Chapitre I

Rappel de notions importantes

1. Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

1.1. Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. Un élément M de A (resp., un élément m de A) est dit *maximal* (resp., *minimal*) si tout élément x de A vérifie $x \leq M$ (resp., $m \leq x$). On dit aussi que M est *le plus grand élément de* A (resp., que m est *le plus petit élément de* A).

Lorsqu'il existe, le plus grand élément (ou le plus petit élément) d'une partie A de $\mathbf{R}$ est unique.

1.2. Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. On dit que A est *majoré* s'il existe un élément z de $\mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \leq z$. Tout élément z de $\mathbf{R}$ vérifiant cette propriété est appelé *majorant* de A.

De même, on dit que A est *minoré* s'il existe un élément z de $\mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $z \leq x$. Tout élément z de $\mathbf{R}$ vérifiant cette propriété est appelé *minorant* de A.

Lorsqu'il existe, le plus grand élément (resp., le plus petit élément) d'une partie non vide A de $\mathbf{R}$ est un majorant de A (resp., un minorant de A), jouant un rôle privilégié, puisque c'est le plus petit des majorants de A (resp., le plus grand des minorants de A).

Une partie non vide A de $\mathbf{R}$ peut être majorée (resp., minorée) et ne pas avoir de plus grand élément (resp., de plus petit élément). Exemple: l'intervalle ouvert $]0,1[$. Pour cette raison, on est conduit à introduire la notion suivante.

Soit A une partie non vide de R. On suppose A majorée, mais on ne fait aucune hypothèse sur l'existence éventuelle d'un plus grand élément de A. Soit B l'ensemble des majorants de A. Par hypothèse, B est non vide, et minoré par tout élément de A. On montre (c'est une propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbf{R}$ des réels) que B possède toujours un plus petit élément.

De même, on montre que l'ensemble des minorants d'une partie non vide et minorée A de $\mathbf{R}$ possède toujours un plus grand élément.

Cela justifie la définition suivante.

1.3. Définition. Soit A une partie non vide et majorée (resp., minorée) de $\mathbf{R}$. On appelle *borne supérieure* de A et on note $\sup A$ (resp., *borne inférieure* de A et on note inf A) le plus petit majorant de A (resp., le plus grand minorant de A), c'est-à-dire le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp., le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).

Lorsque la borne supérieure (resp., inférieure) de A appartient à A, la partie A possède un plus grand élément (resp., un plus petit élément), qui est précisément sa borne supérieure (resp., inférieure).

1.4. Caractérisation des bornes. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$. Un élément M de $\mathbf{R}$ est borne supérieure de A si et seulement si M vérifie les deux propriétés suivantes.

(i) M est un majorant de A, c'est-à-dire, tout élément x de A vérifie $x \leq M$.

(ii) Aucun réel strictement inférieur à M n'est un majorant de A, c'est-à-dire, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément x de A vérifiant $x > M - \epsilon$.

On laisse au lecteur le soin de formuler la caractérisation correspondante des bornes inférieures.

1.5. Usage de la droite réelle étendue $\overline{\mathbf{R}}$. Il est souvent commode de considérer la droite réelle étendue $\overline{\mathbf{R}}$, obtenue en ajoutant à $\mathbf{R}$ deux éléments, $-\infty$ et $+\infty$. On prolonge à $\overline{\mathbf{R}}$ la relation d'ordre usuelle de $\mathbf{R}$ en convenant que tout élément x de $\mathbf{R}$ vérifie $-\infty < x < +\infty$.

Les notions de majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure définies ci-dessus pour les parties de $\mathbf{R}$ s'étendent sans changement aux parties de $\overline{\mathbf{R}}$. On vérifie aisément les propriétés suivantes.

1. Toute partie non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ admet, dans $\overline{\mathbf{R}}$, au moins un majorant, $+\infty$, et au moins un minorant, $-\infty$.

2. L'ensemble des majorants (dans $\overline{\mathbf{R}}$) d'une partie non vide A de $\overline{\mathbf{R}}$ admet toujours un plus petit élément, qui par définition est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbf{R}}$. Cette borne supérieure est élément de A si et seulement si A possède un plus grand élément; lorsque c'est le cas, ce plus grand élément n'est autre que la borne supérieure.

