sur les fonctions linéaires sur $\mathcal{G}^*$, puisque l'espace formé par ces fonctions est le dual de $\mathcal{G}^*$, c'est-à-dire le bidual de $\mathcal{G}$, qu'on identifie naturellement à $\mathcal{G}$.

On prolonge cette loi de composition à l'espace de toutes les fonctions différentiables sur $\mathcal{G}$ en posant

$$\{f,g\}(\xi) = \left\langle \xi, \left[df(\xi), dg(\xi)\right]\right\rangle, \quad \xi \in \mathcal{G}^*, \quad f \text{ et } g \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R}).$$

On vérifie aisément que ce crochet définit bien une structure de Poisson sur $\mathcal{G}^*$, appelée *structure de Kirillov–Kostant–Souriau*. Découverte par Sophus Lie, elle a été redécouverte (150 ans plus tard !) par ces auteurs.

**1.2.8 Définition.** Soient $(M_1, \Lambda_1)$ et $(M_2, \Lambda_2)$ deux variétés de Poisson. Une application différentiable $\varphi : M_1 \to M_2$ est dite *de Poisson* si pour tout couple $(f,\ g)$ de fonctions éléments de $C^\infty(M_2, \mathbb{R})$

$$\{f\circ\varphi, g\circ\varphi\}_{M_1} = \{f,g\}_{M_2}\circ\varphi, \quad \text{ou} \quad \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} = \varphi^*\{f,g\}_{M_2}.$$

**1.2.9 Proposition.** *Soient $(M_1, \Lambda_1)$, $(M_2, \Lambda_2)$ et $(M_3, \Lambda_3)$ trois variétés de Poisson, $\varphi : M_1 \to M_2$ et $\psi : M_2 \to M_3$ des applications différentiables.*

*Si $\varphi$ et $\psi$ sont de Poisson, $\psi\circ\varphi : M_1 \to M_3$ est de Poisson.*

*Si $\varphi$ est surjective et de Poisson et $\psi\circ\varphi$ de Poisson, alors $\psi$ est de Poisson. En particulier si $\varphi : M_1 \to M_1$ est un difféomorphisme et est de Poisson, $\varphi^{-1}$ est de Poisson.*

**1.2.10 Définition.** Soit $(M, \Lambda)$ une variété de Poisson. À chaque fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on associe le champ de vecteurs $X_f = \Lambda^\sharp(df)$, appelé*champ de hamiltonien $f$*.

**1.2.11 Proposition.** *Soient $f$ et $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. On a*

$$\{f,g\} = i(X_f)dg = -i(X_g)df = \Lambda(df, dg).$$

*On a aussi*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

*De plus, soit $(t,x) \mapsto \Phi(t,x) = \Phi_t(x)$ le flot de $X_f$ Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t$ est une application de Poisson (d'un ouvert de $M$ sur un autre ouvert de $M$).*

*Démonstration.* Le lecteur verra aisément que les deux denières propriétés sont des conséquences de l'identité de Jacobi. ☐

# 2 Feuilletage symplectique d'une variété de Poisson

## 2.1 Espaces et champ caractéristiques

**2.1.1 Définition.** Soit $(M, \Lambda)$ une variété de Poisson. On appelle *espace caractéristique* en un point $x \in M$ le sous-espace vectoriel $\Lambda^\sharp(T_x^*M)$ de l'espace tangent $T_xM$, formé par les valeurs en $x$ de tous les champs de vecteurs hamiltoniens possibles.

**2.1.2 Remarque.** Le sous-ensemble $\Lambda^\sharp(T^*M)$ du fibré tangent $TM$ *n'est en général pas* un sous-fibré vectoriel, car son rang en chaque point $x$ (dimension de $\Lambda^\sharp(T_x^*M)$) dépend en général du point $x$ considéré. Cependant, il est complètement intégrable en un sens généralisé, comme le montre le théorème suivant.

**2.1.3 Théorème.** *Le champ de directions caractéristiques $\Lambda^\sharp(T^*M)$ est complètement intégrable au sens de Stefan et Sussmann, et définit un feuilletage de Stefan, appelé* feuilletage symlectique *de la variété de Poisson $(M, \Lambda)$.*

**2.1.4 Commentaire.** Le feuilletage symplectique d'une variété de Poisson $(M,\Lambda)$ n'est pas un feuilletage au sens usuel, car les feuilles ne sont en général pas toutes de la même dimension. Ses propriétés sont :

1. par chaque point de $M$ passe une feuille unique, sous-vériété immergée de $M$, tangente en chacun de ses points $x$ à l'espace caractéristique $\Lambda^\sharp(T^*_xM)$ ;
2. les feuilles symplectiques forment une partition de $M$ ;
3. chacune de ces feuilles possède une structure de variété symplectique telle que son injection canonique dans $(M,\Lambda)$ soit de Poisson ;
4. la valeur en un point $x\in M$ du crochet $\{f,g\}$ de deux fonctions ne dépend que de la restriction de ces deux fonctions à la feuille symplectique passant par $x$.

## 2.2 Exemples de feuilletages symplectiques

**2.2.1 Premier exemple.** Le feuilletage symplectique d'une variété symplectique connexe $(M,\omega)$, munie de sa structure de Poisson associée, comporte une seule feuille symplectique, *la variété $M$ entière.*

**2.2.2 Second exemple.** Soit $G$ un groupe de Lie connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de $\mathcal{G}$. On a vu que $\mathcal{G}^*$ possède une structure de Poisson naturelle. Ses feuilles symplectiques sont les *orbites de la représentation coadjointe* de $G$.

