Algèbre et Géométrie dans le monde symplectique
I. Systèmes hamiltoniens

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

9 juin 2008

Table des matières

1 Rappels de Géométrie différentielle **1**
1.1 Variétés différentiables 1
1.2 Les fibrés tangent et cotangent et leurs puissances extérieures 2
1.3 Champs et formes différentielles 5
1.4 La différentielle extérieure 6
1.5 Champs de vecteurs 8
1.6 Prolongement aux vecteurs d'une application et image réciproque d'une forme . 11

2 Structures symplectiques **12**
2.1 Définition et premières propriétés 12
2.2 Champs hamiltoniens 14

3 Aperçu historique **16**
3.1 Origine du mot "symplectique"et de la notion de structure symplectique 16
3.2 Retour sur la variation des constantes 24

4 Remerciements **25**

5 Bibliographie **25**

1 Rappels de Géométrie différentielle

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Définitions. 1. Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2. Une *carte* d'une variété topologique M de dimension n est un couple (U,φ) où U est un ouvert de M et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions qui, à un point $x \in U$, associent les composantes $x^1,\ x^2,\dots,x^n$ de $\varphi(x)$, sont appelées *coordonnées locales* du point x dans la carte (U,φ).

3. Un *atlas* de la variété topologique M, de dimension n, est une famille $\big((U_i,\varphi_i),\, i\in I\big)$ de cartes telles que $\bigcup_{i\in I} U_i = M$. Un tel atlas est dit *différentiable* si, pour tout couple de cartes (U_i,φ_i) et (U_j,φ_j) de cet atlas, avec $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, l'application (appelée *changement de carte*) $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme (de classe C^∞) de l'ouvert $\varphi_i(U_i\cap U_j)$ sur l'ouvert $\varphi_j(U_i\cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$. Deux atlas différentiables $\big((U_i,\varphi_i),\, i\in I\big)$ et $\big((V_k,\psi_k),\, k\in K\big)$ sur cette variété sont dits *équivalents* si pour tout $(i,k)\in I\times K$ tels que $U_i\cap V_k\neq\emptyset$, le changement de carte $\psi_k\circ\varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme (de classe C^∞) de l'ouvert $\varphi_i(U_i\cap V_k)$ sur l'ouvert $\psi_k(U_i\cap V_k)$ de $\mathbb{R}^n$.

3. Une *structure différentiable* sur une variété topologique M, de dimension n, est la structure déterminée par la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas différentiables sur cette variété. Les atlas appartenant à cette classe, et les cartes qui en sont les éléments, sont dits *admissibles*. Munie d'une telle structure, la variété topologique M est appelée *variété différentiable*.

1.1.2 Remarques. Assez curieusement, bien que chacun de ses points possède un voisinage séparé, une variété topologique, ou différentiable, n'est pas toujours un espace topoogique séparé. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, on supposera que les variétés considérées sont séparées.

Pour simplifier, nous avons défini ci-dessus les *variétés différentiables de classe* C^∞, que nous appelerons variétés différentiables tout court. En inposant aux changements de carte d'être de classe de différentiabilité C^p, p entier ≥ 1, ou d'être analytiques, on définit de même les variétés différentiables de classe C^p, et les variétés analytiques. On utilise la notation C^ω pour désigner les variétés analytiques.

1.1.3 Définitions. Une application $f : M \to N$ d'une variété différentiable M (de dimension m) dans une autre variété différentiable N (de dimension n) est dite *différentiable* si pour toute carte admissible (U,φ) de M et toute carte admissible (V,ψ) de N, l'application composée $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$, définie sur l'ouvert $\varphi\big(U\cap f^{-1}(V)\big)$ de $\mathbb{R}^m$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est différentiable (de classe C^∞).

On appelle *rang au point* $x\in M$ de l'application différentiable $f : M\to N$ le rang au point $\phi(x)$ de la matrice jacobienne de $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$. On vérifie que ce rang ne dépend pas du choix des cartes admissibles (U,φ) et $(V\psi)$.On dit que f est une
– *submersion* au point x si son rang en ce point est égal à la dimension de N,
– *immersion* au point x si son rang en ce point est égal à la dimension de M.

1.2 Les fibrés tangent et cotangent et leurs puissances extérieures

1.2.1 Définitions. Soient M et N deux variétés différentiables.

1. Deux applications différentiables $f_1 : M\to N$ et $f_2 : M\to N$ sont dites C^1-*équivalentes* en un point x de M si $f_1(x)=f_2(x)$ et si, pour toute carte admissible (U,φ) de M et toute carte admissible (V,ψ) de N telles que $x\in U$ et $f_1(x)=f_2(x)\in V$, $\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1}$ et $\psi\circ f_2\circ\varphi^{-1}$ ont même matrice jacobienne au point $\varphi(x)$. La classe d'équivalence d'une application différentiable $f : M\to N$, pour cette relation, est appelée *jet d'ordre 1* de f au point x.

2. Soit $x\in M$. On appelle *vecteur tangent en x à M* le jet d'ordre 1 à l'origine d'une application différentiable $f : I\to M$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine et où f est telle que $f(0)=x$.

3. Soit $x\in M$. On appelle *covecteur au point x de M* le jet d'ordre 1 en x d'une application différentiable $h : U\to\mathbb{R}$, où U est un ouvert de M contenant x et où h est telle que $h(x)=0$.

1.2.2 Remarque. Pour vérifier que deux applications différentiables $f_1 : M\to N$ et $f_2 : M\to N$ ont même jet d'ordre 1 en un point $x\in M$, il suffit de vérifier que $f_1(x)=f_2(x)$ et que, pour pour une carte admissible (U,φ) de M et une carte admissible (V,ψ) de N telles que $x\in U$ et

$f_1(x) = f_2(x) \in V$, $\psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1}$ ont même matrice jacobienne au point $\varphi(x)$. On vérifie en effet que si cette propriété est vraie pour un choix particulier de ces cartes, elle est vraie pour tout autre choix.

1.2.3 Proposition. *Soit M une variété différentiable de dimension n.*

1. *L'ensemble des vecteurs tangents en un point $x \in M$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension n. On le note T_xM.*

2. *De même, l'ensemble des covecteurs au point $x \in M$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension n. On le note T^*_xM.*

3. *Les espaces tangent et cotangent à M en un point x sont en dualité. Le couplage par dualité entre un covecteur $\alpha \in T^*_xM$ et un vecteur $v \in T_xM$ est défini par la formule*

$$\langle \alpha, v \rangle = \frac{d(h \circ f)(t)}{dt} \Big|_{t=0} ,$$

où $f : I \to M$ est une application différentiable d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant l'origine telle que $f(0) = x$, dont le jet d'ordre 1 en 0 est le vecteur v, et où $h : U \to \mathbb{R}$ est une application différentiable d'un ouvert U de M contenant x dans $\mathbb{R}$, telle que $h(x) = 0$, dont le jet d'ordre 1 en x est le covecteur α.

Démonstration. On montre d'abord 2 : on peut ajouter deux applications différentiables h_1 et h_1 d'un ouvert U de M contenant x dans $\mathbb{R}$ telles que $h_1(x) = h_2(x) = 0$. Leur somme est encore une application différebntiable de U dans $\mathbb{R}$ qui prend en x la valeur 0. De même, on peut multiplier par un scalaire une application différentiable h de U dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = 0$. La structure d'espace vectoriel ainsi obtenue se transfère lorsqu'on passe aux jets d'ordre 1, et on a ainsi sur T^*_xM une structure naturelle d'espace vectoriel. Prenons une carte admissible (U, φ) de M avec $x \in U$, telle que les coordonnées locales associées $x^1, \dots, x^n$ soient nulles en x (on peut oujours se ramener à ce cas en remplaçant φ par $\varphi - \varphi(x)$). On vérifie que les jets d'ordre 1 au point x des fonctions coordonnées $x^1, \dots, x^n$, notées $dx^1(x), \dots, dx^n(x)$, forment une base de T^*_xM, qui est donc de dimension n.

On montre ensuite 3 en prouvant que le second membre de la formule qui défini $\langle \alpha, v \rangle$ ne dépend pas du choix des applications f et h dont les jets d'ordre 1, respectivement en 0 et en x, sont α et v.

Il est alors facile de prouver 1. □

1.2.4 Définitions. Soit M une variété différentiable de dimension n.

1. On appelle *fibré tangent* à M l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M, en tous ses points. On le note TM :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM .$$

L'application de TM dans M qui, à un vecteur $v \in TM$, associe le point $x \in M$ en lequel v est tangent, est appelée *projection canonique* et notée $\tau_M : TM \to M$.

2. On appelle *fibré cotangent* à M l'ensemble de tous les covecteurs attachés à M, en tous ses points. On le note T^*M :

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T^*_xM .$$

L'application de T^*M dans M qui, à un covecteur $\alpha \in T^*M$, associe le point $x \in M$ auquel α est attaché, est appelée *projection canonique* et notée $\pi_M : T^*M \to M$.

