Algèbre et Géométrie dans le monde symplectique
II. Réduction symplectique

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

8 juin 2008

Table des matières

1 Espaces vectoriels symplectiques

1.1 Définition et premières propriétés

1.1.1 Définition. Un *espace vectoriel symplectique* (E,ω) est un espace vectoriel (réel, de dimension finie) E muni d'une forme bilinéaire antisymétrique $\omega : E\times E \to \mathbb{R}$, de rang égal à $\dim E$.

1.1.2 Commentaire. Antisymétrie : cela signifie que pour tout couple (v,w) d'éléments de E, $\omega(w,v) = -\omega(v,w)$.

Rang de ω : C'est la dimension de l'image de E par l'application $\omega^\flat : E \to E^*$, $v \mapsto \omega^\flat(v) = -i(v)\omega$.

1.1.3 Théorème. *La dimension d'un espace vectoriel symplectique est toujours paire. Notons-la* $2n$*. Il existe toujours une base* $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$*, dite* canonique*, telle que pour tous* i, j*,* $1 \le i, j \le n$*,*

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0\,, \quad \omega(e_i, e_{n+j}) = -\omega(e_{n+j}, e_i) = \delta_{i\,j}\,.$$

1.1.4 Proposition. *Soit* (E, ω) *un espace vectoriel symplectique. L'application*

$$\omega^\flat : V \to V^*\,, \quad v \mapsto \omega^\flat(v) = -i(v)\omega$$

est un isomorphisme de E *sur son dual* E^**.*

1.1.5 Quelques propriétés. Soit $2n$ la dimension de E, $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base canonique de (E, ω) et $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{2n})$ la base duale de E^*. On a

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^{n+i}\,.$$

Par suite, pour tout i ($1 \le i \le n$),

$$\omega^\flat(e_i) = -\varepsilon^{n+i}\,, \quad \omega^\flat(e_{n+i}) = \varepsilon^i\,.$$

Soit $\Lambda^\sharp : E^* \to E$ l'isomorphisme inverse de $\omega^\flat$. On a

$$\Lambda^\sharp(\varepsilon^i) = e_{n+i}\,, \quad \Lambda^\sharp(\varepsilon^{n+i}) = -e_i\,.$$

Les isomorphismes $\omega^\flat$ et $\Lambda^\sharp$ se prolongent de manière naturelle aux puissances extérieures de E et de son dual E^*. En particulier, $\Lambda^\sharp(\omega)$ est un bivecteur $\Lambda \in \bigwedge^2 E$, c'est-à-dire une forme bilinéaire antisymétrique sur E^*.

$$\Lambda = \Lambda^\sharp\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \wedge \varepsilon^{n+i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda^\sharp(\varepsilon^i) \wedge \Lambda^\sharp(\varepsilon^{n+i}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge e_{n+i}\,.$$

Muni de Λ, E^* est un espace vectoriel symplectique et $\omega^\flat : (E, \omega) \to (E^*, \Lambda)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels symplectiques, d'inverse $\Lambda^\sharp : (E^*, \Lambda) \to (E, \omega)$.

1.2 Orthogonalité symplectique

1.2.1 Définition. Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de E. On appelle *orthogonal symplectique* de W le sous-espace vectoriel de E

$$\operatorname{orth} W = \big\{v \in E; \omega(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\big\}\,.$$

1.2.2 Définitions. Un sous-espace vectoriel W de (E, ω) est dit

(i) *isotrope* si $W \subset \operatorname{orth} W$,

(ii) *coïsotrope* si $W \supset \operatorname{orth} W$,

(iii) *lagrangien* si $W = \operatorname{orth} W$,

(iv) *symplectique* si $W \cap \operatorname{orth} W = \{0\}$.

1.2.3 Quelques propriétés. (E,ω) espace vectoriel symplectique, W, W_1, W_2 sous-espaces vectoriels de E.

1. $\dim W + \dim \operatorname{orth} W = \dim E$;
2. $\operatorname{orth}(\operatorname{orth} W) = W$;
3. $\operatorname{orth}(W_1 \cap W_2) = \operatorname{orth} W_1 + \operatorname{orth} W_2$;
4. $\operatorname{orth}(W_1 + W_2) = \operatorname{orth} W_1 \cap \operatorname{orth} W_2$;
5. $W_1 \subset W_2$ si et seulement si $\operatorname{orth} W_1 \supset \operatorname{orth} W_2$.
6. Les noyaux de la restriction de ω à W et à $\operatorname{orth} W$ sont tous deux égaux à
$$\ker(\omega|_W) = \ker(\omega|_{\operatorname{orth} W}) = W \cap \operatorname{orth} W\,.$$
7. $\dim(W_1 \cap W_2) - \dim(\operatorname{orth} W_1 \cap \operatorname{orth} W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim E$.