De même, l'ensemble des minorants de A dans $\overline{\mathbf{R}}$ admet toujours un plus grand élément, qui par définition est la borne inférieure de A dans $\overline{\mathbf{R}}$. Cette borne inférieure est élément de A si et seulement si A possède un plus petit élément; lorsque c'est le cas, ce plus petit élément n'est autre que la borne inférieure.

3. Soit A est une partie non vide de $\mathbf{R}$. Sa borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$ est finie si et seulement si A est majorée dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire si et seulement si A possède une borne supérieure dans $\mathbf{R}$. Lorsque c'est le cas, les bornes supérieures de A dans $\mathbf{R}$ et dans $\overline{\mathbf{R}}$ coïncident

On laisse au lecteur le soin de formuler la propriété correspondante relative aux bornes inférieures.

4. Une partie non vide A de $\overline{\mathbf{R}}$ admet $+\infty$ comme borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si A n'a pas de majorant dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $M \in \mathbf{R}$ il existe $x \in A$ vérifiant $x > M$.

Le lecteur formulera la propriété correspondante de la borne inférieure.

2 Limites, valeurs d'adhérence

2.1. Définition. Soit (x_n), $n \in \mathbf{N}$ une suite, à valeurs réelles ou complexes. On dit qu'un élément l de $\mathbf{R}$ (si la suite est à valeurs réelles) ou de $\mathbf{C}$ (si la suite est à valeurs complexes) est la *limite* de cette suite, ou que la suite *converge* vers l, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n > N$, on ait $|x_n - l| < \epsilon$.

On peut, dans la définition ci-dessus, remplacer les inégalités strictes $n > N$ et $|x_n - l| < \epsilon$ par les inégalités larges correspondantes, $n \geq N$ et $|x - l| \leq \epsilon$.

La limite d'une suite à valeurs réelles ou complexes, lorsqu'elle existe, est unique.

Une suite qui admet une limite est dite *convergente*.

2.2. Théorème. *Une suite (x_n), $n \in \mathbf{N}$, à valeurs réelles ou complexes, admet une limite si et seulement si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :*

– *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous n et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant $n > N$ et $m > N$, on ait $|x_n - x_m| < \epsilon$.*

Lorsqu'une suite vérifie ce critère, on dit qu'elle est *de Cauchy.* On peut donc énoncer le théorème précédent en disant qu'une suite à valeurs réelles ou complexes converge si et seulement si elle est de Cauchy.

2.3. Théorème. *Une suite numérique (à valeurs réelles) croissante et majorée (resp., décroissante et minorée) converge, et sa limite est sa borne supérieure (resp., sa borne inférieure).*

La limite d'une suite n'existe pas toujours. On est amené à introduire les notions suivantes.

2.4. Définition. On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite à valeurs réelles ou complexes (x_n), $n \in \mathbf{N}$, tout élément b de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $n > N$ tel que $|x_n - b| < \epsilon$.

2.5. Théorème. *Une suite numérique bornée possède au moins une valeur d'adhérence.*

Lorqu'une suite (à valeurs réelles ou complexes) converge, elle possède une valeur d'adhérence unique, sa limite.

2.6. Définition. Soit (x_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite numérique (à valeurs réelles) bornée. On appelle *limite supérieure* de cette suite, et on note $\limsup(x_n)$, ou encore $\overline{\lim}(x_n)$, la limite de la suite (y_n), $n \in \mathbf{N}$, définie par

$$y_n = \sup\{\, x_m ; m \geq n \,\}\,.$$

De même, on appelle *limite inférieure* de cette suite, et on note $\liminf(x_n)$, ou encore $\underline{\lim}(x_n)$, la limite de la suite (z_n), $n \in \mathbf{N}$, définie par

$$z_n = \inf\{\, x_m ; m \geq n \,\}\,.$$

2.7. Remarque. Dans les hypothèses de la définition précédente, on notera que pour tout $n \in \mathbf{N}$ les bornes supérieure y_n et inférieure z_n de $\{\, x_m ; m \geq n \,\}$ existent, puisque la suite (x_n) est supposée bornée. On notera aussi que la suite (y_n) est décroissante et minorée, et la suite (z_n) croisante et majorée. Ces suites admettent donc des limites, qui sont leurs bornes inférieure et supérieure, respectivement. On voit donc que les limites supérieure et inférieure d'une suite numérique bornée existent toujours. Il est d'ailleurs facile de voir que la limite supérieure et la limite inférieure de (x_n) sont, respectivement, le plus grand et le plus petit élément de l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite.