1.2.5 Proposition. *Soit M une variété différentiable de dimension n.*

1. *Le fibré tangent TM et le fibré cotangent T^*M possèdent des structures de variétés différentiables de dimension $2n$, naturellement déterminées par celle de M, telles que les projections canoniques $\tau_M : TM \to M$ et $\pi_M : T^*M \to M$ soient des submersions, c'est-à-dire des applications différentiables partout de rang n.*

2. *Chaque carte admissible (U, φ) de M détermine des cartes admissibles de TM et de T^*M, dont les domaines de définition sont, respectivement, $\tau_M^{-1}(U)$ et $\pi_M^{-1}(U)$.*

Démonstration. On montre d'abord 2. Notons $x^1, \ldots, x^n$ les fonctions coordonnées locales dans la carte (U, φ) de M. Pour tout point a de U, on note $dx^1(a), \ldots, dx^n(a)$ les jets d'ordre 1 au point a des fonctions, définies sur U, $x \mapsto x^1(x) - x^1(a)$, ..., $x \mapsto x^n(x) - x^1(a)$. Puisque ces fonctions sont nulles en a, leurs jets d'ordre 1 en a sont des covecteurs, éléments de T_a^*M, qui forment une base de cet espace vectoriel. Par suite, tout covecteur élément de $\pi^{-1}(U)$ peut être repéré au moyen de $2n$ coordonnées locales : les n coordonnées $x^1(a), \ldots, x^n(a)$ du point a de U auquel ce covecteur est attaché, et les n composantes $p_1, \ldots, p_n$ de ce covecteur dans la base $\big(dx^1(a), \ldots, dx^n(a)\big)$ de T_a^*M. Ceci détermine donc une carte de T^*M, de domaine $\pi_M^{-1}(U)$. On vérifie aisément que les changements de carte sont différentiables. L'application π_M, qui à un covecteur de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ fait correspondre le point de M de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$, est partout de rang n, et bien entendu est surjective. On a ainsi prouvé 2 et 1 pour le fibré cotangent T^*M.

Un raisonnement analogue, dans lequel on remplace la base $\big(dx^1(a), \ldots, dx^n(a)\big)$ de T_a^*M par la base duale souvent notée

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(a)\right),$$

de T_aM, prouve les propriétés 1 et 2 pour le fibré tangent TM. □

1.2.6 Définitions. Soit M une variété différentiable de dimension n.

1. Pour tout entier $p \geq 1$, un p-multivecteur au point $x \in M$ est une forme p-multilinéaire alternée sur l'espace cotangent T_x^*M. L'ensemble des p-multivecteurs en x est noté $\bigwedge^p(T_xM)$ et l'ensemble de tous les p-multivecteurs est noté $\bigwedge^p(TM) = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p(T_xM)$.

2. Pour tout entier $p \geq 1$, une p-forme au point $x \in M$ est une forme p-multilinéaire alternée sur l'espace tangent T_xM. L'ensemble des p-formes en x est noté $\bigwedge^p(T_x^*M)$ et l'ensemble de toutes les p-formes est noté $\bigwedge^p(T^*M) = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p(T_x^*M)$.

1.2.7 Proposition. *Soit M une variété différentiable de dimension n et $p \geq 1$ un entier.*

1. *L'ensemble $\bigwedge^p(T_xM)$ des p-multivecteurs et l'ensemble $\bigwedge^p(T_x^*M$ des p-formes en un point x de M sont des espaces vectoriel de dimension $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.*

2. *Les espaces $\bigwedge^p(TM)$ des p-multivecteurs et $\bigwedge^p(T^*M)$ des p-formes sont des variétés différentiables de dimensions $n + \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Les projections caoniques, encore notées τ_M et π_M, qui à un p-multivecteur, ou une p-forme, associent le point de M auquel ce p-multivecteur ou cette p-forme sont attachés, sont des submersions.*

3. *A chaque carte (U, φ) de M sont naturellement associées des cartes de $\bigwedge^p(TM)$ et de $\bigwedge^p(T^*M)$, de domaines $\tau_M^{-1}(U)$ et $\pi_M^{-1}(U)$, respectivement.*

Démonstration. Elle est semblable aux preuves des propositions 1.2.3 et 1.2.5. □

1.3 Champs et formes différentielles

1.3.1 Définition. Soit M une variété différentiable et p un entier ≥ 1.

1. On appelle *champ de p-multivecteurs* une section différentiable du fibré des p-multivecteurs, c'est-à-dire une application différentiable $P : M \to \bigwedge^p(TM)$ telle que $\tau_M \circ P = \mathrm{id}_M$. Pour $p = 1$, on dit simplement *champ de vecteurs*. On note $A^p(M)$ l'espace de tous les champs de p-multivecteurs.

2. De même, on appelle *p-forme différentielle* une section différentiable du fibré des p-formes, c'est-à-dire une application différentiable $\eta : M \to \bigwedge^p(T^*M)$ telle que $\tau_M \circ \eta = \mathrm{id}_M$. Pour $p = 1$ on dit *forme différentielle* ou *forme de Pfaff*. On note $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles.

1.3.2 Algèbres extérieures. Soit M une variété différentiable. On a défini ci-dessus $A^p(M)$ et $\Omega^p(M)$ pour tout entier $p \geq 1$. Par convention, on pose $A^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, espace des fonctions différentiables sur M à valeurs réelles, et, pour $p < 0$, $A^p(M) = \Omega^p(M) = 0$. On peut alors poser

$$A(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p(M) , \quad \Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \Omega^p(M) .$$

On sait que $A(M)$ et $\Omega(M)$ sont des algèbres graduées associatives et $\mathbb{Z}_2$-commutatives, dont la loi de composition est le produit extérieur, noté $\wedge$.

1.3.3 Expressions locales. Ainsi qu'on vient de le voir, à chaque carte (U, φ) de M, dont les fonctions coordonnées sont notées $x^1, \ldots, x^n$, sont naturellement associées des cartes de TM, de T^*M et des fibrés de leurs puissances extérieures.

Pour le fibré cotangent, les valeurs, en un point $x \in U$ du domaine de la carte, des différentielles dx^i des fonctions coordonnées forment une base de T_x^*M. Les n composantes, dans cette base, d'un élément courant de T_x^*M seront notées $p_1, \ldots, p_n$. Les $2n$ quantités $x^1, \ldots, x^n$, $p_1, \ldots, p_n$ forment un système de coordonnées dans une carte de T^*M, de domaine $\pi_M^{-1}(U)$, dite *associée* à la carte (U, φ) de M.

En d'autres termes, dx^1, dx^2, $\ldots, dx^n$ sont des sections du fibré cotangent, c'est-à-dire des formes de Pfaff, définies sur l'ouvert U de M, qui forment une base du module $\Omega^1(U)$ des sections de ce fibré définies sur U.

Pour le fibré tangent, on prend, en chaque point $x \in U$, la base de T_xM duale de la base $\bigl(dx^1(x),\, dx^2(x),\, \ldots, dx^n(x)\bigr)$. On a noté cette base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(x) \right) .$$

Les composantes dans cette base d'un élément courant de T_xM seront notées $v^1, \ldots, v^n$. Les $2n$ quantités $x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n$ forment un système de coordonnées dans une carte de TM, de domaine $\tau_M^{-1}(U)$, dite *associée* à la carte (U, φ) de M.

Les $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ sont des sections du fibré tangent, c'est-à-dire des champs de vecteurs, définis sur l'ouvert U de M, qui forment une base du module $A^1(U)$ des sections de ce fibré définies sur U.

Pour les fibrés des puissances extérieures $\bigwedge^p(T^*M)$ et $\bigwedge^p(TM)$, la construction est anologue. Commençons par $\bigwedge^p(T^*M)$. Pour chaque choix possible de p indices $(i_1, \ldots, i_p)$ choisis parmi

$(1,2,\ldots,n)$ vérifiant $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, on fait le produit extérieur $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. C'est une section du fibré $\bigwedge^p(T^*M)$ définie sur U, autrement dit une p-forme différentielle élément de $\Omega^p(U)$. Les $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ p-formes différentielles ainsi obtenues forment une base du module $\Omega^p(U)$. Autrement dit, toute p-forme différentielle définie sur U s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$\eta = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} \eta_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\,,$$

où les $\eta_{i_1\ldots i_p}$ sont des fonctions différentiables définies sur U.

De même, dans le domaine U de la carte de M considérée, les champs de p-multivecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\,, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < i_p \leq m$$

forment une base du module $A^p(U)$ des champs de p-multivecteurs défénis dans ce domaine, de sorte que tout p-multivecteur défini sur U s'exprime, de manière unique, sous la forme

$$P = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} P^{i_1\cdots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\,,$$

où les $P^{i_1\cdots i_p}$ sont des fonctions différentiables définies sur U.

1.4 La différentielle extérieure

1.4.1 Différentielle d'une fonction. Soit M une variété différentiable. Á toute fonction différentiable $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$, on peut, de manière très naturelle, associer une forme de Pfaff $df \in \Omega^1(M)$. On a d'ailleurs déjà utilisé cette construction pour les fonctions coordonnées dans le domaine d'une carte. Pour tout point $a \in M$, $df(a)$ est le covecteur, élément de T^*_aM, déterminé par le jet d'ordre 1 en a de la fonction, qui prend en a la valeur nulle, $f - f(a) : x \mapsto f(x) - f(a)$.