## 2.3 La structure de Poisson transverse

**2.3.1 Proposition.** *Soit $(M,\Lambda)$ une variété de Poisson et $S$ une de ses feuilles symplectiques. Il existe une variété de Poisson $(Q,\Lambda_Q)$, de dimension* $\dim M-\dim S$*, un point $s\in Q$ tel que $\Lambda_Q(s)=0$, un voisinage $U$ de $S$ dans $M$ et un difféomorphisme de Poisson $\varphi:U\to S\times Q$ muni de la structure de Poisson produit ($S$ étant munie de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique), tel que pour tout $x\in S$, $\varphi(x)=(x,s)$.*

*Le germe en $s$ de la structure de Poisson de $Q$ est déterminé de manière unique et appelé* structure de Poisson transverse *à la feuille symplectique $S$.*

**2.3.2 Corollaire** (Analogue du théorème de Darboux)**.** *Soit $p$ un point de la variété de Poisson $(M,\Lambda)$, $n$ la dimension de $M$ et $2l$ le rang de $\Lambda(p)$. Il existe une carte de $M$ dont le domaine est un voisinage ouvert $U$ de $p$ et dont les fonctions coordonnées $x_1,\dots,x_l,\ y_1,\dots,y_l,\ z_1,\dots,z_{n-2l}$ vérifient*

– *pour* $1\le i,\ j\le l,\ 1\le k\le n-2l,$

$$\{x_i,x_j\}=\{y_i,y_j\}=0\,,\quad \{x_i,y_j\}=\delta_{ij}\,,\quad \{x_i,z_k\}=\{y_i,z_k\}=0\,,$$

– *pour $1\le k,\ m\le n-2l$, les $\{z_k,z_m\}$ ne sont fonction que des variables $z_1,\dots,z_{n-2l}$ et sont nuls au point $p$.*

## 2.4 Linéarisation locale d'une structure de Poisson

**2.4.1 Proposition.** *Soit $(M,\Lambda)$ une variété de Poisson et $p\in M$ tel que $\Lambda(p)=0$. L'espace cotangent $T^*_pM$ possède une structure d'algèbre de Lie dont le crochet est défini par*

$$[\xi,\eta]=d\big(\{f,g\}\big)(p)\,,$$

*où $\xi$ et $\eta\in T^*_pM$, et où $f$ et $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ sont deux fonctions telles que $df(p)=\xi$ et $dg(p)=\eta$.*

*Démonstration.* Ainsi défini $[\xi, \eta]$ ne dépend que de $df(p)$ et de $dg(p)$, non du choix de $f$ et $g$, parce que $\Lambda(p) = 0$ (simple calcul en coordonnées locales). L'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Poisson implique l'identité de Jacobi pour le crochet $[\ ,\ ]$. $\square$

**2.4.2 Corollaire.** *Soit $(M, \Lambda)$ une variété de Poisson et $p \in M$ tel que $\Lambda(p) = 0$. L'espace tangent $T_pM$ possède une structure de Poisson linéaire, déterminée par le jet d'ordre 1 de la structure de Poisson de $M$ au point $p$, appelée la* linéarisée *de la structure de Poisson de $M$ au point $p$.*

*Démonstration.* L'espace tangent $T_pM$ peut être considéré comme le dual de l'espace cotangent $T_p^*M$, qui possède une structure d'algèbre de Lie, donc $T_pM$ est naturellement muni d'une structure de Poisson linéaire. $\square$

**2.4.3 Remarque.** L'équivalence d'une structure de Poisson $\Lambda$ et de sa linéarisée en un point où $\Lambda$ s'annule a donné lieu à de nombreux travaux, notamment de Jack Conn, Pierre Molino.

**2.4.4 Linéarisation de la structure transverse.** Soit $(M, \Lambda)$ une variété de Poisson, $p \in M$ tel que $\Lambda(p)$ soit de rang $2k \geq 0$, et $S$ la feuille symplectique passant par $p$. On a vu qu'un voisinage $U$ de $S$ dans $M$ pouvait être identifié, par un difféomorphisme de Poisson, au produit $S \times T$ de la feuille symplectique $S$ et d'une variété de Poisson $(T, \Lambda_T)$, la feuille symplectique $S$ étant identifiée à $S \times \{s\}$, $s$ étant un point de $T$ tel que $\Lambda_T(s) = 0$.

Linéariser la structure de Poisson transverse à la feuille $S$, c'est linéariser la structure de Poisson $\Lambda_T$ au point $s$.

L'espace vectoriel qui porte cette structure de Poisson linéaire est l'espace normal $N_x = T_xM/T_xS$ à la feuille symplectique $S$ en un quelconque de ses points $x$.

# 3 Quotients de variétés de Poisson

## 3.1 Submersions de Poisson

**3.1.1 Proposition.** *Soit $(M, \Lambda)$ une variété de Poisson et $\pi : M \to N$ une submersion surjective. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout couple $(f, g)$ de fonctions éléments de $C^\infty(N, \mathbb{R})$, le crochet de Poisson $\{f \circ \pi, g \circ \pi\}$ est constant sur chaque fibre $\pi^{-1}(x)$, $x \in N$.*
2. *Il exite sur $N$ une structure de Poisson $\Lambda_N$ telle que $\pi : M \to N$ soit une application de Poisson.*

*Lorsque c'est le cas, cette structure de Poisson sur $N$ est unique.*

**3.1.2 Remarque.** Ces conditions sont satisfaites, notamment, lorsque pour tout point $x \in N$, $\pi^{-1}(x)$ est connexe et que $\ker T\pi$ est localement engendré, au voisinage de chaque point de $M$, par des champs de vecteurs hamiltoniens.

## 3.2 Cas des variétés symplectiques

La proposition précédente prend une forme particulièrement simple lorsque $(M, \Lambda)$ est une variété symplectique $(M, \omega)$, munie de la structure de Poisson associée à $\omega$, et que $\pi : M \to N$ est la projection de $M$ sur la variété des feuilles d'un feuilletage régulier $\mathcal{F}$ de $M$, engendré par un sous-fibré complètement intégrable $\ker T\pi$ de $TM$. On a dans ce cas le théorème suivant.