2.8. Caractérisation des limites supérieure et inférieure. Dans les hypothèses de la définition 2.6, la limite supérieure l de la suite (x_n) vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs distinctes de l'indice $n \in \mathbf{N}$ pour lesquelles on a $x_n > l - \epsilon$, et il n'existe qu'un nombre fini de valeurs distinctes de $n \in \mathbf{N}$ pour lesquelles on a $x_n > l + \epsilon$.

Le lecteur formulera lui-même les propriétés caractéristiques correspondantes de la limite inférieure.

2.9. Usage de $\overline{\mathbf{R}}$. En considérant des bornes supérieures et inférieures dans $\overline{\mathbf{R}}$, on peut définir les notions de limite supérieure et de limite inférieure de manière telle que toute suite numérique (x_n), $n \in \mathbf{N}$, à valeurs réelles, ou même, éventuellement, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, même non bornée, admette toujours une limite supérieure et une limite inférieure. En effet, pour tout $n \in N$,

$$y_n = \sup\{\, x_m ; m \geq n \,\}$$

existe toujours puisqu'on admet $+\infty$ comme valeur possible; (y_n), $n \in \mathbf{N}$, est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, décroissante; elle admet une borne inférieure dans $\overline{\mathbf{R}}$, qui par définition est la limite supérieure de la suite (x_n).

De même, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_n = \inf\{\, x_m ; m \geq n \,\}$$

existe toujours dans $\overline{\mathbf{R}}$, et la suite (z_n) est croissante. Sa borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$ est, par définition, la limite supérieure de la suite (x_n).

Avec ces conventions, lorsque la suite (x_n) est valeurs dans $\mathbf{R}$, sa limite supérieure est $+\infty$ (resp., sa limite inférieure est $-\infty$) si et seulement si cette suite n'admet pas de majorant dans $\mathbf{R}$ (resp., si et seulement si cette suite n'admet pas de minorant dans $\mathbf{R}$).

Chapitre II

Séries numériques

1. Propriétés générales

1.1. Définition. Soit (u_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite numérique, à valeurs réelles ou complexes. On appelle *série de terme général* u_n la suite (S_n), $n \in \mathbf{N}$, définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, .$$

On dit que la série de terme général u_n *est convergente*, ou *converge*, lorsque la suite (S_n) converge, c'est-à-dire possède une limite. Lorsque c'est le cas, la limite de la suite (S_n) est appelée *somme* de la série de terme général u_n, et notée

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n \, .$$

Une série qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

1.2. Remarques.

1. Ainsi que le montre la définition ci-dessus, les séries sont, en fait, des suites dont les termes successifs sont formés d'une manière particulière: le terme S_n, de rang n, se déduit du terme précédent S_{n-1} par addition du terme général u_n de rang n de la série. On vérifie aisément que toute suite (z_n), $n \in \mathbf{N}$, peut être mise sous cette forme; il suffit en effet de poser

$$u_0 = z_0 \, , \quad \text{et, pour tout } n \geq 1 \, , \quad u_n = z_n - z_{n-1} \, .$$

2. Dans la définition ci-dessus, on a utilisé pour indexer les termes de la série l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. On utilise souvent aussi l'ensemble des entiers strictement positifs $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \backslash \{0\}$. On pourrait de même utiliser tout ensemble totalement ordonné isomorphe à $\mathbf{N}$.

1.3. Exemples.

1. Soient a et λ deux scalaires (réels ou complexes). La série de terme général

$$u_n = a\,\lambda^n$$

est appelée *série géométrique de raison* λ. En utilisant la formule

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a\,\lambda^k = \frac{a(1-\lambda^{n+1})}{1-\lambda}\,,$$

on montre aisément que cette série converge si et seulement si $|\lambda| < 1$. Dans ce cas, sa somme est

$$\sum_{k=O}^{\infty} a\,\lambda^k = \frac{a}{1-\lambda}\,.$$

2. Soit $s \in \mathbf{R}$. On appelle *série de Riemann* la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^s}\,, \qquad n \geq 1\,.$$

On montrera plus loin qu'elle converge si et seulement si $s > 1$. Sa somme, notée

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,,$$

joue un rôle important en théorie des nombres.

1.4. Quelques propriétés.

1. Si la série de terme général u_n converge, on a nécessairement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,.$$

2. Une série étant donnée, la modification ou la suppression d'un nombre fini de ses termes ne change pas sa nature (convergente ou divergente). Mais bien entendu, si la série est convergente, ces modifications changent la valeur de sa somme.