1.4.2 Théorème. *Soit M une variété différentiable. On note $\Omega(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Omega^p(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur cette variété.*

Il existe un opérateur linéaire unique $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$, appelé différentielle extérieure, *ayant les propriétés suivantes.*

1. *L'opérateur d est gradué de degré 1, ce qui signifie que*

$$\textit{pour chaque entier } p\,, \quad d\big(\Omega^p(M)\big) \subset \Omega^{p+1}(M)\,.$$

2. *Lorsque $f \in \Omega^0(M = C^\infty(M,\mathbb{R})$, $df \in \Omega^1(M)$ est la différentielle de f déjà définie (1.4.1).*
3. *L'opérateur d est une* dérivation *graduée. Cela signifie que*

$$\textit{si } \eta \in \Omega^p(M) \textit{ et } \zeta \in \Omega(M)\,, \quad d(\eta \wedge \zeta) = d\eta \wedge \zeta + (-1)^p \eta \wedge d\zeta\,.$$

4. *L'opérateur d est de carré nul*

$$d \circ d = 0\,.$$

Démonstration. Puisque d est une dérivation, c'est un opérateur local, ce qui permet de travailler dans le domaine d'une carte. Les propriétés que cet opérateur doit posséder sont telles que l'expression locale, dans le domaine d'une carte, de la différentielle extérieure d'une forme différentielle de degré p est parfaitement déterminée. Il reste à vérifier que cette expression a bien une signification intrinsèque, c'est-à-dire que lors d'un changement de carte, c'est bien toujours le même élément de l'algèbre des formes différentielles qu'on définit. La vérification nécessite un calcul assez laborieux, mais instructif. Il existe bien entendu aussi des preuves plus intrinsèques que le lecteur trouvera dans n'importe quel ouvrage de géométrie différentielle. □

1.4.3 Expression locale de la différentielle extérieure. Nous allons l'indiquer successivement pour une fonction $f \in \Omega^0(M)$, une forme de Pfaff $\alpha \in \Omega^1(M)$, une 2-forme différentielle $\omega \in \Omega^2(M)$. Nous considérons une carte (U,φ) de M dont les coordonnées locales sont $x^1,\dots,x^m$.

La fonction $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ s'exprime, dans cette carte, comme une fonction de n variables réelles $x^1,\dots,x^n$. Pour alléger l'écriture, nous noterons également f cette fonction de n variables réelles. Les puristes la noteraient $f\circ\varphi^{-1}$. La différentielle df a pour expression

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i\,.$$

Une forme de Pfaff $\alpha \in \Omega^1(M)$, a pour expression locale

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, dx^j\,.$$

Sa différentielle extérieure a pour expression

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} d\alpha_i \wedge dx^i = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^j = \sum_{1\leq i<j\leq m} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}\right) dx^i\wedge dx^j$$

compte tenu de $dx^j\wedge dx^i = -dx^i\wedge dx^i$.

Une 2-forme différentielle $\omega \in \Omega^2(M)$ a pour expression locale

$$\omega = \sum_{1\leq j<k\leq n} \omega_{jk}\, dx^j\wedge dx^k\,;$$

Sa différentielle extérieure a pour expression

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\leq j<k\leq n} d\omega_{jk}\wedge dx^j\wedge dx^k = \sum_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j<k\leq n} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k \\ &= \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \left(\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}\right) dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k \end{aligned}$$

compte tenu de $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ et de $dx^j\wedge dx^i = -dx^i\wedge dx^j$.

1.4.4 Définitions. Une forme $\eta \in \Omega^p(M)$ est dite

- *fermée* si $d\eta = 0$,
- *exacte* s'il existe une forme $\zeta \in \Omega^{p-1}(M)$ telle que $\eta = d\zeta$.

1.4.5 Expression d'une 2-forme fermée. Soit ω une 2-forme différentielle ayant pour expression locale, dans une carte de M dont les coordonnées locales sont $x^1,\dots,x^n$,

$$\omega = \sum_{1\leq j<k\leq n} \omega_{jk}\, dx^j\wedge dx^k\,;$$

Cette forme est fermée si et seulement si, pour tous (i,j,k), $1\leq i<j<k\leq n$,

$$\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} = 0\,.$$

En particulier, une 2-forme dont les composantes (dans des cartes bien choisies) sont des constantes est fermée.

1.4.6 Changement de carte. Soit M une variété différentiable, $(x^1,\dots,x^n)$ et $(y^1,\dots,y^n)$ les coordonnées locales dans deux cartes dont les domaines U et V ont une intersection non vide.

Formules pour la variété N :

$$y^i = y^i(x^1,\dots,x^n) \quad \text{et inversement} \quad x^i = x^i(y^1,\dots,y^n)\,,$$

Formules pour le fibré tangent : Si $(x^1,\dots,x^n,v^1,\dots,v^n)$ et $(y^1,\dots,y^n,w^1,\dots,w^n)$ sont les coordonnés locales dans les cartes associées de TM :

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} v^k\,, \quad \text{et inversement} \quad v^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} w^k\,.$$

Formules pour le fibré cotangent : Si $(x^1,\dots,x^n,p_1,\dots,p_n)$ et $(y^1,\dots,y^n,q_1,\dots,q_n)$ sont les coordonnées locales dans les cartes associées de T^*M, on a

$$p_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} q_k\,, \quad \text{et inversement} \quad q_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} p_k\,.$$

Ces formules résultent immédiatement de

$$dy^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k\,, \quad \text{par dualité} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}\,,$$

et des formules réciproques obtebues en échangeant les rôles des x^i et des y^j.

1.5 Champs de vecteurs

Dans tout ce paragraphe M est une variété différentiable. On va rappeler les constructions qui permettent d'associer à un champ de vecteurs $X \in A^1(M)$ une dérivation $\mathcal{L}(X)$, appelée *dérivée de Lie selon* X, de l'algèbre des fonctions différentiables $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Cette dérivation se prolonge d'ailleurs, avec le même nom, en une dérivation graduée de degré 0 aux algèbres extérieures $\Omega(M)$ et $A(M)$. En particulier, elle détermine sur $A^1(M)$ une structure d'algèbre de Lie.

On rappelera aussi qu'un champ de vecteurs $X \in A^1(M)$ détermine une équation différentielle sur M, et on définira les notions de *flot* et de *variété des mouvements* pour cette équation.

1.5.1 Définition. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs et $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ une fonction différentiable. On appelle *dérivée de Lie de* f *selon* X et on note $\mathcal{L}(X)f$, ou parfois $X.f$, la fonction

$$\mathcal{L}(X)f(x) = \bigl\langle df(x), X(x)\bigr\rangle\,, \quad x \in M\,.$$

1.5.2 Proposition. *La dérivée de Lie selon un champ de vecteurs X est une dérivation de l'algèbre des fonctions $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Cela signifie que $\mathcal{L}(X)$ est un endomorphisme linéaire de cet espace et que, si f et $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ sont deux fonctions,*

$$\mathcal{L}(X)(fg) = \bigl(\mathcal{L}(X)f\bigr)g + f\bigl(\mathcal{L}(X)g\bigr)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que la différentielle extérieure d est une dérivation, donc que $d(fg) = (df)g + f(dg)$. □

1.5.3 Expression de la dérivée de Lie en coordonnées locales. Si le champ de vecteurs X a pour expression locale

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

la dérivée de Lie de f selon X a pour expression locale

$$\mathcal{L}(X) f = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} .$$

1.5.4 Proposition. *Soient X et $Y \in A^1(M)$ deux champs de vecteurs. Il existe un unique champ de vecteurs, appelé* crochet de X et de Y *et noté $[X,Y]$, tel que pour toute fonction $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$,*

$$\mathcal{L}\bigl([X,Y]\bigr) f = \bigl(\mathcal{L}(X) \circ \mathcal{L}(Y) - \mathcal{L}(Y) \circ \mathcal{L}(X)\bigr) f .$$

Démonstration. On peut, soit faire le calcul en coordonnées locales et constater que les dérivées partielles secondes de f disparaissent, soit remarquer que le commutateur de deux dérivations est une dérivation et que toute dérvation de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ est de la forme $\mathcal{L}(Z)$, pour un champ de vecteurs Z parfaitement déterminé. □

1.5.5 Expression du crochet en coordonnées locales. Si les champs de vecteurs X et Y ont pour expression locale

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

le crochet $[X,Y]$ a pour expression locale

$$[X,Y] = \sum_{k=1}^{n} \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

1.5.6 Théorème. *Muni du crochet comme loi de composition, l'espace $A^1(M)$ des champs de vecteurs sur M est une algèbre de Lie. Cela signifie que ce crochet est bilinéaire, antisymétrique ($[Y,X] = -[X,Y]$), et qu'il vérifie l'identité de Jacobi*

$$\bigl[X,[Y,Z]\bigr] + \bigl[Y,[Z,X]\bigr] + \bigl[Z,[X,Y]\bigr] = 0 , \quad X\,,\ Y \text{ et } Z \in A^1(M) .$$

De plus, le crochet vérifie l'identité de Leibniz

$$[X, fY] = \bigl(\mathcal{L}(X) f\bigr) Y + f[X,Y] , \quad X \text{ et } Y \in A^1(M) ,\ f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) .$$

Démonstration. Ces propriétés sont faciles à établir par des calculs utilisant les expressions locales. □

1.5.7 Remarque. La dérivée de Lie $\mathcal{L}(X)$ selon un champ de vecteurs X s'étend en une dérivation graduée de degré 0 des algèbres extérieures $\Omega(M)$ et $A(M)$. En particulier $\mathcal{L}(X)$ applique $A^1(M)$ dans lui-même et

$$\mathcal{L}(X) Y = [X,Y] , \quad X \text{ et } Y \in A^1(M) .$$

Nous définirons plus loin ce prolongement de $\mathcal{L}(X)$ en dérivation des algèbres extérieures en utilisant la notion de *flot* d'un champ de vecteurs.