**3.2.1 Théorème** (P. Libermann). *Soit $(M,\omega)$ une variété symplectique et $\mathcal{F}$ un feuilletage de $M$. On suppose ce feuilletage simple, c'est-à-dire tel que l'enseble $N$ des feuilles possède une structure de variété différentiable telle que la projection canonique $\pi : M \to N$ soit une submersion. On a alors $\mathcal{F} = \ker(T\pi)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe sur $N$ une structure de Poisson pour laquelle $\pi : M \to N$ est une application de Poisson.*
2. *Le feuilletage $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{T}\pi)$ est* symplectiquement complet, *c'est-à-dire tel que le crochet de Poisson de deux intégrales premières de ce feuilletage soit une intégrale première.*
3. *L'orthogonal symplectique* $\mathrm{orth}\bigl(\ker(T\pi)\bigr)$ *est complètement intégrable.*

**3.2.2 Paires duales.** Dans les hypothèses du théorème précédent, on a une variété symplectique $(M,\omega)$ munie de deux feuilletages symplectiquement orthogonaux, définis par les deux sous-fibrés complètement intégrables $\ker T\pi$ et $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$. Le premier a été supposé simple puisque $\pi : M \to N = M/\ker T\pi$ est la projection sur la variété des feuilles.

Si le deuxième feuilletage, défini par $\mathrm{orth}(\ker T\pi)$, est lui aussi simple (il est toujours possible, localement, de se ramener à ce cas), on a une seconde projection $\varpi : M \to P = M/\mathrm{orth}(\ker T\pi)$, et il existe sur $P$ une structure de Poisson unique $\Lambda_P$ telle que $\varpi$ soit une application de Poisson.

A. Weinstein [27] appelle *paire duale* la paire de variétés de Poisson formée par $(N,\Lambda_N)$ et $(P,\Lambda_P)$. Il a montré que leurs structures de Poisson transverses, en deux points $\pi(x)$ et $\varpi(x)$, images par $\pi$ et par $\varpi$ d'un même point $x \in M$, sont anti-isomorphes.

## 3.3 Exemple : quotients du fibré cotangent.

Soit $G$ un groupe de Lie connexe. On munit son fibré cotangent $T^*G$ de sa forme symplectique canonique $\omega_G$.

Les actions de $G$ sur lui-même par translation :

$$L : (g,h) \mapsto L_g(h) = gh\,, \quad R : (h,g) \mapsto R_g(h) = hg\,, \quad g \text{ et } h \in G\,,$$

se relèvent en des actions de $G$ sut $TG$ et sur $T^*G$

$$TL : (g,X) \mapsto TL_g(X)\,, \quad TR : (X,g) \mapsto TR_g(X)\,,$$

$$\widehat{L} : (g,\xi) \mapsto \widehat{L}_g(\xi) = {}^t(TL_{g^{-1}})(\xi)\,, \quad \widehat{R} : (\xi,g) \mapsto \widehat{R}_g(\xi) = {}^t(TR_{g^{-1}})(\xi)\,.$$
$$\bigl\langle {}^t(TL_g)(\xi),X\bigr\rangle = \bigl\langle \xi, TL_g(X)\bigr\rangle\,, \quad \bigl\langle {}^t(TR_g)(\xi),X\bigr\rangle = \bigl\langle \xi, TR_g(X)\bigr\rangle\,.$$

**3.3.1 Proposition.** *Les actions de $G$ sur $T^*G$, à gauche $\widehat{L}$ et à droite $\widehat{R}$, commutent et sont hamiltoniennes. Leurs orbites sont les images, respectivement, des* 1*-formes* invariantes à gauche *et des* 1*-formes* invariantes à droite *sur $G$. Leurs moments $J_L$ et $J_R$ ont pour expression*

$$J_L(\xi) = \widehat{R}_{h^{-1}}(\xi)\,, \quad J_R(\xi) = \widehat{L}_{h^{-1}}(\xi)\,, \quad \xi \in T^*_hG\,.$$

**3.3.2 Remarque.** $J_L(\xi)$ et $J_R(\xi)$ sont les valeurs, à l'élément neutre $e$, respectivement, de la 1-forme invariante *à droite* et de la 1-forme invariante *à gauche,* qui prennent la valeur $\xi$ au point $h$.

En conséquence, $J_L$ est constant sur chaque orbite de l'action $\widehat{R}$ et $J_R$ est constant sur chaque orbite de l'action $\widehat{L}$.

**3.3.3 Proposition.** *Le moment $J_L$ est équivariant pour les actions de $G$ à gauche, $\widehat{L}$ sur $T^*G$, et coadjointe sur $T_e^*G$ identifié à $\mathcal{G}^*$*

$$(g,\zeta) \mapsto \mathrm{Ad}_g^*(\zeta) = \widehat{L}_g \circ \widehat{R}_{g^{-1}}(\zeta)\,, \quad g \in G\,,\ \zeta \in T_e^*G\,.$$

*Le moment $J_R$ est équivariant pour les actions à droite de $G$, $\widehat{R}$ sur $T^*G$, et coadjointe modifiée (pour devenir une action à droite) sur $T_e^*G$ identifié à $\mathcal{G}^*$*

$$(\zeta,g) \mapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*(\zeta) = \widehat{L}_{g^{-1}} \circ \widehat{R}_g(\zeta)\,, \quad g \in G\,,\ \zeta \in T_e^*G\,.$$

*Les espaces tangents en un point $\xi \in T^*G$ aux orbites de ce point par les actions $\widehat{L}$ et $\widehat{R}$ sont symplectiquement orthogonaux.*

**3.3.4 Proposition.** *Le moment $J_R$ est une application de Poisson lorsque $T^*G$ est muni de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique, et $T_e^*G$, identifié à $\mathcal{G}^*$, de la structure de Lie-Poisson de Kirillov–Kostant–Souriau*

$$\{f,g\}^+(\zeta) = \big\langle \zeta, \big[df(\zeta), dg(\zeta)\big]\big\rangle\,.$$

*Le moment $J_L$ est une application de Poisson lorsque $T^*G$ est muni de la structure de Poisson associée à sa structure symplectique, et $T_e^*G$, identifié à $\mathcal{G}^*$, de* l'opposée *de la structure de Lie-Poisson de Kirillov–Kostant–Souriau*

$$\{f,g\}^-(\zeta) = -\big\langle \zeta, \big[df(\zeta), dg(\zeta)\big]\big\rangle\,.$$

*L'espace cotangent $T_e^*G$, avec ces deux structures de Poisson opposées forme une* paire duale.