3. De même, une permutation d'un nombre fini de termes d'une série ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) de la série, et si la série est convergente, ne change pas la valeur de la somme. Mais attention! ceci n'est en général pas applicable aux permutations d'une infinité de termes d'une série. Voir cependant plus loin (paragraphe 3) le cas des séries absolument convergentes, pour lesquelles la propriété reste vraie.

4. Soit une série convergente de terme général u_n, et λ un scalaire (réel ou complexe). La série de terme général λu_n est convergente, et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \,.$$

5. De même, soient deux séries convergentes de termes généraux u_n et v_n. La série de terme général $u_n + v_n$ est convergente, et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0} +\infty v_n \,.$$

Appliqué aux séries, le critère de Cauchy (chapitre I, théorème 2.2) prend la forme suivante.

1.5. Théorème. *La série numérique, à termes réels ou complexes, de terme général u_n, $n \in \mathbf{N}$, converge si et seulement si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :*

– *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous n et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant $m > n \geq N$,*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| \leq \epsilon \,.$$

2. Séries à termes positifs

2.1. Définition. Une série, de terme général u_n, $n \in \mathbf{N}$, est dite *à termes positifs* si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$.

2.2. Proposition. *Une série à termes positifs, de terme général u_n, converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.*

2.3. Proposition. *On considère deux séries à termes positifs, dont les termes généraux, notés respectivement u_n et v_n, vérifient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$0 \leq u_n \leq v_n \,.$$

Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge aussi, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n \,.$$

Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge aussi.

L'application de la proposition 2.3 pour prouver la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs, en la comparant à une autre série à termes positifs dont on connaît déjà la nature, est appelée *méthode de comparaison.* Par comparaison avec une série géométrique, on obtient notamment les critères suivants.

2.4. Critères de convergence. Soit une série à termes positifs, de terme général u_n.

1. **Règle de Cauchy.** Soit

$$l = \limsup\left(\sqrt[n]{u_n}\right) .$$

Si $l > 1$, la série considérée diverge, et si $l < 1$, cette série converge. Si $l = 1$, l'application de cette règle ne permet pas de déterminer la nature de la série.

2. **Règle de d'Alembert.** On suppose $u_n > 0$, du moins pour n assez grand. Soit

$$M = \limsup\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) , \quad m = \liminf\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) .$$

Si $m > 1$, la série considérée diverge, et si $M < 1$, elle diverge. Si $m \leq 1 \leq M$, l'application de cette règle ne permet pas de déterminer la nature de la série.

Pour prouver la convergence d'une série à termes positifs, on peut également, dans certains cas, la comparer à une intégrale, comme indiqué dans la proposition suivante.

2.5. Proposition. *Soit f une fonction, définie sur $[0,+\infty[$, décroissante (au sens large), à valeurs ≥ 0, intégrable sur tout intervalle fini contenu dans $[0,+\infty[$. La série de terme général $u_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge si et seulement si l'intégrale*

$$\int_1^n f(x)\,dx$$

tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsque c'est le cas, on note cette limite

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx ,$$

et on a

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx .$$

2.6. Application. Cette proposition permet de montrer que la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^s}$, avec $s \in \mathbf{R}$, définie en 1.3, converge si et seulement si $s > 1$.

On rappelle ci-dessous la notion de fonctions équivalentes, étudiée en première année, utile pour simplifier l'étude de séries à termes positifs.

2.7. Définition. Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle (ou entière), à valeurs réelles ou complexes.

1. On dit que g est *négligeable auprès de* f lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit

$$g = o(f) \quad \text{pour } x \to +\infty\,,$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{R}$ (ou $N \in \mathbf{N}$) tel que, pour tout $x \geq N$,

$$\bigl|g(x)\bigr| \leq \epsilon \bigl|f(x)\bigr|\,.$$

2. On dit que f et g sont *équivalentes* lorsque x tend vers $+\infty$, si

$$f - g = o(f) \quad \text{pour } x \to +\infty\,.$$

On montre aisément que l'équivalence, au sens défini ci-dessus, est effectivement une relation d'équivalence, malgré la dissymétrie apparente des rôles de f et de g dans la définition.