1.5.8 Définitions. Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs. On appelle *équation différentielle associée à X* l'équation

$$\frac{d f(t)}{dt} = X\bigl(f(t)\bigr) .$$

On appelle *solution* ou *courbe intégrale* de cette équation une application différentiable $f : I \to M$, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans M, tel qu'en tout point $t \in I$, l'égalité exprimée par l'équation différentielle soit satisfaite.

1.5.9 Commentaire. Avec les notations de la définition ci-dessus, on rappelle que, pour tout $t \in I$, $\dfrac{df(t)}{dt}$ désigne le jet d'ordre 1 en 0 de l'application $s \mapsto f(t+s)$. C'est donc, conformément à la définition 1.2.1, un covecteur attaché au point $f(t)$.

On rappelle aussi que puisque le champ de vecteurs X a été supposé différentiable de classe C^∞, pour tout $x_0 \in M$, il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle associée à X qui prend la valeur x_0 pour $t = 0$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine. Cela justifie la définition suivante.

1.5.10 Définition. On appelle *flot* (ou parfois *flot réduit*) d'un champ de vecteurs X l'application, définie sur une partie Ω_X de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans M, notée $(t,x) \mapsto \Phi_X(t,x)$, ayant les propriétés suivantes. Pour tout $x \in M$, $I_X(x) = \big\{t \in \mathbb{R}; (t,x) \in \Omega_X\big\}$ est l'intervalle ouvert (toujours non vide car contenant 0) sur lequel est définie la solution maximale de l'équation différentielle associée à X qui prend la valeur x pour $t = 0$, et cette solution maximale est

$$t \mapsto \Phi_X(t,x)\,.$$

1.5.11 Propriétés du flot. On montre que l'ensemble Ω_X sur lequel est défini le flot Φ_X du champ de vecteurs X est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et que Φ_X est une application différentiable. Cette application vérifie

$$\Phi_X(0,x) = x\,, \quad \frac{\partial \Phi_X(t,x)}{\partial t} = X\big(\Phi_X(t,x)\big)\,, \quad (t,x) \in \Omega_X\,.$$

Ces expressions ne font qu'expliciter la définition.

On montre aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$D_X(t) = \big\{\, x \in M; (t,x) \in \Omega_X \,\big\}$$

est un ouvert (pouvant être vide) de M, et que l'application

$$x \mapsto \Phi_X(t,x)$$

est un difféomorphisme de $D_X(t)$ sur $D_X(-t)$, dont l'inverse est

$$y \mapsto \Phi_X(-t,y)\,.$$

On montre enfin que

$$\Phi_X\big(t_2, \Phi_X(t_1,x)\big) = \Phi_X(t_2+t_1,x)\,, \quad t_1 \text{ et } t_2 \in \mathbb{R}\,, \quad x \in M\,,$$

en ce sens que chaque fois qu'un des membres de cette égalité est défini, l'autre l'est aussi et l'égalité est vérifiée.

1.5.12 Remarque. La notion de flot s'étend sans difficulté aux *équations différentielles non autonomes* de la forme

$$\frac{df(t)}{dt} = X\big(t, f(t)\big)\,.$$

Dans cette expression, $X : (t,x) \mapsto X(t,x)$ est un *champ de v ecteurs dépendant du temps*, c'est-à-dire une application différentiable, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et à valeurs dans TM, telle que pour tous (t,x) pour lequel $X(t,x)$ est défini, on ait $X(t,x) \in T_xM$. Le *flot* (on dit parfois *flot complet*, pour souligner la distinction à faire avec le *flot réduit*) de cette équation est une application Φ_X, définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$, telle que pour tout couple $(t_0,x_0) \in \mathbb{R} \times M$ pour lequel $X(t_0,x_0)$ est défini, l'application $t \mapsto \Phi_X(t,t_0,x_0)$ soit la solution maximale de l'équation différentielle ci-dessus prenant la valeur x_0 pour $t = t_0$.

1.6 Prolongement aux vecteurs d'une application et image réciproque d'une forme

1.6.1 Proposition. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable d'une variété différentiable M dans une autre variété différentiable N. Soit $x \in M$ et $v \in T_xM$. Soit d'autre part $\phi : I \to M$ une application différentiable définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant l'origine, à valeurs dans M, vérifiant $\varphi(0) = x$, et dont le jet d'ordre 1 en 0 est le vecteur v. Le jet d'ordre 1 à l'origine de l'application $f \circ \varphi : I \to N$ est un vecteur, élément de $T_{f(x)}N$, qui dépend linéairement de $v \in T_xM$, mais pas du choix de l'application φ. On définit ainsi une application différentiable $Tf : TM \to TN$ appelée* prolongement de f aux vecteurs*, qui vérifie $\tau_N \circ Tf = \tau_M \circ f$, c'est-à-dire qui rend commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\tau_M"'] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Elle résulte d'un simple calcul en coordonnées locales. □

1.6.2 Proposition. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable d'une variété différentiable M dans une autre variété différentiable N. Soit $\eta \in \Omega^p(N)$ une forme différentielle de degré p sur N. Pour tout $x \in M$ et tous $v_1, \ldots, v_p \in T_xM$ on pose*

$$f^*\eta(x)(v_1,\ldots,v_p) = \eta\big(f(x)\big)\big(Tf(v_1),\ldots,Tf(v_p)\big).$$

On définit ainsi une p-forme différentielle $f^*\eta \in \Omega^p(M)$ appelée image réciproque *de η par f.*

L'application $\eta \mapsto f^*\eta$ est un homomorphisme de l'algèbre extérieure $\Omega(N)$ dans l'algèbre extérieure $\Omega(M)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

1.6.3 Remarque. On ne peut en général pas définir l'image réciproque par une application différentiable $f : M \to N$, d'un champ de vecteurs, ou d'un champ de multivecteurs, sur la variété N. On peut cependant le faire dans le cas particulier important où $f : M \to N$ est un difféomorphisme. Cette remarque va nous permettre de défrinir la dérivée de Lie, relativement à un champ de vecteurs, des champs de multivecteurs aussi bien que des formes différentielles.

1.6.4 Proposition. *Soit $X \in A^1(M)$ un champ de vecteurs sur la variété différentiable M et Φ_X son flot. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_{X\,t}$ le difféomorphisme $x \mapsto \Phi_{X\,t}(x) = \Phi(t,x)$, défini sur l'ouvert $D_X(t)$ de M (1.5.11). Pour toute forme différentielle $\eta \in \Omega(M)$ et tout $x \in M$, on pose*

$$\mathcal{L}(X)\eta(x) = \frac{d\big((\Phi_{X\,t})^*\eta(x)\big)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Cette formule définit une forme différentielle $\mathcal{L}(X)\eta \in \Omega(M)$, appelée dérivée de Lie de η selon X*. L'application $\eta \mapsto \mathcal{L}(X)\eta$ est une dérivation graduée de degré 0 de l'algèbre extérieure $\Omega(M)$.*

Une formule analogue permet de définir de même la dérivée de Lie selon X sur l'algèbre extérieure $A(M)$ des champs de multivecteurs, qui est également une dérivation graduée de degré 0 de cette algèbre.

Démonstration. Nous ne ferons ici que l'esquisser. Supposons par exemple que η soit une forme différentielle de degré p. Quel que soit $x \in M$, pour t assez petit en valeur absolue, x est élément de $D_X(t)$. Donc $t \mapsto (\Phi_{X\,t})^*\eta(x)$ est une courbe paramétrée dans l'espace vectoriel $\bigwedge^p(T_x^*M)$. On vérifie que cette courbe est différentiable, de sorte que sa dérivée, pour $t = 0$, a un sens et est un élément du même espace $\bigwedge^p(T_x^*M)$. Il est alors facile de vérifier que l'opérateur $\mathcal{L}(X)$ ainsi défini vérifie

$$\mathcal{L}(X)(\eta \wedge \zeta) = \big(\mathcal{L}(X)\eta\big) \wedge \zeta + \eta \wedge \big(\mathcal{L}(X)\zeta\big)\,,$$

donc est bien une dérivation de $\Omega(M)$ □

2 Structures symplectiques

2.1 Définition et premières propriétés

2.1.1 Définition. Une *structure symplectique* sur une variété différentiable M est la donnée, sur cette variété, d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une forme différentielle ω, de degré 2, satisfaisant les deux propriétés :

– la forme ω est fermée,

$$d\omega = 0\,,$$

– et elle est partout non dégénérée, ce qui signifie que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur *non nul* $v \in T_xM$ tangent à M au point x, il existe un autre vecteur $w \in T_xM$, tangent à M au même point x, tel que

$$\omega(x)(v,w) \neq 0\,.$$

On dit alors que (M,ω) est une *variété symplectique*.