# 4 Le crochet de Schouten-Nijenhuis

## 4.1 Multivecteurs et formes

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m$. Pour chaque entier $p \geq 1$, on note $\Omega^p(m)$ l'espace des formes différentielles $C^\infty$ de degré $p$ et $A^p(M)$ l'espace des $p$-multivecteurs $C^\infty$, c'est-à-dire des champs de tenseurs $p$-fois covariants antisymétriques sur $M$. $A^1(M)$ est l'espace des champs de vecteurs sur $M$.

En raison de l'antisymétrie, $A^p(M) = \Omega^p(M) = 0$ pour $p > m$. Par convention, on pose

$$A^p(M) = \Omega^p(M) = 0 \text{ pour } p < 0\,,\ A^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})\,.$$

Munis du produit extérieur comme loi de composition,

$$A(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p(M) \quad \text{et} \quad \Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega^p(M)$$

sont des algèbres graduées.

**4.1.1 Rappel : Produit extérieur.** Soient $\eta \in \Omega^p(M)$, $\zeta \in \Omega^q(M)$. Pour chaque $x \in M$, $\eta(x)$ et $\zeta(x)$ sont des formes, respectivement $p$-multilinéaire et $q$-multilinéaire, antisymétriques sur $T_xM$.

De même, soient $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$. Pour chaque $x \in M$, $P(x)$ et $Q(x)$ sont des formes, respectivement $p$-multilinéaire et $q$-multilinéaire, antisymétriques sur $T_x^*M$.

Le produit extérieur $\eta \wedge \zeta$ est une forme différentielle de degré $p+q$ donnée par la formule, dans laquelle $X_1, \dots, X_{p+q}$ sont des champs de vecteurs,

$$\eta \wedge \zeta(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(p,q)} \varepsilon(\sigma) \eta(X_\sigma(1), \dots, X_{\sigma(p)}) \zeta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) .$$

On a noté $\mathcal{S}(p,q)$ est l'ensemble des permutations $\sigma$ de $\{1, \dots, p+q\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q) ,$$

et $\varepsilon(\sigma) = 1$ ou $-1$ selon que $\sigma$ est paire ou impaire.

Le produit extérieur $P \wedge Q \in A^{p+q}(M)$ de deux champs de multivecteurs est défini par des formules analogues, les $p+q$ champs de vecteurs $X_i$ étant remplacés par $p+q$ formes différentielles de degré 1.

Si $f \in \Omega^0(M) = A^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$f \wedge \zeta = f\zeta , \quad f \wedge Q = fQ , \quad \zeta \in \Omega^q(M) , \ Q \in A^q(M) .$$

Le produit extérieur est associatif et

$$\zeta \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta , \quad \eta \in \Omega^p(M) , \quad \zeta \in \Omega^q(M) .$$

**4.1.2 Produit intérieur par un champ de vecteurs.** Le *produit intérieur* $i(X)\eta$ de $\eta \in \Omega^p(M)$ par $X \in A^1(M)$ est la forme élément de $\Omega^{p-1}(M)$ (avec $X_i \in A^1(M)$, $1 \leq i \leq p-1$),

$$i(X)\eta(X_1, \dots, X_{p-1}) = \eta(X, X_1, \dots, X_{p-1}) ,$$

**4.1.3 Produit intérieur par un champ de multivecteurs.** On définit $i(P)\zeta$, pour $P \in A^p(M)$, $\zeta \in \Omega^q(M)$ d'abord lorsque $P = X_1 \wedge \dots \wedge X_p$ avec $X_i \in A^1(M)$,

$$i(X_1 \wedge \dots \wedge X_p)\zeta = i(X_1) \circ \dots i(X_p)\zeta .$$

Tout $P \in A(M)$ étant somme d'un nombre fini de $p$-vecteurs décomposables, la définition de $i(P)\zeta$ dans le cas général en découle, en prolongeant par linéarité.

**4.1.4 Quelques propriétés.** Si $f \in A^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\zeta \in \Omega^q(M)$, $i(f)\zeta = f\zeta$.

Si $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$, $\zeta \in \Omega^r(M)$,

$$i(P \wedge Q)\zeta = i(P) \circ i(Q)\zeta .$$

Le produit intérieur *par un champ de vecteurs* $X \in A^1(M)$ est une *dérivation* de l'algèbre extérieure $\Omega(M)$ : si $\eta \in \Omega^p(M)$, $\zeta \in \Omega^q(M)$,

$$i(X)(\eta \wedge \zeta) = \big(i(X)\eta\big) \wedge \zeta + (-1)^p \eta \wedge \big(i(X)\zeta\big) .$$

Mais le produit intérieur par $P \in A^p(M)$, avec $p > 1$, *n'est pas une dérivation* de $\Omega(M)$.

**4.1.5 Définition.** Le *couplage* de $\eta \in \Omega^p(M)$ avec $P \in A^p(M)$, noté $\langle \eta, P \rangle$, est la fonction élément de $C^\infty(M)$, ainsi définie :

Si $P = X_1 \wedge \dots \wedge X_p$, avec $X_i \in A^1(M)$, et $\eta = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$, avec $\alpha_i \in \Omega^1(M)$,

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, X_1 \wedge \dots \wedge X_p \rangle = \det\big(\alpha_i(X_j)\big) ;$$

Le cas général s'en déduit en prolongeant par continuité.