1.2.4 Proposition. *Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique.*

Pour tout sous-espace vectoriel W de E, on note W^0 l'annulateur de W ; c'est le sous-espace vectoriel du dual E^* de E :
$$W^0 = \left\{\eta \in E^*; \langle \eta, w\rangle = 0 \textit{ pour tout } w \in W\right\}.$$
Alors
$$\operatorname{orth} W = \Lambda^\sharp(W^0)\,, \quad W = \Lambda^\sharp(\operatorname{orth}_\Lambda W^0)\,.$$
W est isotrope dans (E,ω) si et seulement si W^0 est coïsotrope dans (E^*,Λ).
W est coïsotrope dans (E,ω) si et seulement si W^0 est isotrope dans (E^*,Λ).

1.3 La réduction ; aspect algébrique

1.3.1 Théorème. *Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique et W un sous-espace vectoriel de E. Soit $\widehat{W}$ l'espace quotient*
$$\widehat{W} = W/\big(W \cap \operatorname{orth} W\big)\,.$$
Soient $\widehat{w}_1$ et $\widehat{w}_2$ deux éléments de $\widehat{W}$, w_1 et $w_2 \in W$ des représentants, respectivemen de $\widehat{w}_1$ et $\widehat{w}_2$. Posons
$$\widehat{\omega}(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) = \omega(w_1, w_2)\,.$$
Alors $(\widehat{W}, \widehat{\omega})$ est un espace vectoriel symplectique appelé espace vectoriel symplectique réduit *associé à W.*

1.3.2 Remarque. $\dim \widehat{W} = \dim W - \dim(W \cap \operatorname{orth} W)$, donc $\dim W$ et $\dim(W \cap \operatorname{orth} W)$ sont de même parité.

1.3.3 Théorème. *Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique, W un sous-espace vectoriel de E, $(\widehat{W}, \widehat{\omega})$ l'espace vectoriel symplectique réduit correspondant, et $\pi : W \to \widehat{W}$ la projection canonique. Soit L un sous-espace vectoriel isotrope de E.*

1. *Alors $\pi(L \cap W)$ est un sous-espace vectoriel isotrope de $\widehat{W}$.*

2. *Si W est coïsotrope et L lagrangien, $\pi(L \cap W)$ est un sous-espace vectoriel lagrangien de $\widehat{W}$.*

Démonstration. La preuve de 1 est immédiate. Celle de 2 se fait en évaluant la dimension de $\pi(L \cap W)$ grâce à la propriété 7 de 1.2.3. □

2 Orthogonalité dans une variété symplectique

2.1 Variétés de rang constant

2.1.1 Définition. Soit (M,ω) une variété symplectique et N une sous-variété de M. On dit que N est *de rang constant* si le rang de la 2-forme $i_N^*\omega$ induite par ω sur N est constant.

2.1.2 Remarque. Pour tout point $x \in N$,

$$\ker(i_N^*\omega)(x) = T_xN \cap (\operatorname{orth} T_xN),.$$

Donc N est de rang constant si est seulement si la dimension de $T_xN \cap (\operatorname{orth} T_xN)$ ne dépend pas du choix de x dans N.

Le rang de $i_N^*\omega$ en $x \in N$ est

$$\operatorname{rang}\big(i_N^*\omega(x)\big) = \dim N - \dim\big(T_xN \cap (\operatorname{orth} T_xN)\big)\,.$$

2.1.3 Cas particuliers importants Soit (M,ω) une variété symplectique. Une sous-variété N de M est dite

- *isotrope* si pour tout $x \in N$, $T_xN \subset \operatorname{orth} T_xN$,
- *coïsotrope* si pour tout $x \in N$, $T_xN \supset \operatorname{orth} T_xN$,
- *lagrangienne* si pour tout $x \in N$, $T_xN = \operatorname{orth} T_xN$,
- *symplectique* si pour tout $x \in N$, $T_xN \cap (\operatorname{orth} T_xN) = \{0\}$.

Toutes ces sous-variétés sont de rang constant :

- 0 pour les sous-variétés isotropes ou lagrangiennes,
- $2\dim N - \dim M$ pour les sous-variétés coïsotropes,
- $\dim N$ pour les sous-vériétés symplectiques.

2.1.4 Proposition. *Sur une variété différentiable N, soit η une forme différentielle (de degré quelconque $p \geq 1$) dont le noyau* $\ker\eta$ *est de rang constant. Si $d\eta = 0$,* $\ker\eta$ *est un sous-fibré vectoriel complètement intégrable de TN. Le feuilletage de N qu'il définit est appelé* feuilletage caractéristique *de η.*

2.1.5 Conséquence. Soit N une sous-variété de rang constant d'une variété symplectique (M,ω). Alors $TN \cap (\operatorname{orth} TN)$ est un sous-fibré vectoriel complètement intégrable de TN, qui définit le feuilletage caractéristique de $i_N^*\omega$.

Ce résultat va permettre la construction de la *variété symplectique réduite* associée à la sous-variété N de rang constant de (M,ω).