2.1.2 La forme de Liouville. Sur le fibré cotangent T^*N à une variété différentiable N, de dimension n, il existe une 1-forme différentielle naturelle, appelée *forme de Liouville*, notée η (parfois η_N), ainsi définie :

$$\big\langle \eta(\xi), \zeta \big\rangle = \big\langle \xi, T\pi_N(\zeta) \big\rangle\,.$$

Dan cette expression,$\xi \in T^*N\,,\ x = \pi_N(\xi) \in N\,,\ \zeta \in T_\xi(T^*N)\,,\ T\pi_N(\zeta) \in T_xN\,.$

Le diagramme commutatif ci-dessous illustre cette construction.

$$\begin{tikzcd}
T(T^*N) \arrow[r, "T\pi_N"] \arrow[d, "\tau_{T^*N}"'] & TN \arrow[d, "\tau_N"] \\
T^*N \arrow[r, "\pi_N"] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\zeta \arrow[r, mapsto, "T\pi_N"] \arrow[d, mapsto, "\tau_{T^*N}"'] & T\pi_N(\zeta) \arrow[d, mapsto, "\tau_N"] \\
\xi \arrow[r, mapsto, "\pi_N"] & x
\end{tikzcd}$$

2.1.3 Expression locale et propriétés de la forme de Liouville. Soient $(x^1,\ldots,x^n)$ les coordonnées locales dans une carte de N et $(x^1,\ldots,x^n,p_1,\ldots,p_n)$ les coordonnées locales dans la carte associée de T^*N. La forme de Liouville a pour expression locale

$$\eta_N = \sum_{i=1}^n p_i\,dx^i\,.$$

Elle prend une valeur nulle lorsqu'on l'applique à un vecteur vertical (dont la projection sur N est nulle) ; son expression locale ne comporte pas de terme en dp_i. On dit qu'elle est *semi-basique*.

2.1.4 Définition. On appelle *forme symplectique canonique* du fibré cotangent la différentielle extérieure de la forme de Liouville

$$\omega = d\eta_N\,.$$

2.1.5 Commentaire. Puisque $d\circ d = 0$, on a bien $d\omega = d(d\eta) = 0$. Pour montrer que ω est symplectique, il reste à vérifier qu'elle est non dégénérée. Cela résulte immédiatement de son expression en coordonnées locales, qui est

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i\,.$$

Cette expression locale confirme d'ailleurs que ω est fermée puisque ses composantes sont des constantes.

2.1.6 Théorème (Darboux)**.** *Soit (M,ω) une variété symplectique connexe. La dimension de cette variété est nécessairement paire ; notons la $2n$. Tout point de M possède un voisinage ouvert qui est le domaine d'une carte dont les coordonnées locales, notées $(x^1,\dots,x^{2n})$, sont telles que la forme ω ait pour expression*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i\,.$$

Une telle carte est dite canonique*, ou* de Darboux.

2.1.7 Commentaire. Ce théorème montre que localement, au voisinage de chacun de ses points, une variété symplectiqu est isomorphe à un fibré cotangent. Il montre aussi que deux variétés symplectique de même dimension sont localement isomorphes.

2.1.8 Produit scalaire défini par une forme symplectique. Une forme symplectique ω sur une variété M détermine un "produit scalaire" : pour tout point $x\in M$,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \qquad (v,w) \mapsto \omega(x)(v,w)\,.$$

Ce produit scalaire a des propriétés très différentes de celui déterminé par une structure euclidienne, riemannienne ou pseudo-riemannienne. Tou d'abord, il est *antisymétrique*, alors que si g est une métrique pseudo-riemannienne sur M,

$$T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \qquad (v,w) \mapsto g(x)(v,w)$$

est *symétrique*.

Et surtout, le théorème de Darboux montre qu'il n'existe pas, pour les structures symplectiques, d'équivalent de la *signature* des structures pseudo-riemanniennes.

2.1.9 Isomorphismes déterminés par une structure symplectique. Une structure symplectique ω sur M détermine un isomorphisme, noté $\omega^\flat$, de TM sur T^*M :

$$x\in M\,,\quad v\in T_xM\,,\quad \omega^\flat(v) == -i(v)\bigl(\omega(x)\bigr) \in T^*_xM\,.$$

On note aussi $\omega^\flat$ l'isomorphisme du module des champs de vecteurs sur le module des 1-formes différentielles sur M :

$$V\in A^1(M)\,,\quad \omega^\flat(V) = -i(V)\omega \in \Omega^1(M)\,.$$

On notera $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ l'isomorphisme inverse de $\omega^\flat$, et on notera aussi $\Lambda^\sharp$ l'isomorphisme correspondant de $\Omega^1(M)$ sur $A^1(M)$.

2.1.10 Structure de Poisson associée à une structure symplectique. L'isomorphisme $\omega^\flat : TM \to T^*M$ et son inverse $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ se prolongent aux puissances extérieures de T^*M et de TM, donc aussi aux algèbres extérieures des formes différentielles et des multivecteurs sur M. En particulier

$$\Lambda^\sharp(\omega) = \Lambda$$

est un champ de bivecteurs sur M, appelé *structure de Poisson* associée à la structure symplectique ω.

Dans une carte de Darboux de coordonnées locales $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i\,, \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

2.1.11 Quelques formules. Soit (M, ω) une variété symplectique. On a

$$\zeta \text{ et } \xi \in \Omega^1(M)\,, \quad \Lambda(\zeta, \xi) = \langle \xi, \Lambda^\sharp \zeta \rangle\,.$$

De même,

$$V \text{ et } W \in A^1(M)\,, \quad \omega(V, W) = \langle \omega^\flat W, V \rangle\,.$$

2.1.12 Propriété importante . Le fait que ω soit fermée, c'est-à-dire vérifie

$$d\omega = 0$$

a pour conséquence

$$[\Lambda, \Lambda] = 0\,,$$

où le crochet figurant dans la formule ci-dessus est le *crochet de Schouten-Nijenhuis*.

2.1.13 Définition. Soient f et g deux fonctions différentiables définies sur la variété symplectique (M, ω). On appelle *crochet de Poisson* de ces deux fonctions, la fonction

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) = \omega\big(\Lambda^\sharp(df)\Lambda^\sharp(dg)\big).$$

est appelée *crochet de Poisson* de f et de g.

2.1.14 Proposition. *Le crochet de Poisson a les proppriétés suivantes.*

1. *Antisymétrie :*

$$\{g, f\} = -\{f, g\}\,.$$

2. *Identité de Jacobi*

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0\,.$$

Le crochet de Poisson fait de l'espace des fonctions différentiables sur une variété symplectique une algèbre de Lie.

2.2 Champs hamiltoniens

2.2.1 Définition. Le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à une fonction fonction différentiable f sur la variété symplectique (M, ω), noté X_f, est

$$X_f = \Lambda^\sharp(df)\,.$$

2.2.2 Quelques proprétés. Soient f et g deux fonctions différentiables sur la variété symplectique (M,ω). On a

$$i(X_f)\omega = -df\,; \quad \{f,g\} = \omega(X_f,X_g) = \langle dg, X_f\rangle = \Lambda(df,dg)\,.$$

L'application $f \mapsto X_f$ est un *homomorphisme d'algèbres de Lie* de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ muni du crochet de Poisson, dans $A^1(M)$ muni du crochet de Lie. Cela signifie que

$$[X_f,X_g] = X_{\{f,g\}}\,.$$

2.2.3 Les équations de Hamilton. On sait que chaque champ de vecteurs X défini sur une variété différentiable M détermine une équation différentielle

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(\varphi(t)\bigr)\,,$$

dont les solutions sont les courbes paramétrées différentiables $\varphi : I \to M$, définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, dont la dérivée en chaque point $t \in I$ est égale à la valeur de X au point $\varphi(t)$.

Sur une variété symplectique (M,ω), l'équation différentielle déterminée par le champ de vecteurs hamiltonien X_f associé à une fonction f est appelée *équation de Hamilton* associée à f, et la fonction f est appelée *hamiltonien* ou *fonction de Hamilton*.

Soit $\varphi : I \to M$ une solution de l'équation de Hamilton, de hamiltonien f,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X_f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,.$$

La dérivée d'une autre fonction différentiable g le long d'une courbe intégrale φ de X_f s'exprime au moyen du crochet de Poisson $\{f,g\}$:

$$\frac{d\bigl(g\circ\varphi(t)\bigr)}{dt} = \Bigl\langle dg\bigl(\varphi(t)\bigr), X_f\bigl(\varphi(t)\bigr)\Bigr\rangle = \{f,g\}\bigl(\varphi(t)\bigr)\,.$$

2.2.4 Définition. Une *intégrale première* de l'équation différentielle, associée au champ de vecteurs X,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X\bigl(\varphi(t)\bigr)$$

est une fonction g qui garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale de cette équation.

2.2.5 Proposition. *Une fonction différentiable g définie sur la variété symplectique (M,ω) est intégrale première de l'équation de Hamilton associée au hamiltonien f si et seulement si*

$$\{f,g\} = 0\,.$$

On dit alors que les fonctions f et g sont en involution.

2.2.6 Corollaire. *Soit (M,ω) une variété symplectiquE.*

1. **Théorème de l'énergie.** *Un hamiltonien f (indépendant du temps) sur M est intégrale première du champ hamiltonien associé X_f.*

2. **Théorème de Poisson.** *Le crochet de Poisson de deux intégrales premières du champ de vecteurs hamiltonien X_f est une intégrale première.*

Démonstration. La propriété 1 résulte de l'antisymétrie du crochet de Poisson., qui implique $\{f,f\} = 0$. La propriété 2 est une conséquence immédiate de l'identité de Jacobi

$$\bigl\{f,\{g,h\}\bigr\} + \bigl\{g,\{h,f\}\bigr\} + \bigl\{h,\{f,g\}\bigr\} = 0\,.$$

□

2.2.7 Expressions locales. L'expression de l'équation de Hamilton associée à la fonction f, au moyen des coordonnées locales $x^1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ dans une carte de Darboux de (M, ω), est

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \{f, x^i\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_i}\,, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \{f, p_i\} = -\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\,, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

L'expression du crochet de Poisson de deux fonctions f et g est

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

2.2.8 Flots hamiltoniens. Soit f une fonction différentiable sur la variété symplectique (M, ω) et X_f le champ de vecteurs hamiltonien associé.