**4.1.6 Produit intérieur et couplage.** Si $\eta \in \Omega^{p+q}(M)$, $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$,

$$\big\langle i(P)\eta, Q\big\rangle = (-1)^{(p-1)p/2}\langle \eta, P \wedge Q\rangle \,.$$

## 4.2 Définition et propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis

**4.2.1 Théorème.** *Le crochet des champs de vecteurs, loi de composition interne bien connue sur $A^1(M)$, se prolonge de manière unique en une loi de composition bilibéaire graduée sur $AM)$, notée $(P,Q) \mapsto [P,Q]$ et appelée* crochet de Schouten-Nijenhuis, *vérifiant les propriétés :*

*si $f$ et $g \in A^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$, $[f,g] = 0$ ;*

*si $X \in A^1(M)$ est un champ de vecteurs et $Q \in A^q(M)$, $[X,Q] = \mathcal{L}(X)Q \in A^q(M)$ est la* dérivée de Lie *de $Q$ selon $X$ ;*

*si $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$, $Q_1 \in A^{q_1}(M)$, $Q_2 \in A^{q_2}(M)$,*

$$[P,Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P] \in A^{p+q-1}(M)\,;$$
$$[P,Q_1 \wedge Q_2] = [P,Q_1] \wedge Q_2 + (-1)^{(p-1)q_1} Q_1 \wedge [P,Q_2]\,.$$

**4.2.2 Proposition.** *Munie du crochet de Schouten-Nijenhuis, $A(M)$ est une* algèbre de Lie graduée *: si $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$ on a* l'identité de Jacobi graduée,

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}\big[[P,Q],R\big] + (-1)^{(q-1)(p-1)}\big[[Q,R],P\big] + (-1)^{(r-1)(q-1)}\big[[R,P],Q\big] = 0\,.$$

**4.2.3 Proposition** (Relation avec la différentielle extérieure)**.** *Le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P,Q] \in A^{p+q-1}(M)$ de $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$ vérifie l'égalité, qui peut servir à le définir,*

$$i\big([P,Q]\big)\eta = \big[[i(P),d], i(Q)\big]\eta \quad \text{pour tout } \eta \in \Omega(M)\,,$$

*le crochet au membre de droite étant le crochet des endomorphismes gradués de $\Omega(M)$.*

# 5 Le crochet des formes sur une variété de Poisson

## 5.1 Rappel : endomorphismes gradués.

Soient $f : \Omega(M) \to \Omega(M)$ un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel gradué $\Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega^p(M)$.

On dit que $f$ est un *endomorphisme gradué de degré $d \in \mathbb{Z}$* si pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f\big(\big(\Omega^p(M)\big) \subset \Omega^{p+d}(M)$.

Le *crochet* des endomorphismes gradués $f_1$ de degré $d_1$ et $f_2$ de degré $d_2$ est l'endomorphisme gradué de degré $d_1 + d_2$

$$[f_1, f_2] = f_1 \circ f_2 + (-1)^{d_1 d_2} f_2 \circ f_1\,.$$

Ces définitions sont d'ailleurs valables pour les endomorphismes d'un espace vectoriel gradué quelconque.

## 5.2 Crochet des formes de degré 1

**5.2.1 Théorème** (Crochet des 1-formes)**.** *Soit* $(M,\Lambda)$ *une variété de Poisson. Il existe sur l'espace* $\Omega^1(M)$ *des* 1*-formes différentielles sur M une loi de composition interne, bilinéaire, unique, appelée* crochet des 1-formes *et notée* $(\eta,\zeta)\mapsto[\eta,\zeta]$*, ayant les propriétés suivantes.*

*Relation avec le crochet de Poisson des fonctions :*

$$[df,dg]=d\{f,g\}\,,\quad f \text{ et } g\in C^\infty(M,\mathbb{R})\,.$$

*Si* $\eta$ *et* $\zeta\in\Omega^1(M)$ *et* $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$*,*

$$[\eta,f\zeta]=\bigl(\Lambda(\eta,df)\bigr)\zeta+f[\eta,\zeta]\,.$$

*Antisymétrie*

$$[\eta,\zeta]=-[\zeta,\eta]\,.$$

*Identité de Jacobi*

$$\bigl[\eta,[\zeta,\theta]\bigr]+\bigl[\zeta,[\theta,\eta]\bigr]+\bigl[\theta,[\eta,\zeta]\bigr]=0\,.$$

**5.2.2 Une formule pour le crochet de deux 1-formes** Soient $(M,\Lambda)$ une variété de Poisson, $\eta$ et $\zeta\in\Omega^1(M)$, et $X\in A^1(M)$. On a

$$\bigl\langle[\eta,\zeta],X\bigr\rangle=\bigl\langle\eta,[\Lambda,\langle\zeta,X\rangle]\bigr\rangle-\bigl\langle\zeta,[\Lambda,\langle\eta,X\rangle]\bigr\rangle-[\Lambda,X](\eta,\zeta)\,,$$

le crochet figurant au membre de gauche étant celui des 1-formes, et celui figurant au membre de droite le crochet de Schouten-Nijenhuis.