2.2 Réduction d'une variété symplectique

2.2.1 Proposition. *Soit N une sous-variété de rang constant d'une variété symplectique (M,ω). On suppose son feuilletage caractéristique simple : cela signifie que l'ensemble $\widehat{N}$ des feuilles possède une structure de variété différentiable telle que la projection $\pi_{\widehat{N}} : N \to \widehat{N}$ soit une submersion. Alors il existe sur $\widehat{N}$ une unique forme symplectique $\widehat{\omega}$ telle que*

$$i_N^*\omega = \pi_{\widehat{N}}^*\widehat{\omega}\,.$$

On dit que $\widehat{N},\widehat{\omega})$ est la variété symplectique réduite *associée à N. Sa dimension est* $\dim N - \operatorname{rang} N$.

2.2.2 Remarques. Lorsque N est coïsotrope, de codimension p, la dimension de la variété symplectique réduite est $\dim M - 2p$.

Lorsque le feuilletage caractéristique de N n'est pas simple, le théorème précédent peut être utilisé *localement*, car tout point de N possède un voisinage ouvert U (dans M) tel que le feuilletage caractéristique de $N \cap U$ soit simple.

2.2.3 Théorème. *Soit $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien sur la variété symplectique (M,ω), N une sous-variété de M, de rang constant, invariante par le flot du champ de vecteurs de hamiltonien H. On suppose le feuilletage caractéristique de N simple, et on note $\pi_{\widehat{N}} : N \to \widehat{N}$ la projection sur la variété symplectique réduite $(\widehat{N}, \widehat{\omega})$.*

Alors il existe sur $\widehat{N}$ un hamiltonien $\widehat{H} : \widehat{N} \to \mathbb{R}$ tel que $H|_N = \widehat{H} \circ \pi_{\widehat{N}}$.

De plus, pour toute courbe intégrale $t \mapsto \varphi(t)$ du champ de vecteurs de hamiltonien H contenue dans N, $t \mapsto \pi_{\widehat{N}} \circ \varphi(t)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs de hamiltonien $\widehat{H}$ dans $\widehat{N}$.

2.2.4 Exemple : fibration de Hopf. Munissons $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (coordonnées $(z_1 = x_1 + iy_1,\, z_2 = x_2 + iy_2)$) de la forme symplectique

$$\omega = \frac{1}{2}\Im(dz_1 \wedge d\overline{z}_1 + dz_2 \wedge d\overline{z}_2) = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2\,.$$

Posons $F_1 = z_1\overline{z_1}$, $F_2 = z_2\overline{z_2}$, et

$$H(z_1,z_2) = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}\,.$$

On a $\{F_1,F_2\} = 0$, donc aussi $\{H,F_1\} = \{H,F_2\} = 0$.

Le système de hamiltonien H a deux intégrales premières F_1 et F_2 en involution et fonctionnellement indépendantes. Il est donc complètement intégrable.

Pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

$$T_{a,b} = \big\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}; F_1(z_1) = a,\ F_2(z_2) = b\big\}$$

est un tore lagrangien de dimension 2, invariant par le flot du champ de hamiltonien H.

La sous-variété coïsotrope, de codimension 1,

$$N = \big\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}; (F_1 + F_2)(z_1,z_2) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 1\big\}$$

est isomorphe à la sphère S^3, et invariante par le flot du champ de hamiltonien H.

Les feuilles du feuilletage caractéristique de $N = S^3$ sont les grands cercles $\big\{(e^{i\theta}z_{1,0}, e^{i\theta}z_{2,0}); \theta \in [0,2\pi]\big\}$, avec $z_{1,0}\overline{z_{1,0}} + z_{2,0}\overline{z_{2,0}} = 1$.

Le feuilletage caractéristique de $N = S^3$ est simple, et la variété des feuilles (c'est-à-dire la variété symplectique réduite $\widehat{N}$) s'identifie à l'espace projectif complexe $\mathbb{PC}(1)$, ou encore à la sphère S^2.

La projection canonique $\pi_{\widehat{N}} : S^3 \to S^2$, appelée *fibration de Hopf*, a pour expression

$$\pi_{\widehat{N}}\big((z_1,z_2)\big) = \big[(z_1,z_2)\big]\,,$$

où $\big[(z_1,z_2)\big]$ désigne la classe d'équivalence de $(z_1,z_2) \in S^3$, pour la relation d'équivalence

(z_1,z_2) et $(z'_1,z'_2)\in S^3$ sont équivalents s'il existe $\alpha\in[0,2\pi]$ tel que $z'_1=e^{i\alpha}z_1$ et $z'_2=e^{i\alpha}z_2$.