Son flot Φ_{X_f} a une importante propriété : *il conserve la forme symplectique*. Cela signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme $\Phi_{X_f\,t}$ conserve la forme symplectique ω. On dit que c'est un *symplectomorphisme*.

$$\Phi^*_{X_f\,t}\,\omega = \omega\,.$$

Cette propriété (exprimée dans un autre langage) a été découverte par Joseph Louis Lagrange au début du XIXème siècle.

3 Aperçu historique

3.1 Origine du mot "symplectique"et de la notion de structure symplectique

Le mot *symplectique* semble avoir été employé pour la première fois dans le sens où nous l'entendons par Hermann Weyl (1885–1955), dans son livre *Classical groups* [16]. Il vient d'une racine grecque signifiant *complexe*, employée par Weyl car le mot *complexe*, venant du latin, avait déjà un autre sens en mathématiques.

La notion de structure symplectique est apparu bien avant de recevoir ce nom. On la trouve dans les travaux de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), d'abord lors de son étude de la variation lente des éléments orbitaux des planètes du système solaire, puis en toute généralité, comme une structure fondamentale existant sur l'ensemble des mouvements d'un système mécanique.

3.1.1 Les éléments orbitaux des planètes. On sait qu'en première (et très bonne) approximation, chaque planète du système solaire parcourt une ellipse dont le Soleil occupe un foyer, suivant une loi horaire bien déterminée, la loi des aires : l'aire balayée par le segment de droite joignant la planète au Soleil est une fonction linéaire du temps. Ce sont les deux premières lois découvertes par l'astronome et mathématicien Johannes Kepler (1571–1630). Dans cette approximation, la connaissance des *éléments orbitaux* de la planète suffit pour déterminer la position de celle-ci dans l'espace, à tout instant, passé, présent ou futur.

Ces éléments orbitaux sont au nombre de 6 :

– deux pour déterminer le plan de l'orbite ; par exemple, un angle déterminant la position de la trace de ce plan sur un plan de référence fixe, choisi une fois pour toutes, passant par le Soleil ; et un autre angle, mesurant l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à ce plan de référence ;
– deux autres pour déterminer la dimension et la forme de l'orbite, par exemple les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité,
– un encore pour déterminer la position de l'orbite dans son plan, par exemple l'angle formé par le grand axe de l'ellipse et la droite d'intersection de son plan avec le plan de référence,
– un dernier pour déterminer la position de la planète sur son orbite. Par exemple, sa position qu'elle occupe à une date choisie pour origine du temps.

Dans l'approximation keplérienne, la connaissance de la position de la planète à un instant particulier, par exemple l'instant choisi pour origine du temps, et celle des autres éléments orbitaux, suffit pour déterminer la position de la planète à tout instant puisque son mouvement obéit à la loi des aires et que la connaissance du demi-grand axe de son orbite détermine sa période. C'est la troisième loi de Kepler : le carré de la période du mouvement d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Puisque les éléments orbitaux sont au nombre de 6, l'ensemble des mouvements possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation keplérienne, une variété différentiable de dimension 6.

Nous ne considérons ici que les mouvements elliptiques (excluant les mouvements paraboliques ou hyperboliques, qui seraient plutôt ceux des comètes) et nous excluons les mouvements singuliers dans lesquels la planète aurait un mouvement rectiligne et entrerait en collision avec le Soleil.

On peut effectivement montrer, de manière parfaitement rigoureuse, ainsi que l'a fait par exemple Souriau [14] que dans l'approximation keplérienne, cet ensemble est bien une variété différentiable, la *variété des mouvements* de la planète.

On peut même (moyennant une opération appelée *régularisation des collisions*) éviter d'avoir à exclure les mouvements singuliers dans lesquels la planète entre en collision avec le Soleil ; mais alors la variété des mouvements n'est plus nécessairement séparée.

Il était d'ailleurs facile de voir que cette variété était nécessairement de dimension 6, car le mouvement de la planète est entièrement déterminé par les trois coordonnées (dans un système d'axes quelconque) de sa position et les trois composantes (dans ce même système) de sa vitesse, à un instant quelconque choisi comme origine du temps.

3.1.2 Au delà de l'approximation keplerienne. Ce n'est qu'en première approximation que les mouvements des planètes du système solaire sont des ellipses dont le Soleil est un foyer. Cette approximation suppose que chaque planète n'interagit gravitationnellement qu'avec le Soleil et a une masse négligeable auprès de la masse de celui-ci.

En réalité, même lorsqu'on ne tient pas compte des interactions gravitationnelles directes entre les planètes, l'orbite du mouvement keplérien de chaque planète est une ellipse ayant pour foyer non pas le Soleil, mais le centre de masse du système planète-Soleil, qui ne coïncide pas exactement avec le centre du Soleil, et qui dépend de la planète considérée. De sorte que les diverses planètes agissent nécessairement les unes sur les autres, non seulement par leurs interactions gravitationnelles mutuelles, mais aussi par l'intermédiaire de l'attraction gravitationnelle que chacune d'elles exerce sur le Soleil.

Pour en tenir compte, Lagrange a imaginé la *méthode de variation des constantes*.

3.1.3 Lagrange, Poisson, Cauchy : Chronologie.

1773 : Laplace, Mémoire lu à l'Académie des Sciences montrant que le grand axe des ellipses décrites par les planètes n'a pas de variation séculaire (en première approximation).

1776, 1781, 1782, ... : Lagrange, das plusieurs Mémoires de l'Académie de Berlin, améliore le résutat de Lagrange et étudie les variations des autres éléments orbitaux des planètes.

20 juin 1808 : Poisson, dand le mémoire *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes,* connsidère à nouveau ce problème et aùéliore les résultats de Lagrange.

22 août 1808 : Stimulé par la conbtribution de Poisson, Lagrange, dans *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*, reprend le problème auquel il n'avait pas travaillé depuis plus de 25 ans.

13 mars 1809 : Lagrange, dans *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*, montre la portée générale de la méthode qu'il a employée dans son précédent mémoire. Il clarifie grandement la présentation de cette méthode.

16 octobre 1809 : Poisson, dans *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, voit que Lagrange a laissé passer un détail important. Il définit les expressions aujourd'hui appelées “crochets de Poisson”.

19 février 1810 : Lagrange, dans *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, reconnaît l'intérêt de la contribution de Poisson, mais souligne le fait que les idées essentielles étaient présentes dans son précédent mémoire.

15 janvier 1835 : Hamilton, dans son *Second essay on a general method in Dynamics*, introduit le formalisme aujourd'hui appelé *formalisme hamiltonien*.

1837 : Cauchy, dans *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, reprend l'exposé de la méthode de Lagrange, en utilisant le formalisme hamiltonien. Cette Note serait extraite d'un Mémoire présenté à l'Académie de Turin en 1831, que je n'ai pas trouvé. Il serait intéressant pour les historiens de sciences de voir si ce mémoire de 1831 contient déjà le formalisme hamiltonien, avant la parution du travail de Hamilton.

3.1.4 La méthode de variation dess constantes.

Probablement inspiré par la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non homogènes qu'il avait déjà développée [7], Lagrange a eu l'idée de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil comme ayant lieu sur des orbites elliptiques dont les éléments orbitaux seraient, non plus parfaitement constants, mais lentement variables au cours du temps.

Il a cherché quelles sont les équations différentielles qui régissent cette variation [8]. Il a compris la portée très générale de ce procédé, qu'il a nommé *méthode de variation des constantes*.

Son mémoire lu à l'Académie des Sciences le 13 mars 1809 [9] présente cette méthode pour un système mécanique général. Lagrange considère un système mécanique dont l'énergie cinétique est de la forme

$$T = T(r, s, u, \dots, r', s', u' \dots),$$

où r, s, u, ... sont des variables indépendantes décrivant la position du système. Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, ce sont les trois coordonnées de la planète, dans un repère particulier. Nous noterons n leur nombre, qui est la dimension de la variété de configuration.

Les quantités r', s', u', ..., sont les dérivées de r, s, u, par rapport au temps t :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad ,\dots$$

Lagrange suppose d'abord ce système mécanique soumis à des forces dérivant d'un potentiel V, fonction de r, s, u, $\ldots$, mais pas de r', s', u', $\ldots$ Dans l'exemple du mouvement d'une planète, V est le potentiel gravitationnel créé par le Soleil. Les équations du mouvement, établies dans son traité [11], s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

La solution générale du système formé par ces n équations du second ordre dépend du temps t et de $2n$ constantes d'intégration, que Lagrange note a, b, c, f, g, h, $\ldots$. Cette solution générale est de la forme

$$r = r(t,a,b,c,f,g,h,\ldots), \quad s = s(t,a,b,c,f,g,h,\ldots), \quad u = \ldots.$$

Dans l'exemple particulier du mouvement d'une planète, les $2n$ constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$ sont les *éléments orbitaux*.

Puis Lagrange suppose que le potentiel V ne décrit les forces qui s'exercent sur le système mécanique qu'en première approximation, et qu'il doit, dans les équations du mouvement, être remplacé par $V - \Omega$, où Ω est une fonction de r, s, u, $\ldots$, et aussi du temps t. Dans l'exemple du mouvement d'une planète, Ω traduit les interactions gravitationnelles entre les planètes qui étaient auparavant négligées. Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}\,,$$

et des équations analogues dans lesquelles r et r' sont remplacés par s et s', u et u', $\ldots$

Pour déterminer la solution générale de ce nouveau système, Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r\Big(t, a(t), b(t), c(t), f(t), g(t), h(t), \ldots\Big)\,.$$

et des expressions analogues pour s, u, $\ldots$. La fonction

$$(t,a,b,c,f,g,h,\ldots) \mapsto r(t,a,b,c,f,g,h\ldots)$$

qui intervient dans ces expressions, et les fonctions analogues pour s, u, $\ldots$ sont, bien sûr, celles qui avaient été précédemment trouvées lors de la détermination du mouvement dans l'approximation où Ω est remplacé par 0.