2.8. Proposition. *On considère deux séries à termes positifs, dont les termes généraux sont notés u_n et v_n, respectivement. Si u_n et v_n sont équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$, ces séries sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.*

Cela résulte en effet la proposition 2.3 et de l'inégalité, vérifiée pour n assez grand, obtenue en faisant $\epsilon = 1$ dans la définition de l'équivalence,

$$\frac{u_n}{2} \leq v_n \leq 2u_n\,.$$

3. Séries absolument convergentes

3.1. Définition. Une série, à termes réels ou complexes, dont le terme général est noté u_n, est dite *absolument convergente* si la série à termes positifs de terme général $|u_n|$ est convergente.

En utilisant le critère de Cauchy, on établit aisément le théorème suivant, qui justifie la terminologie.

3.2. Théorème. *Une série absolument convergente est convergente.*

3.3. Exemples.

1. Les séries à termes positifs convergentes sont absolument convergentes.

2. La série géométrique, de terme général $u_n = a\,\lambda^n$, avec a et λ réels ou complexes, $a \neq 0$, est absolument convergente si et seulement si $|\lambda| < 1$.

3. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

3.4. Théorème. *On considère une série absolument convergente, dont le terme général est noté u_n. Soit $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une permutation de l'ensemble des entiers naturels (bijection de $\mathbf{N}$ sur lui-même). On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{\sigma(n)}$. Alors la série de terme général v_n est absolument convergente, et sa somme est égale à celle de la série de terme général u_n. On peut écrire :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,.$$

On peut donc dire qu'une modification de l'ordre des termes d'une série absolument convergente laisse subsister la convergence absolue et ne modifie pas la valeur de la somme. On exprime cette propriété en disant que les séries absolument convergentes sont *commutativement convergentes*.

La démonstration du théorème ci-dessus se fait en prouvant d'abord que la série de terme général $|v_n|$ satisfait le critère de Cauchy, puis en majorant, grâce au critère de Cauchy, la différence

$$\left|\sum_{i=0}^{n} u_i - \sum j = 0^n v_j\right|\,,$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$.

3.5. Théorème. *Soient deux séries absolument convergentes, dont les termes généraux sont notés u_n et v_n, respectivement. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,.$$

Alors la série de terme général w_n est absolument convergente, et sa somme est le produit des sommes des séries de termes généraux u_n et v_n. On peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) .$$

Comme celle du théorème précédent, la démonstration de ce théorème se fait en prouvant d'abord que la série de terme général $|w_n|$ satisfait le critère de Cauchy, puis en majorant

$$\left|\sum_{i=0}^{n} w_i - \left(\sum j = 0^n u_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)\right| ,$$

enfin en faisant tendre n vers $+\infty$.

4. Séries semi-convergentes

4.1. Définition. Une série numérique est dite *semi-convergente* si elle est convergente et non absolument convergente.

Le théorème d'Abel, énoncé ci-dessous, permet de prouver la convergence d'une série non nécessairement absolument convergente, et permet donc de donner des exemples de séries semi-convergentes. Sa démonstration repose sur le lemme suivant, qui en un certain sens est un analogue discret de la formule bien connue d'intégration par parties.

4.3. Lemme. *Soient (a_n) et (b_n), $n \in \mathbf{N}$, deux suites numériques. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Pour tous p et $q \in \mathbf{N}$, $q \geq p > 0$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1} .$$

Il suffit, pour démontrer ce lemme, de remplacer, dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus, a_k par $A_k - A_{k-1}$, et de réordonner les termes.

4.4. Théorème d'Abel. *On considère une série numérique dont le terme général peut se mettre sous la forme $c_n = a_n b_n$, les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *les a_n sont réels ou complexes, et il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M ;$$

(ii) *les b_n sont réels ≥ 0 et forment une suite décroissante (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$) qui converge vers 0 ($\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$).*

Alors la série de terme général $c_n = a_n b_n$ converge.

La démonstration se fait en prouvant, grâce au lemme précédent, que la série satisfait le critère de Cauchy.

4.5. Corollaire. Séries alternées. *On considère une série à termes réels, dont le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n b_n$, les b_n étant réels ≥ 0 et formant une suite décroissante (pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$) qui converge vers 0 ($\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$). Cette série converge, et sa somme vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,*

$$\sum_{K=0}^{2n-1} (-1)^k b_k \leq \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^k b_k \leq \sum_{K=0}^{2n} (-1)^k b_k \,.$$

Pour prouver la convergence, il suffit en effet d'appliquer le théorème d'Abel, avec $a_n = (-1)^n$. On remarque d'antre part que les suites des sommes partielles,

$$\left(S_{2n-1} = \sum_{K=0}^{2n-1} (-1)^k b_k\right) \quad \text{et} \quad \left(S_{2n} = \sum_{K=0}^{2n} (-1)^k b_k\right) \,,$$

sont respectivement décroissante et croissante, et convergent vers la même limite, qui est la somme de la série considérée. Cela donne une démonstration directe de la convergence, et prouve les inégalités indiquées.