Sur la variété symplectique réduite $\widehat{N}=S^2=\mathbb{PC}(1)$, le hamiltonien réduit a pour expression

$$\widehat{H}\bigl(\bigl[(z_1,z_2)\bigr]\bigr)=z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_2}\,.$$

Les orbites du système hamiltonien réduit sont les courbes $\widehat{H}=$ constante. Ce sont les cercles parallèles, intersections de la sphère S^2 avec des plans parallèles à l'équateur (si on pense à la sphère S^2 comme plongée dans un espace euclidien de dimension 3, comme le globe terrestre).

3 Action d'un groupe sur une variété symplectique

3.1 Rappel sur les actions de groupe

3.1.1 Définition. Soit M une variété différentiable, G un groupe de Lie, et $\Phi:G\times M\to M$ une application différentiable. Pour tout $g\in G$ on note $\Phi_g:M\to M$ l'application

$$\Phi_g:x\mapsto\Phi_g(x)=\Phi(g,x)\,,\quad g\in G\,,\quad x\in M\,.$$

On dit que Φ est une *action de G sur M à gauche* si

- pour tous g et $h\in G$, $\Phi_g\circ\Phi_h=\Phi_{gh}$,
- $\Phi_e=\mathrm{id}_M$, c'est-à-dire, pour tout $x\in M$, $\Phi(e,x)=x$, e désignant l'élément neutre de G.

3.1.2 Conséquence L'application $g\mapsto\Phi_g$ est alors un homomorphisme de G dans le groupe des difféomorphismes de M.

3.1.3 Définition. Soit $\Phi:G\times M\to M$ une action à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M. On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. Pour chaque $X\in\mathcal{G}$, on appelle *champ fondamental associé à X* le champ de vecteurs X_M sur M :

$$X_M(x)=\frac{d}{ds}\Bigl(\Phi\bigl(\exp(sX,x\bigr)\Bigr)\Bigr|_{s=0}\,,\quad x\in M\,,\ X\in\mathcal{G}\,.$$

3.1.4 Propriétés des champs fondamentaux L'application $X\mapsto X_M$ est un antihomomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M :

$$[X_M,Y_M]=-[X,Y]_M\,,\quad X \text{ et } Y\in\mathcal{G}\,;$$

pour tous $g\in G$ et $X\in\mathcal{G}$,

$$(\Phi_g)_*(X_M)=(\mathrm{Ad}_g X)_M\,;$$

pour tout $X\in\mathcal{G}$, le champ de vecteurs fondamental X_M est complet, et a pour flot

$$(s,x)\mapsto\Phi\bigl(\exp(sX),x\bigr)\,.$$

3.2 Actions sur une variété symplectique

3.2.1 Définitions. Soit $\Phi:G\times M\to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M,ω). On dit que cette action est

- *symplectique* si pour tout $g\in G$, $(\Phi_g)^*\omega=\omega$;

– *hamiltonienne* si elle est symplectique et si de plus il existe une application linéaire $X \mapsto J_X$ de $\mathcal{G}$ dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M, associé à X, soit hamiltonien et admette J_X pour hamiltonien :

$$i(X_M)\omega = -dJ_X\,;$$

– *fortement hamiltonienne* si elle est hamiltonienne et si on peut choisir $X \mapsto J_X$ de manière telle que

$$\{J_X, J_Y\} = J_{[X,Y]}\,, \quad X \text{ et } Y \in \mathcal{G}\,.$$

3.2.2 Remarques. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω).

Si cette action est symplectique, pour tout $X \in \mathcal{G}$ le champ fondamental associé X_M est *localement hamiltonien*, mais pas forcément hamiltonien : $i(X_M)\omega$ est fermée, pas forcément exacte.

Si, pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ X_M est hamiltonien et si G est connexe, l'action Φ est symplectique et hamiltonienne.

Pour une action hamiltonienne, l'application $X \mapsto J_X$ n'est pas unique et ne peut pas toujours être choisie de telle sorte que ce soit un homomorphisme d'algèbres de Lie. C'est lorsqu'elle peut être ainsi choisie que l'action est dite *fortement hamiltonienne*.

3.2.3 Définition. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne du groupe de Lie G sur la variété symplectique (M, ω) et $X \mapsto J_X$ une application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que pour chaque $X \in \mathcal{G}$, le champ fondamental X_M admette J_X pour hamiltonien. L'application $J : M \to \mathcal{G}^*$ telle que

$$J_X(x) = \big\langle J(x), X\big\rangle\,, \quad x \in M\,,\ X \in \mathcal{G}$$

est appelée *moment* de l'action hamiltonienne Φ.

3.2.4 Remarque. Le moment d'une action hamiltonienne n'est en général pas unique. Lorsque l'action est fortement hamiltonienne, il peut êttre choisi de telle sorte que

$$\big\{\langle J, X\rangle, \langle J, Y\rangle\big\}(x) = \big\langle J, [X, Y]\big\rangle(x)\,, \quad x \in M\,,\ X \text{ et } Y \in \mathcal{G}\,.$$

3.2.5 Proposition. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne du groupe de Lie G sur la variété symplectique (M, ω), de moment $J : M \to \mathcal{G}^*$. Pour chaque $x \in M$, soit*

$$\mathcal{O}_x = \big\{\Phi(g, x); g \in G\big\}\,, \quad G_x = \big\{g \in G; \Phi(g, x) = x\big\}$$

l'orbite du point x, et son groupe d'isotropie. On a :

$$\ker(T_x J) = \operatorname{orth}(T_x \mathcal{O}_x)\,;$$

$T_x J(T_x M)$ est l'annulateur de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$ de G_x.