Il reste à déterminer les $2n$ fonctions du temps $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$, $\ldots$, qui bien entendu dépendront, outre du temps t, de $2n$ constantes arbitraires.

3.1.5 Les parenthèses de Lagrange. Par des calculs assez laborieux (qu'il simplifie considérablement d'abord dans une *Addition*, puis dans un *Supplément au mémoire précédent*, publiés à la suite de son mémoire) Lagrange obtient les équations différentielles vérifiées par ces fonctions et découvre une propriété remarquable : ces équations prennent une forme simple lorsqu'on les exprime au moyen de grandeurs, qu'il note (a,b), (a,c), (a,f), $b,c)$, (b,f), $\ldots$, aujourd'hui appelées *parenthèses de Lagrange*.

Celles-ci s'expriment au moyen des constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, $\ldots$, et ne dépendent ni du temps t, ni des forces additionnelles agissant sur le système, représentées par Ω.

Ainsi que l'a remarqué J.-M. Souriau [15, 5], les parenthèses de Lagrange sont les composantes de la *forme symplectique canonique* de la variété des mouvements du système considéré, dans la carte ayant pour coordonnées locales a, b, c, f, g, h, ... Lagrange a ainsi, le premier, découvert la notion de *structure symplectique*, ainsi nommée, plus de 100 ans plus tard, par Hermann Weyl [16].

Précisons bien qu'il s'agit ici du système mécanique dont l'énergie cinétique est T et dont les forces appliquées dérivent du potentiel V : les forces additionnelles représentées par Ω n'entrent pas dans leurs expressions.

L'expression des parenthèses (a,b), (a,c), ... initialement obtenue par Lagrange est très compliquée, mais dans l'Addition à son Mémoire, il en donne une beaucoup plus simple, qu'il écrit (paragraphe 26 de [9]) :

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots .$$

Nous avons posé, comme le feront Hamilton [2,3] et Cauchy [1] environ 30 ans plus tard :

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial r'}, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial s'}, \quad p_u = \frac{\partial T}{\partial u'}.$$

Lagrange utilisait les notations moins parlantes T', T'' et T''' au lieu de p_r, p_s et p_u. Rappelons que r, s, u, ... sont des coordonnées locales sur la variété de configuration du système, et r', s', u' leurs dérivées par rapport au temps. L'énergie cinétique T, qui dépend de de r, s, u, ..., r', s', u', ..., est une fonction définie sur le fibré tangent à cette variété, appelée *variété des états cinématiques* du système. L'application

$$(r,s,u,\ldots,r',s',u',\ldots) \mapsto (r,s,u,\ldots,p_r,p_s,p_u,\ldots)$$

aujourd'hui appelée *transformation de Legendre*, est définie sur le fibré tangent à la variété de configuration, et prend ses valeurs dans le fibré cotangent à cette variété, appelé *espace des phases* du système.

Dans le cas le plus souvent rencontré, qui était celui considéré par Lagrange, où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive, cette application est un difféomorphisme.

Puisque les constantes d'intégration a, b, c, f, g, h, ... forment un système de coordonnées locales sur la variété des mouvements, leur donnée détermine complètement le mouvement du système (il s'agit du système considéré dans la première approximation, dans laquelle $\Omega = 0$). Par suite, pour chaque valeur momentamément fixée t du temps, les valeurs à l'instant t de r, s, u, ..., r', s', u', ..., sont parfaitement déterminées dès lors que a, b, c, f, g, h, ... sont donnés.

Réciproquement, le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles (attribué à Cauchy et Lipschitz, mais que Lagrange considérait comme allant de soi) montre que la connaissance de r, s, u, ..., r', s', u', ..., à un instant fixé quelconque t, détermine complètement le mouvement, donc détermine a, b, c, f, g, h, ...

En résumé, pour chaque valeur du temps t fixée, l'application qui, à un mouvement représenté par $(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots)$ fait correpondre les valeurs de $(r,\ s,\ u,\ldots,r',\ s',\ u',\ldots)$ à l'instant t, est un difféomorphisme de la variété des mouvements du système, sur la variété de ses états cinématiques.

En composant ce difféomorphisme avec la transformation de Legendre, nous voyons que, pour chaque instant t fixé,

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\ldots) \mapsto (r,\ s,\ u,\ldots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\ldots)$$

(où il faut comprendre que r, s, u, p_r, p_s, p_u désignent les valeurs prises par ces grandeurs à l'instant t considéré) est un difféomorphisme.

Le fait que, pour chaque valeur fixée de t, l'application

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\dots)\mapsto(r,\ s,\ u,\dots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\dots)$$

soit un difféomorphisme, permet de comprendre quel sens on doit donner aux parenthèses de Lagrange :

$$(a,b)=\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b}-\frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a}+\frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b}-\frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b}-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a}+\cdots.$$

3.1.6 Remarque. La parenthèse de Lagrange (a,b) n'a de sens que lorsqu'on a choisi, non seulement les deux fonctions a et b sur la variété des mouvements, mais aussi toutes les autres c, f, g, h, …, formant un système de coordonnées loales sur cette variété. En d'autres termes, (a,b) ne dépend pas que de a et de b, mais aussi de c, f, g, h, …. C'est une fonction sur la variété des mouvements.

En utilisant les concepts et notations du calcul différentiel extérieur (dont Lagrange ne disposait malheureusement pas, puisqu'ils ont été développés au XX-ème siècle par Élie Cartan), il est facile de vérifier que les parenthèses de Lagrange sont bien, au signe près, les composantes, dans la carte de l'espace des mouvements de coordonnées locales a, b, c, f, g, h, …, de la forme symplectique image réciproque, par le difféomorphisme

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h,\dots)\mapsto(r,\ s,\ u,\dots,\ p_r,\ p_s,\ p_u,\dots)$$

de la forme symplectique canonique du fibré cotangent à la variété de configuration.

$$\begin{aligned}
&(a,b)\,da\wedge db+(a,c)\,da\wedge dc+\cdots+(b,c)\,db\wedge dc+\cdots\\
&\quad=\left(\frac{\partial r}{\partial a}da+\frac{\partial r}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_r}{\partial a}da+\frac{\partial p_r}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial s}{\partial a}da+\frac{\partial s}{\partial b}db+\cdots\right)\wedge\left(\frac{\partial p_s}{\partial a}da+\frac{\partial p_s}{\partial b}db+\cdots\right)\\
&\qquad+\dots\\
&\quad=dr\wedge dp_r+ds\wedge dp_s+du\wedge dp_u+\cdots.
\end{aligned}$$

Au signe près, c'est l'expression, en coordonnées de Darboux, de la forme symplectique d'un fibré cotangent.

En prouvant que ses parenthèses ne dépendent pas directement du temps, Lagrange a, du même coup, prouvé que le flot du champ de vecteurs d'évolution, sur l'espace des phases, conserve la forme symplectique canonique.

3.1.7 Les formules de variation des constantes. Lagrange montre que des dérivées par rapport au temps t, des "constantes qu'on fait varier" a, b, …, vérifient

$$\sum_{j=1}^{2n}(a_i,aj)\frac{da_j}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial a_i},\quad 1\leq i\leq 2n,$$

où j'ai noté, pour faciliter l'écriture, a_i, $1\leq i\leq 2n$ au lieu de a, b, c, …, et où j'ai tenu compte de l'antisymétrie $(a_j,a_i)=-(a_i,a_j)$.

Lagrange indique qu'en résolvant ce système linéaire, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

Lagrange explique que les L_{ij} sont des fonctions des a_i qui ne dépendent pas explicitement du temps. En langage moderne, ce sont des fonctions définies sur la variété des mouvements. Mais Lagrange n'en donne pas explicitement l'expression. C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui le fera, à peine quelques mois plus tard.

3.1.8 Le mémoire de Poisson de 1809. Dans un mémoire lu à l'Institut de France le 16 octobre 1809 [13], Siméon Denis Poisson (1781–1840), qui avait été l'élève de Lagrange à l'École Polytechnique, reprend l'étude de la méthode de variation des constantes. Il introduit des quantités, définies sur la variété des mouvements, qu'il note (a,b), (a,c), …, qui *ne sont pas* les parenthèses de Lagrange. Ces grandeurs sont aujourd'hui appelées *crochets de Poisson*. Poisson utilise d'ailleurs aussi les parenthèses de Lagrange, mais il les note différemment : $[a,b]$ au lieu de (a,b), $[a,c]$ au lieu de (a,c), ….

Nous conserverons la notation (a,b), (a,c), …, pour les parenthèses de Lagrange et nous utiliserons la notation $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, … pour les crochets de Poisson.

3.1.9 Les crochets de Poisson. L'expression de ses crochets, donnée par Poisson, est la suivante :

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots.$$

Les crochets $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, …, sont donnés par des formules analogues. Dans ces formules, ce sont les coordonnées locales a, b, c, … sur la variété des mouvements qui sont considérés comme fonctions de l'état dynamique du système à l'instant t, décrit par les valeurs, à cet instant, de r, p_r, s, p_s, u, p_u, ….