## 5.3 Crochet des formes de tous degrés

**5.3.1 Théorème** (Crochet des formes de tous degrés)**.** *Le crochet des* 1*-formes sur la variété de Poisson* $(M,\Lambda)$ *se prolonge, de manière unique, en une loi de composition bilinéaire sur l'algèbre extérieure* $\Omega(M)$ *des formes différentielles de tous degrés, avec des propriétés identiques à celles du crochet de Schouten-Nijenhuis. Notamment :*

*si* $f$ *et* $g\in\Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$*,* $[f,g]=0$ *;*

*si* $\eta$ *et* $\zeta\in\Omega^1(M)$*,* $[\eta,\zeta]$ *est le crochet des* 1*-formes déjà défini ;*

*si* $\eta\in\Omega^p(M)$*,* $\zeta\in\Omega^q(M)$*,* $\zeta_1\in\Omega^{q_1}(M)$*,* $\zeta_2\in\Omega^{q_2}(M)$*,*

$$[\eta,\zeta]=-(-1)^{(p-1)(q-1)}[\zeta,\eta]\in\Omega^{p+q-1}(M)\,;$$
$$[\eta,\zeta_1\wedge\zeta_2]=[\eta,\zeta_1]\wedge\zeta_2+(-1)^{(p-1)q_1}\zeta_1\wedge[\eta,\zeta_2]\,.$$

## 5.4 La cohomologie de Poisson-Lichnerowicz

**5.4.1 Théorème** (A. Lichnerowicz)**.** *Soit* $(M,\Lambda)$ *une variété de Poisson. Pour tout* $P\in A(M)$*, posons*

$$\delta_\Lambda(P)=[\Lambda,P]\,.$$

*L'opérateur* $\delta_\Lambda:A(M)\to A(M)$ *aisi défini est homogène de degré* 1 *et vérifie*

$$\delta_\Lambda\circ\delta_\Lambda=0\,.$$

*Démonstration.* Cela résulte de l'identité de Jacobi graduée et du fait que le tenseur de Poisson $\Lambda$ vérifie $[\Lambda,\Lambda]=0$. □

**5.4.2 Définition.** La *cohomologie de Poisson-Lichnerowicz* est la cohomologie, déterminée par $\delta_\Lambda$, dont les cochaînes sont les éléments de $A^p(M)$, $p \in \mathbb{N}$.

**5.4.3 Proposition.** *L'application* $\Lambda^\sharp : \Omega(M) \to A(M)$ *détermine un* anti-homomorphisme *de la cohomologie de De Rham dans la cohomologie de Poisson-Lichnerowicz.*

# 6 Algébroïdes de Lie

## 6.1 Définition et exemples

Pour toute variété différentiable $M$, le crochet de Schouten fait de l'espace $A(M)$ des multivecteurs une algèbre de Lie graduée. Lorsque $(M,\Lambda)$ est une variété de Poisson, le crochet des formes fait de $\Omega(M)$ une algèbre de Lie graduée.

Cela n'est pas dû au hasard : c'est une conséquence du fait que le fibré tangent $TM$ à une variété différentiable $M$, et le fibré cotangent $T^*M$ à une variété de Poisson $(M,\Lambda)$, possèent tous deux une *structure d'algébroïde de Lie*.

La notion d'algébroïde de Lie est due à *Jean Pradines*. Nous allons brièvemenbt la définir et en indiquer quelques propriétés.

**6.1.1 Définition.** Un *algébroïde de Lie* est un espace fibré vectoriel $(E,\pi,M)$ ayant pour base une variété différentiable $M$, muni de la structure déterminée par
- une loi de composition $(s_1,s_2) \mapsto \{s_1,s_2\}$ sur l'espace $\Gamma(\pi)$ des sections $C^\infty$ de $\pi$, faisant de cet espace une algèbre de Lie ;
- un morphisme de fibrés vectoriels $\rho : E \to TM$ au dessus de l'identité de $M$,appelé *ancre*, tel que $s \mapsto \rho \circ s$ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\Gamma(\pi)$muni de $\{\ ,\ \}$ dans $A^1(M)$ muni du crochet des champs de vecteurs ;

  pour tous $s_1$ et $s_2 \in \Gamma(\pi)$, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$,

$$\{s_1, fs_2\} = f\{s_1,s_2\} + \bigl(i(\rho\circ s_1)df\bigr)s_2\,.$$

### 6.1.2 Exemples d'algébroïdes de Lie.

**1.** Le fibré tangent $(TM,\tau_M,M)$ à une variété différentiable $M$, avec pour ancre l'application identique $\mathrm{id}_{TM}$, est un algébroïde de Lie, la loi de composition sur $\Gamma(\tau_M) = A^1(M)$ étant le crochet des champs de vecteurs.

**2.** Un sous-fibré vectoriel complètement intégrable $V$ de $(TM,\tau_M,M)$, avec pour ancre l'injection canonique de $V$ dans $TM$, est un algébroïde de Lie.

**3.** Une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie est un algébroïde de Lie dont la base $M$ est réduite à un singleton.

**4.** Le fibré cotangent $\pi_M : T^*M \to M$ à une variété de Poisson $(M,\Lambda)$, avec le crochet des 1-formes différentielles pour loi de composition sur $\Gamma(\pi_M) = \Omega^1(M)$, est un algébroïde de Lie ayant pour ancre l'application $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$.

## 6.2 Quelques propriétés des algébroïdes de Lie

Soit $(\pi : E \to M)$ un algébroïde de Lie d'ancre $\rho$. On note $(\varpi : E^* \to M)$ le fibré vectoriel dual.

Comme dans le cas où l'algébroïde de Lie était le fibré tangent $\tau_M : TM \to M$ et son dual le fibré cotangent $\pi_M : T^*M \to M$, pour tout entier $p > 0$ on note $A^p(M,E)$ l'espace des $p$-multivecteurs sur $E$, dont les éléments sont les sections $C^\infty$ de $\pi : \bigwedge^p E \to M$, et $\Omega^p(M,E)$ l'espace des $p$-formes sur $E$, dont les éléments sont les sections $C^\infty$ de $\varpi : \bigwedge^p E^* \to M$. Par convention $A^0(M,E) = \Omega^0(M,E) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ et, pour $p < 0$, $A^p(M,E) = \Omega^p(M,E) = 0$..

Les sommes directes $A(M,E) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p(M,E)$ et $\Omega(M,E) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega^p(M,E)$, avec le produit extérieur pour loi de composition, sont des algèbres graduées associatives.