Si M est connexe, il existe une unique action affine a_θ de G sur $\mathcal{G}^*$ rendant J équivariant :

$$J\big(\Phi(g, x)\big) = a_\theta\big(g, J(x)\big) = \operatorname{Ad}^*_g\big(J(x)\big) + \theta(g)\,.$$

3.2.6 Notations et commentaires. L'action coadjointe de G sur le dual $\mathcal{G}^*$ de son algèbre de Lie est définie par

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g \xi, X\rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} X\rangle\,, \quad g\in G\,,\ \xi\in\mathcal{G}^*\,,\ X\in\mathcal{G}\,,$$

et l'action adjointe de G sur $\mathcal{G}$ par

$$\mathrm{Ad}_g X = \frac{d}{ds}\bigl(g\exp(sX)g^{-1}\bigr)\bigm|_{s=0}\ .$$

L'application $\theta : G\to\mathcal{G}^*$ est un 1-cocycle de G à valeurs dans $\mathcal{G}^*$ pour la représentation coadjointe :

$$\theta(gh) = \mathrm{Ad}^*_g\theta(h) + \theta(g)\,, \quad g \text{ et } h\in G\,.$$

Posons $\Theta(X,Y) = \bigl\langle T_e\theta(X), Y\bigr\rangle$, $\quad X$ et $Y\in\mathcal{G}$.

$\Theta : \mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathbb{R}$ est un *cocycle symplectique* (c'est-à-dire antisymétrique, $\Theta(Y,X) = -\Theta(X,Y)$) de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

On a pour tous X et $Y\in\mathcal{G}$

$$\bigl\{\langle J,X\rangle, \langle J,Y\rangle\bigr\} = \omega(X_M,Y_M) = \bigl\langle J,[X,Y]\bigr\rangle - \Theta(X,Y)\,.$$

Lorsqu'on remplace le moment J par $J' = J+\mu$, où $\mu\in\mathcal{G}^*$ est une constante, le cocycle θ est replacé par θ',

$$\theta'(g) = \theta(g) + \mu - \mathrm{Ad}^*_g\mu\,.$$

On peut choisir J de manière telle que $\theta = 0$ (rendant ainsi le moment Ad^*-équivariant) si et seulement si l'action Φ est fortement hamiltonienne.

3.2.7 Théorème (Emmy Noether)**.** *Soit $\Phi : G\times M\to M$ une action hamiltonienne du groupe de Lie G sur la variété symplectique (M,ω), de moment $J : M\to\mathcal{G}^*$. Soit $H : M\to\mathbb{R}$ un hamiltonien Φ-invariant :*

$$H\circ\Phi_g(x) = H(x) \quad \textit{pour tous } g\in G\,,\ x\in M\,.$$

Alors J garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale du champ de hamiltonien H.

Démonstration. Pour tout $x\in M$, $dH(x)\in\bigl(T_x\mathcal{O}_x\bigr)^0$, donc la valeur en x du champ de hamiltonien H, $\Lambda^\sharp\bigl(dH(x)\bigr)$ est élément de $\Lambda^\sharp(T_x\mathcal{O}_x)^0 = \mathrm{orth}(T_x\mathcal{O}_x) = \ker(T_xJ)$. Pour toute courbe intégrale $t\mapsto\varphi(t)$ du champ de hamiltonien H, on a $\dfrac{d\bigl(J\circ\varphi(t)\bigr)}{dt} = 0$, donc $J\circ\varphi(t) = $ constante. □

3.3 Réduction utilisant le moment

Soit $\Phi : G\times M\to M$ une action hamiltonienne du groupe de Lie G sur la variété symplectique connexe (M,ω), de moment $J : M\to\mathcal{G}^*$, et $H : M\to\mathbb{R}$ un hamiltonien Φ-invariant :

$$H\circ\Phi_g(x) = H(x) \quad \text{pour tous } g\in G\,,\ x\in M\,.$$

Soit $\xi\in\mathcal{G}^*$ une valeur (faiblement) régulière de J, G^0_ξ la composante neutre du groupe d'isotropie de ξ (pour l'action affine de G sur $\mathcal{G}^*$ qui rend J équivariant), et $\mathcal{G}_\xi$ son algèbre de Lie.

$M_\xi = J^{-1}(\xi)$ est une sous-variété de M, à laquelle on va appliquer la méthode de réduction.