On reconnaît l'expression, en coordonnées de Darboux, du crochet de Poisson de deux fonctions a et b définies sur une variété symplectique.

3.1.10 Crochets de Poisson et parenthèses de Lagrange : comparaison. Les crochets de Poisson ont pour expression

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial p_r}\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial p_r} + \frac{\partial a}{\partial p_s}\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial p_s} + \frac{\partial a}{\partial p_u}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial p_u} + \cdots.$$

tandis que les parenthèses de Lagrange ont pour expression

$$(a,b) = \frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial p_r}{\partial b} - \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial p_r}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial p_s}{\partial b} - \frac{\partial s}{\partial b}\frac{\partial p_s}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial p_u}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial p_u}{\partial a} + \cdots.$$

C'est au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l'espace des phases au temps t sur l'espace des mouvements que s'expriment les crochets de Poisson, alors que les parenthèses de Lagrange s'expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme inverse, de l'espace des mouvements sur l'espace des phases au temps t.

On peut dire, en conclusion que les parenthèses de Lagrange sont les composantes, dans la carte de la variété des mouvements dont les coordonnées locales sont $a, b, \ldots$, de la forme symplectique de cette variété, tandis que les crochets de Poisson sont les composantes, dans cette même carte, du tenseur de Poisson Λ associé à cette forme symplectique.

Les matrices formées, d'une part, par les parenthèses de Lagrange (a,b), (a,c), ..., d'autre part par les crochets de Poisson $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, ... des fonctions coordonnées a, b, c, ... sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre. Ce fait a été clairement indiqué par Augustin Louis Cauchy (1789–1857) dans un mémoire présenté à l'Aacadémie de Turin le 11 octobre 1831 [1], 22 ans après la parution des mémoires de Lagrange et Poisson.

3.1.11 Remarques. Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques a un sens, alors que les parenthèses de Lagrange de deux fonctions différentiables quelconques n'en ont pas : les parenthèses de Lagrange n'ont de sens (comme les dérivées partielles par rapport à certaines variables) que pour une famille de fonctions qui sont les fonctions coordonnées locales dans une carte.

Deux intégrales premières quelconques peuvent en général être choisies comme deux des coordonnées sur la variété des mouvements. Leur crochet de Poisson, étant une fonction sur cette variété, est aussi une intégrale première. Ce résultat, qui figure dans le mémoire de Poisson, est connu sous le nom de *théorème de Poisson*. On le présente souvent aujourd'hui comme une conséquence de l'identité de Jacobi, mais ce n'est pas ainsi que Poisson l'a découvert.

Lagrange et Poisson ont remarqué l'antisymétrie de leurs parenthèse et de leurs crochets, mais ne parlent pas de l'identité de Jacobi. C'est Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) [6, 4] qui, en la découvrant, a compris son importance et prouvé qu'elle est satisfaite par le crochet de Poisson, ainsi que par le crochet de Lie des champs de vecteurs. Rappelons son expression. Pour les fonctions

$$\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}=0\,,$$

et pour les champs de vecteurs

$$\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0\,.$$

3.1.12 Le mémoire de Lagrange de 1810. Dans ce mémoire, Lagrange revient sur les résultats qu'il avait obtenus dans son premier mémoire. Il utilise les crochets de Poisson pour les exprimer de manière plus simple. Il écrit les équations différentielles qui gouvernent la variation des constantes sous la forme

$$\frac{da_i}{dt}=\sum_{j=1}^{2n}\{a_i,a_j\}\frac{\partial\Omega}{\partial a_j}\,,\quad 1\leq i\leq 2n\,.$$

Pour faciliter l'écriture j'ai noté a_i, $1\leq i\leq 2n$, les constantes qu'on fait varier (les coordonnées locales sur la variété des mouvements), au lieu de a, b, c, f, g, h comme le faisait Lagrange.

On remarquera que Lagrange aurait pu écrire ses équations de manière plus simple

$$\frac{da_i}{dt}=\{a_i,\Omega\}\,,\quad 1\leq i\leq 2n\,.$$

Il ne le fait pas (pas plus, d'ailleurs, que ne l'a fait Poisson dans son mémoire de 1809). Il n'emploie le crochet de Poisson que pour les fonctions coordonnées a_i, pas pour Ω qui pourtant peut parfaitement être considérée comme une fonction définie sur la variété des mouvements (mais dépendant aussi du temps).

3.1.13 La note de Cauchy de 1837. Cette note, publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, est extraite d'un long mémoire présenté par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Elle porte pratiquement le même titre que les mémoires de Lagrange et de Poisson

Cauchy utilise résolument le formalisme hamiltonien. Sa note est très concise (6 pages) et présente, de manière remarquablement claire et dans un langage très proche du langage moderne, l'essentiel des résultats de Lagrange et de Poisson. Cependant, lui non plus n'écrit pas de crochet de Poisson avec la fonction Ω (qu'il note d'ailleurs R).

Cauchy prouve (sans utiliser le mot *matrice*) que les matrices formées par les parenthèses de Lagrange, et par les crochets de Poisson, des fonctions coordonnées sur la variété des mouvements, sont inverses l'une de l'autre.

3.2 Retour sur la variation des constantes

Je vais maintenant présenter, dans le langage moderne, les résultats de Lagrange et Poisson concernant la variation des constantes, tels que je les comprends. Au langage près, je suivrai l'exposé de la note de Cauchy de 1837.

Sur une variété symplectique (M,ω) de dimension $2n$ on considère un système hamiltonien, dont le hamiltonien, dépendant éventuellement du temps, est noté $Q : M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (c'est la notation utilisée par Cauchy). Soit M_0 la variété des mouvements et $\Phi:\mathbb{R}\times M_0\to M$ $(t,a)\mapsto\Phi(t,a)$ le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien Q. Pour toute fonction différentiable $g : M\to\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\bigl(g\circ\Phi(t,a)\bigr)}{\partial t}=\{Q,g\}\bigl(\Phi(t,a)\bigr)\,.$$

Supposons maintenant que le *vrai* hamiltonien du système soit $Q+R$ au lieu de Q, R pouvant aussi dépendre de t.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une application $\Psi:\mathbb{R}\times M_0\to M_1$, $(t,b)\mapsto a=\Psi(t,b)$, où M_1 est la variété des mouvements du nouveau système, telle que $(t,b)\mapsto\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)$ soit le “flot” du champ de vecteurs de hamiltonien $Q+R$.

On doit avoir, pour toute fonction différentiable $g : M\to\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)=\{Q+R,g\}\Bigl(\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\,.$$

Mais pour chaque valeur particulière t_0 de t

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}=\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}+\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t_0,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}\,.$$

Puisque, pour t_0 fixé, $\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\mapsto\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)$ est le “flot” du champ de hamiltonien Q, le premier terme du membre de droite vaut

$$\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}=\{Q,g\}\Bigl(\Phi\bigl(t_0,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\,.$$

Donc le second terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigl(g\circ\Phi\bigl(t_0,\Psi(t,b)\bigr)\Bigr)\Big|_{t=t_0}&=\Bigl(\{Q+R,g\}-\{Q,g\}\Bigr)\Bigl(\Phi\bigl(t_0,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\\&=\{R,g\}_M\Bigl(\Phi\bigl(t_0,\Psi(t_0,b)\bigr)\Bigr)\\&=\{R\circ\Phi_{t_0},g\circ\Phi_{t_0}\}_{M_0}\bigl(\Psi(t_0,b)\bigr)\,,\end{aligned}$$

parce que $\Phi_{t_0} : M_0 \to M$ est de Poisson.

Mais $g_0 = g \circ \Phi_{t_0}$ peut être n'importe quelle fonction différentiable sur M_0, et la dernière égalité s'écrit

$$\left\langle dg_0, \frac{\partial \Psi(t,b)}{\partial t} \right\rangle_{t=t_0} = \frac{d\Big(g_0\big(\Psi(t,b)\big)\Big)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \{R \circ \Phi_{t_0}, g_0\}_{M_0}\big(\Psi(t_0,b)\big)\,.$$

Puisque t_0 peut être quelconque, cette dernière équation montre que pour tout $b \in M_1$ (variété des mouvements du système de hamiltonien $Q+R$), $t \mapsto \Psi(t,b)$ est une courbe intégrale, sur la variété M_0 des mouvements du système de hamiltonien Q, du champ de vecteurs de hamiltonien (dépendant du temps)

$$(t,a) \mapsto R\big(t, \Phi(t,a)\big)\,, \quad (t,a) \in \mathbb{R} \times M_0\,.$$

C'est le résultat découvert par Lagrange vers 1808.

4 Remerciements

Je remercie le Professeur Dominique Flament de m'avoir invité à présenter ce cours à l'Ecole d'été de Brasilia.

Merci également aux personnes qui ont eu la bienveillance et la patience de m'écouter.

5 Bibliographie

[1] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.

[2] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[3] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.

[4] T. Hawkins, *Jacobi and the birth of Lie's theory of groups*.

[5] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.

[6] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, G. Reimer, Berlin, 1881–1891.

[7] J.-L. Lagrange, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres de Berlin, 1775. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[8] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Mémoire lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[9] J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[10] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[11] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par les éditions Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par les éditions Blanchard, Paris.

[12] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France.

[13] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France.

[14] J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scie nze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.

[15] J.-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 45–54. Numérisé par Numdam, http ://www.numda

[16] H. Weyl, *Classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.