Sur les algèbres $A(M,E)$ et $\Omega(M,E)$, dont la loi de composition est le produit extérieur, on définit le *produit intérieur* et le *couplage* par les mêmes formules que dans le cas des algèbres des multivecteurs et des formes différentielles sur une variété. On a dee plus la proposiion suivante.

**6.2.1 Proposition.** *Chaque élément $s$ de $A^1(M,E)$ détermine une dérivation de degré* 0 *de $\Omega(M,E)$, appelée* dérivée de Lie selon *$s$ et notée $\mathcal{L}_\rho(s)$, ayant essentiellement les mêmes propriétés que la dérivée de Lie selon un champ de vecteurs. Pour $f \in \Omega^0(M,E) = C^\infty(M,\mathbb{R})$, on a*

$$\mathcal{L}_\rho(s)f = \mathcal{L}(\rho\circ s)f = \langle df, \rho\circ s\rangle\,.$$

*Pour $\eta \in \Omega^p(M,E)$, et $s_i \in A^1(M,E)$, $1 \leq i \leq p$,*

$$\mathcal{L}_\rho(s)\eta(s_1,\dots,s_p) = \mathcal{L}_\rho(s)\big(\eta(s_1,\dots,s_p)\big) - \sum_{i=1}^{p} \eta\big(s_1,\dots,s_{i-1},\{s,s_i\},s_{i+1},\dots,s_p\big)$$

*Cette dérivée de Lie $\mathcal{L}_\rho(s)$ se prolonge aussi en une dérivation de degré* 0 *de $A(M,E)$ vérifiant, pour tous $P \in A^p(M,E)$ et $\eta \in \Omega^p(M,E)$,*

$$\big\langle \eta, \mathcal{L}_\rho(s)P\big\rangle = \mathcal{L}_\rho(s)\big(\langle\eta,P\rangle\big) - \big\langle \mathcal{L}_\rho(s)\eta, P\big\rangle\,.$$

*Pour $s_1 \in A^1(M,E)$, $\mathcal{L}_\rho(s)s_1 = \{s,s_1\}$.*

**6.2.2 Proposition.** *Le crochet d'algébroïde de Lie $(s_1,s_1) \mapsto \{s_1,s_2\}$, $s_1$ et $s_2 \in A^1(M,E)$, se prolonge en un* crochet de Schouten généralisé *qui, à $P \in A^p(M,E)$ et $Q \in A^q(M,E)$, fait correspondre $\{P,Q\} \in A^{p+q-1}(M,E)$, faisant de $A(M,E)$ une algèbre de Lie graduée.*

*Il existe sur $\Omega(M,E)$ un opérateur de dérivation de degré* 1*, appelé* différentielle extérieure généralisée *et noté $d_\rho$, tel que*

$$d_\rho \circ d_\rho = 0$$

*et que, pour $f \in \Omega^0(M,E) = C^\infty(M,\mathbb{R})$, $s \in A^1(M,E)$,*

$$\langle d_\rho f, s\rangle = \langle df, s\circ\rho\rangle\,.$$

*Leurs propriétés sont les mêmes que celles du crochet de Schouten et de la différentielle extérieure usuels.*

## 6.3 Algébroïdes de Lie et variétés de Poisson

Il existe des relations étroites entre algébroïdes de Lie et variétés de Poisson.

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné, le fibré cotangent $T^*M$ à une variété de Poisson $(M,\Lambda)$ possède une structure d'algébroïde de Lie dont la loi de composition est le crochet des 1-formes et l'ancre l'application $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$.

L'espace total du fibré vectoriel dual $(E^*,\varpi,M)$ d'un algébroïde de Lie $(E,\pi,M)$ possède une structure de Poisson naturelle. Le crochet des fonctions définies sur $E^*$ prolonge le crochet des sections de $\pi$ : une section de $\pi$ n'est autre qu'une fonction différentiable sur $E^*$ dont la restriction à chaque fibre est linéaire. L'existence de la structure de Poisson de Kirillov-Kostant-Souriau sur le dual d'une algèbre de Lie est un cas particulier de cette propriété.

### 6.4 Groupoïdes de Lie

Les algébroïdes de Lie ont été introduits par *Jean Pradines* [22] comme l'aspect infinitésimal des *groupoïdes de Lie*. Ceux-ci ont été introduits et abondamment utilisés en géométrie différentielle par *Charles Ehresmann* [5].

Un *groupoïde de Lie* est formé par une variété différentiable $G$, une sous-variété $\Gamma$ de $G$ appelée *ensemble des unités*, deux submersions $\alpha : G \to \Gamma$ et $\beta : G \to \Gamma$, appelées *source* et *but*, une loi de composition différentiable associative $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ définie seulement lorsque $\beta(g_2) = \alpha(g_1)$ et une inversion $g \mapsto g^{-1}$, satisfaisant des propriétés très analogues à celles d'un groupe, mais avec une loi de composition qui n'est pas partout définie.

À tout *groupoïde de Lie* est associé un *algébroïde de Lie*, comme à tout groupe de Lie est associée une algèbre de Lie.

Mais la réciproque (analogue du troisième théorème de Lie) n'est pas vraie. Il existe des algébroïdes de Lie qui ne s'intègrent pas en un groupoïde de Lie. Le problème de l'intégration des algébroïdes de Lie a été résolu par *Marius Crainic* et *Rui Loja Fernandes* [3, 4].

Un exemple intéressant de groupoïde de Lie est fourni par le fibré cotangent $T^*G$ à un groupe de Lie $G$. L'ensemble des unités est l'espace cotangent à l‘'élément neutre $T^*_eG$, identifié au dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe $G$, les applications source et but étant les projections de $T^*G$ sur $T^*_eG$ obtenues par translation à droite et à gauche.

Ce groupoïde de Lie possède une structure bien particulière, celle de *groupoïde symplectique*, car il est muni de la forme symplectique canonique de fibré cotangent.