3.3.1 Théorème (A. Weinstein, J. Marsden, K. Meyer)**.** *Avec les notations précisées ci-dessus, $M_\xi = J^{-1}(\xi)$ est une sous-variété de rang constant de (M,ω). Les feuilles de son feuilletage caractéristique sont le orbites de l'action de G_ξ^0 sur M_ξ, restriction de l'action Φ au sous-groupe G_ξ de G et à la sous-variété M_ξ de M.*

Si ce feuilletage caractéritique est simple (c'est-à-dire si l'ensemble $\widehat{M_\xi} = M_\xi/G_\xi$ des orbites de l'action de G_ξ sur M_ξ a une structure de variété telle que la projection $\pi_{\widehat{M_\xi}} : M_\xi \to \widehat{M_\xi}$ soit une submersion), il existe sur $\widehat{M_\xi}$ une forme symplectique unique $\widehat{\omega_\xi}$ et un hamiltonien réduit unique $\widehat{H_\xi}$, tels que

$$i_{M_\xi}^* \omega = \pi_{\widehat{M_\xi}}^* \widehat{\omega_\xi}\,, \quad H|_{M_\xi} = \widehat{H_\xi} \circ \pi_{\widehat{M_\xi}}\,.$$

3.3.2 Remarques. Dans le hypothèses du précédent théorème, soit $t \mapsto \varphi(t)$ une courbe intégrale du champ de hamiltonien H contenue dans la sous-variété M_ξ de M. Sa projection sur $\widehat{M_\xi}$, $t \mapsto \pi_{\widehat{M_\xi}} \circ \varphi(t)$, est une courbe intégrale du champ de hamiltonien $\widehat{H_\xi}$, dans la variété symplectique réduite $(\widehat{M_\xi}, \widehat{\omega_\xi})$.

Ce théorème de réduction est souvent utilisé pour faciliter la recherche des courbes intégrales du champ de hamiltonien H, car il est souvent plus facile de déterminer d'abord leurs projections sur la variété symplectique réduite $(\widehat{M_\xi}, \widehat{\omega_\xi})$.

Cela fait, reste une dernière étape, la *reconstruction* : déterminer la courbe intégrale considérée du champ de hamiltonien H connaissant sa projection sur $(\widehat{M_\xi}, \widehat{\omega_\xi})$.

3.4 Exemple : le problème de Kepler

3.4.1 Description du problème. On étudie le mouvement de deux planètes P_1 et P_2 soumises à leur attraction gravitationnelle mutuelle. Ces planètes sont assimilées à des points matériels de masses m_1 et m_2. Leur position dans l'espace (assimilé à un espace affine euclidien E^3 de dimension 3) est repérée, à chaque instant t, par les vecteurs $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OP_2}$, éléments de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E^3}$ associé à E^3, O étant un point particulier de E^3 pris pour origine. L'espace de configuration de ce système est

$$\left\{(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) \in \overrightarrow{E^3} \times \overrightarrow{E^3}; \overrightarrow{r_1} \neq \overrightarrow{r_2}\right\}.$$

L'espace des phases est le fibré cotangent à l'espace de configuration. En utilisant la structure euclidienne de $\overrightarrow{E^3}$ pour l'identifier à son dual, on peut dire que l'espace des phases est

$$\left\{(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_1}) \in \overrightarrow{E^3} \times \overrightarrow{E^3} \times \overrightarrow{E^3} \times \overrightarrow{E^3}; \overrightarrow{r_1} \neq \overrightarrow{r_2}\right\}.$$

Le hamiltonien et la forme symplectique du système sont

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + U(|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|)\,, \quad \omega = d\overrightarrow{p_1} \wedge d\overrightarrow{r_1} + d\overrightarrow{p_2} \wedge d\overrightarrow{r_2}\,,$$

avec $p_1 = |\overrightarrow{p_1}|$, $p_2 = |\overrightarrow{p_2}|$, $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $p_{i,j}$ et $r_{i,j}$ désignant les composantes de $\overrightarrow{p_i}$ et $\overrightarrow{r_i}$ dans une base orthonormée, $d\overrightarrow{p_i} \wedge d\overrightarrow{r_i} = \sum_{j=1}^3 dp_{i\,j} \wedge dr_{i\,j}$.

3.4.2 Décomposition du mouvement. Posons

$$(m_1+m_2)\overrightarrow{r_G}=m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}\,,\quad \overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}\,,\quad m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,,$$

et aussi

$$\overrightarrow{p_G}=\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}\,,\quad \frac{\overrightarrow{p}}{m}=\frac{\overrightarrow{p_1}}{m_1}-\frac{\overrightarrow{p_2}}{m_2}\,.$$

On peut prendre $\overrightarrow{r_G}$, $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{p_G}$ et $\overrightarrow{p}$ pour nouvelles variables puisque

$$\overrightarrow{r_1}=\overrightarrow{r_G}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}\,,\quad \overrightarrow{r_2}=\overrightarrow{r_G}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r}\,,$$

$$\overrightarrow{p_1}=\frac{m}{m_2}\overrightarrow{p_G}+\overrightarrow{p}\,,\quad \overrightarrow{p_2}=\frac{m}{m_1}\overrightarrow{p_G}-\overrightarrow{p}\,.$$

Avec ces nouvelles variables, le hamiltonien et la forme symplectique s'écrivent

$$H=\frac{p_G^2}{2(m_1+m_2)}+\frac{p^2}{2m}+U(r)\,,\quad \omega=d\overrightarrow{p_G}\wedge d\overrightarrow{r_G}+d\overrightarrow{p}\wedge d\overrightarrow{r}\,.$$

Le système étudié se décompose en un produit de deux systèmes hamiltoniens indépendants :

– un système sur $\overrightarrow{E^3}\times\overrightarrow{E^3}$ (variables $\overrightarrow{r_G}$, $\overrightarrow{p_G}$), décrivant le mouvement du centre de masse, de hamiltonien et forme symplectique

$$H_G=\frac{p_G^2}{2(m_1+m_2)}\,,\quad \omega_G=d\overrightarrow{p_G}\wedge d\overrightarrow{r_G}\,;$$

– un système sur $\overrightarrow{E^3}\backslash\{0\}\times\overrightarrow{E^3}$ (variables $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{p}$), décrivant le mouvement autour du centre de masse, de hamiltonien et forme symplectique

$$\widetilde{H}=\frac{p^2}{2m}+U(r)\,,\quad \widetilde{\omega}=d\overrightarrow{p}\wedge d\overrightarrow{r}\,.$$

Cette décomposition est une propriété générale connue (en France) sous le nom de *théorème de Koenigs*, en hommage au mathématicien français Gabriel Koenigs (1858–1931). L'étude du système hamiltonien décrivant le mouvement autour du centre de masse est le *problème de Kepler*. Ce système décrit le mouvement d'un point matériel de masse m dans un champ gravitationnel central de potentiel $U(\overrightarrow{r})$.

3.4.3 Symétries. Le groupe $SO(3)$, agissant à la fois sur les deux variables vectorielles $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{p}$, laisse $\widetilde{H}$ et $\widetilde{\omega}$ invariants. Cette action est hamiltonienne. Son moment est le *moment cinétique* de la particule par rapport au centre attractif :

$$J(\overrightarrow{r},\overrightarrow{p})=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}\quad \text{produit vectoriel de } \overrightarrow{r} \text{ et } \overrightarrow{p}\,,$$

$\overrightarrow{E^3}$ étant identifié à $so(3)^*$ dual de l'algèbre de Lie de $SO(3)$.

Le théorème de Noether montre que $J(\overrightarrow{r},\overrightarrow{p})=\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}$ est constant. Par suite la trajectoire de la particule est plane, contenue dans le plan passant par le centre attractif normal à $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{p}$.

La sous-variété de $\overrightarrow{E^3}\backslash\{0\}\times\overrightarrow{E^3}$

$$M_L=J^{-1}(\overrightarrow{L})$$

où $\overrightarrow{L}$ est un élélment non nul de $so(3)^*$ est l'ensemble de couples de vecteurs $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p})$, tous deux perpendiculaires à $\overrightarrow{L}$, dont le produit vectoriel est $\overrightarrow{L}$. Le triangle formé par l'origine et les extrémités de ces deux vecteurs a une aire fixée, $L/2 = |\overrightarrow{L}|/2$

L'action coadjointe de $SO(3)$ sur $so(3)^*$ n'est autre que l'action naturelle de $SO(3)$ sur $\overrightarrow{E^3}$, identifié à $so(3)^*$. Le sous-groupe d'invariance de $\overrightarrow{L}$ est le groupe des rotations d'axe $\overrightarrow{L}$. L'action de ce sous-groupe laisse invarante la forme et la dimension du triangle formé par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p})$, puisqu'elle fait tourner ensemble ces deux vecteurs dans le plan normal à $\overrightarrow{L}$.

La variété symplectique quotient est le demi-plan ouvert, ensemble des couples (r,q) de réels vérifiant $r > 0$, avec pour forme symplectique et pour hamiltonien

$$\widehat{\omega} = dq \wedge dr\,, \quad \widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(q^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) + U(r)\,, \text{avec}\, U(r) = -\frac{\alpha}{r}\,.$$

La variable q a une signification simple : c'est la composante radiale de l'impulsion

$$q = \frac{\overrightarrow{r}\,.\,\overrightarrow{p}}{r}\,.$$

Le système hamiltonien réduit s'écrit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial q} = \frac{q}{m}\,, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial r} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}\,.$$

On peut utiliser l'intégrale première $\widehat{H}$ pour avoir une relation entre r et q. Pour $\widehat{H}(r,q) = E$, on obtient

$$q^2 = m^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)\,.$$

Soit θ l'angle polaire de $\overrightarrow{r}$ à partir d'une origine arbitraire, dans le plan normal à $\overrightarrow{L}$. D'après la définition de $\overrightarrow{L}$:

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = L\,.$$

On en déduit

$$\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L^2}{m\alpha r} - 1\right)\right)^2 = 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} - \left(\frac{L^2}{m\alpha r} - 1\right)^2\,,$$

et par suite, θ_0 étant une constante d'intégration

$$\frac{L^2}{m\alpha r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}cos(\theta - \theta_0)\,.$$

C'est l'équation (en coordonnées polaires) d'une conique ayant l'origine pour foyer, de paramètre $p = \frac{L^2}{m\alpha}$ et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$.