## 7 Aperçu historique

C'est *Siméon Denis Poisson* (1781–1840) qui a découvert le *crochet de Poisson* sur une variété symplectique particulière, *l'espace des mouvements* d'un système mécanique [21]. Cependant, il n'a considéré que le crochet de deux fonctions coordonnées, pas de deux fonctions différentiables quelconques.

*Carl Gustav Jacobi* (1804–1851) a considéré le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques (toujours sur une variété symplectique) et découvert l'identité qui porte son nom [7]. Celle-ci a joué un rôle important car c'est un ingrédient essentiel de la théorie des groupes et des algèbres de Lie, développée par *Marius Sophus Lie* (1842–1899) [17].

L'idée de structures de Poisson plus générales que celles associées à une structure symplectiques est implicite dans les travaux de *Sophus Lie* [17]. Ces structures apparaissent aussi sous le nom de *groupes de fonctions* dans les travaux de *Constantin Carathéodory* (1873–1959) [2], et, plus récemment, sous le nom de *structures hamiltoniennes* dans les travaux de divers auteurs, notamment *Andrei Iacob* et *Shlomo Sternberg* [5], *Boris Kupershmidt* et *Yuri Ivanovich Manin* [11], *William W. Symes* [25].

*André Lichnerowicz* (1915–1998) [16] et *Alexander Kirillov* [8] ont indépendamment étudié systématiquement ces structures, et en ont découvert de nombreuses propriétés, notamment leur décomposition en feuilles symplectique. Leurs propriétés locales ont été étudiées de manière très approfondie par *Alan Weinstein* [27].

La structure de Poisson canonique sur le dual d'une algèbre de Lie est mentionnée implicitement dans les travaux de *Sophus Lie* [17]. Elle a été redécouverte par *Jean-Marie Souriau* [24], *Alexander Kirillov* [8] et *Bertram Kostant* [9].

La cohomologie de Poisson a été définie pour la première fois par *André Lichnerowicz* [16]. Elle a été étudiée par de nombreux auteurs : *Johannes Huebschmann*, *Izu Vaisman*, *Ping Xu*, ...

*Alan Weinstein* [28, 29] a utilisé les notions de groupoïdes et algébroïdes de Lie en géométrie de Poisson et renouvelé l'intérêt pour l'étude de ces structures. Indépendamment, *Mickael Karasev* et *Stanislas Zakrzewski* ont également vu l'intérêt de ces structures en relation avec la quantification.

# 8 Bibliographie


**[1]** A. Cannas da Silva et A. Weinstein, *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Lecture Notes vol. 10, American Mathematical Society, 1999.

**[2]** C. Carathéodory, *Calculus of variations and partial differential equations of the first order, vol. I and II*, Holden Day, San Francisco, 1967 (first edition in German Teubner, Berlin, 1935).

**[3]** M. Crainic, R.L. Fernandes, *Integrability of Lie brackets*, Annals of Mathematics, **157** (2003), 575–620.

**[4]** M. Crainic, R.L. Fernandes, *Integrability of Poisson brackets*, Preprint math.DG/0210152, November 2001.

**[5]** C. Ehresmann, *Œuvres complètes commentées*, A. Ehresmann (ed.), Suppl. Cahiers Top. Geom. diff., Amiens, 1980–1984.

**[6]** A. Iacob et S. Sternberg, *Coadjoint structures, solitons and integrability*, Lecture notes in Physics 120, Springer Verlag, Berlin, 1980.

**[7]** C. G. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*. Verlag G. Reimer, Berlin, 1884.

**[8]** A. Kirillov, *Local Lie algebras*, Russian Math Surveys 31 (1976), 55–75.

**[9]** B. Kostant, *Quantization and representation theory. Part I : prequantization*. Lectures in modern analysis and applications III, Lecture notes in mathematics 170, Springer Verlag, Berlin, 1970.

**[10]** J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque hors série (1985), 257–271.

**[11]** B. Kupershmidt et Y. Manin, *Equations of long waves with a free surface*, Functional Anal. and Appl. 11 (1977), 188–197.

**[12]** B. Kupershmidt et Y. Manin, *Equations of long waves with a free surface. II : Hamiltonian structures and higher equations*, Functional Anal. and Appl. 11 (1978), 20–29.

**[13]** P. Libermann, *Sur qualques propriétés des variétés symplectiques*, Proc. Conf Diff. Geom., Universita Karlova, Praha, 1981.

**[14]** P. Libermann, *Sous-variétés et feuilletages symplectiquement réguliers*, dans *Symplectic Geometry*, (A. Crumeyrolle et J. Grifone, eds), 81–106. Pitman, London, 1983.

**[15]** P. Libermann et Ch.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Klwer, Dordrecht, 1987.

**[16]** A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential geometry 12 (1977), 253–300.

**[17]** S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Teubner, Leipzig, 1890.

**[18]** K. C. H. Mackenzie, General theory of Lie groupoids and Lie algebroids, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

**[19]** F. Magri et C. Morosi, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, Quaderno S. 19 (1984), Università di Milano.

**[20]** A. Nijenhuis, *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields*, Indag. Math. 17 (1955), 390–403.

**[21]** S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.
**[22]** J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiable*, C. R. Acad. Sc. Paris 264 A (1967), 245–448.
**[23]** J. A. Schouten, *On the differential operators of first order in tensor calculus,* Convegno Intern. Geom. Diff. Italia, Cremonese, Roma (1953), 1–7.
**[24]** J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques,* Dunod, Paris, 1969.
**[25]** W. Symes, *Hamiltonian group actions and integrable systems*, Physica D 1 (1980), 339–374.
**[26]** I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds,* Birkhäuser, Basel, 1994.
**[27]** A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds,* J. Diff. Geom. 18 (1983), 523–557.
**[28]** A. Weinstein, *Poisson geometry*, Diff. Geom. Appl. ? ?
**[29]** A. Weinstein, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1996), 744–752.