Pour $E < 0$, cette conique est une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b :

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}\,, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}\,.$$

La période T se calcule facilement en utilisant la loi des aires (conséquence de la constance de $\overrightarrow{L}$) :

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}\,.$$

3.4.4 Le vecteur excentricité

Ce vecteur, parfois appelé vecteur de *Runge-Lenz* ou vecteur de *Laplace*, à tort, car sa découverte est due à *Jakob Hermann* (1678–1753), a pour expression

$$\overrightarrow{e} = -\frac{\overrightarrow{r}}{r} + \frac{\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{L}}{m\alpha}$$

C'est une intégrale première du mouvement, associée à une action du groupe $SO(4)$, qui apparaît lorsqu'on "régularise" les collisions. Il est parallèle au plan de l'orbite, dirigé vers le périhélie, et son module $|\overrightarrow{e}|$ est égal à l'excentricité e de l'orbite.

4 Aperçu historique

La réduction du nombre de fonctions inconnues à déterminer lors de l'étude d'un système mécanique grâce à des intégrales premières est presque aussi ancienne que le Calcul différentiel lui-même : *Euler*, *Lagrange*, *Hamilton*, *Jacobi*, *Poincaré* s'en sont servi avec de grands succès.

Très tôt on a remarqué que pour un système hamiltonien, la connaissance de n intégrales premières deux à deux en involution (c'est-à-dire telles que le crochet de Poisson de deux quelconques d'entre elles soit nul) permettait de diminuer de $2n$ le nombre de fonctions inconnues et conservait la forme hamiltonienne des équations.

L'idée d'associer des intégrales premières à un groupe de Lie de symétries d'un système variationnel est due à *Amalie Emmy Nöther* (ou *Noether*) (1882–1935) [5]. Cette publication est traduite et commentée dans le très beau livre d'*Yvette Kosmann-Schwarzbach* [1]

Les aspects géométriques de la réduction sont apparus plus tardivement. *Jean-Marie Souriau* [9] semble bien être le premier à avoir clairement défini la notion de *moment* de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie. Indépendamment, *Stephen Smale* [7] a noté l'importance de l'application *énergie-moment* dans les problèmes de mécanique et donné une formulation géométrique de la réduction dans le formalisme lagrangien. *Jerzy Sniaticky* et *Wlodzimierz Tulczyjew* [8] ont décrit la réduction d'une variété symplectique associée) la donnée d'une sous-variété de rang constant.

Jerrold Marsden et *Alan Weinstein* [2] ont donné à la réduction symplectique associée à l'action d'un groupe de Lie de symétries, la forme que nous utilisons aujourd'hui. *Kenneth Meyer* [4] a, indépendamment et presque simultanément, présenté une théorie analogue.

La réduction symplectique a donné lieu à de nombreux développements et généralisations. Le lecteur pourra en trouver une brève description dans l'article de synthèse de Marsden et Weinstein [3], qui comporte une abondante bibliographie. Pour une bonne partie, ces nouveaux développements sont exposés de manière détaillée dans l'excellent livre de *Juan-Pablo Ortega* et *Tudor Ratiu* [6]

5 Bibliographie

[1] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Les théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au XX-ème siècle*, deuxième édition. Les éditions de l'école polytechnique, Paris, 2006.

[2] J. E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports Math. Phys. 5 (1974), 121–130.

[3] J. E. Marsden and A. Weinstein, *Some comments on the history, theory, and applications of symplectic reduction*. In *Quantization of singular symplectic quotients*, N. P. Landman, M. Pflaum and M. Schilichenmaier (eds), Prog. Math. 198, Birkhäuser, Basel, 2001.

[4] K. R. Meyer, *Symmetries and integrals in Mechanics*, in Dynamical systems, M. Peixoto, ed., 259–273, Academic Press, New York, 1973.

[5] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten on der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mahtematisch-Physikalische Klasse, 1918, 235–257.

[6] J.-P. Ortega et T. S. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[7] S. Smale, *Topology and Mechanics*, Inventiones Math. 10 (1970), 305–331 ; 11 (1970),45–64.

[8] J. Sniatycki et W. M. Tulczyjew, *Generating forms of Lagrangian submanifolds*, Indiana University Math. J. 22 (1972), 267–275.

[9] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.