4.6. Exemples.

1. La série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

vérifie les hypothèses du corollaire 4.5, donc converge.

2. Soit $\theta \in \mathbf{R}$, $\theta \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Doit d'autre part (b_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite à termes $\geq$, décroissante et convergeant vers 0. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}$$

converge. On peut en effet appliquer le théorème d'Abel puisque, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\theta/2|} \,.$$

Par suite, les séries dont les termes sont les parties réelles et les parties imaginaires des termes de la série précédente, c'est-à-dire les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(n\theta)\,,$$

convergent.

Chapitre III

Suites et séries de fonctions

1. Convergence simple et convergence uniforme

1.1. Définitions. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$).

1. On appelle *suite de fonctions définies sur A et à valeurs réelles (resp., complexes)* une famille d'applications f_n de A dans $\mathbf{R}$ (resp., dans $\mathbf{C}$), indexée par $n \in \mathbf{N}$, ensemble des entiers naturels. On utilise pour la désigner la notation (f_n), $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit (g_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite de fonctions définies sur A, à valeurs réelles (ou complexes). On appelle *série de terme général g_n* la suite de fonctions (S_n), $n \in \mathbf{N}$, définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g_k \,.$$

1.2. Remarque. Dans la définition ci-dessus, on a utilisé pour indexer les termes d'une suite, ou d'une série, l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$. On utilise souvent aussi l'ensemble des entiers strictement positifs $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$. On pourrait de même utiliser tout ensemble totalement ordonné isomorphe à $\mathbf{N}$.

1.3. Définitions. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$).

1. On dit qu'une suite (f_n), $n \in \mathbf{N}$, de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes, *converge simplement* si pour tout $x \in A$, la suite numérique $\bigl(f_n(x)\bigr)$ converge. Lorsque c'est le cas, la fonction $f : A \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \qquad x \in A\,,$$

est appelée *limite simple* de la suite (f_n). On écrit

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n \,.$$

2. On dit qu'une série de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes, de terme général (g_n), $n \in \mathbf{N}$, *converge simplement* si pour tout $x \in A$, la série numérique de terme général $\bigl(g_n(x)\bigr)$ converge, c'est-à-dire si la suite de fonctions $(S_n = \sum_{k=0}^{n} g_k)$, $n \in \mathbf{N}$, converge simplement. Lorsque c'est le cas, la fonction $S : A \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) définie par

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\,, \qquad x \in A\,,$$

est appelée *somme* de la série de terme général (g_n). On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\,.$$

La convergence simple a l'inconvénient de ne pas conserver certaines propriétés telles que la continuité ou la dérivabilité, ainsi que le montre l'exemple suivant.

1.4. Exemple. On considère la suite (f_n), $n \in \mathbf{N}$, de fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles,

$$f_n(x) = x^n\,, \qquad x \in [0,1]\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0,1]$. Cette suite converge simplement, et a pour limite la fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

qui n'est pas continue au point $x = 1$.

C'est pourquoi on a été amené à introduire la notion de convergence uniforme, plus restrictive que celle de convergence simple.

1.5. Définitions. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$).

1. On dit qu'une suite (f_n), $n \in \mathbf{N}$, de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes, *converge uniformément* vers une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$ et tout $x \in A$,

$$\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \leq \epsilon\,.$$

2. On dit qu'une série de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes, de terme général (g_n), $n \in \mathbf{N}$, *converge uniformément* si la suite des sommes partielles

$(S_n = \sum_{k=0}^{n} g_k)$, $n \in \mathbf{N}$, converge uniformémént vers une fonction $S : A \to \mathbf{R}$ (ou$\mathbf{C}$),c'est-à-dire si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$ et tout $x \in A$,

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| \leq \epsilon\,.$$

1.6. Commentaire.

1. Dans les hypothèses et avec les notations de 1.5.1, la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) implique sa convergence simple, et la fonction f vers laquelle cette suite converge uniformément n'est autre que sa limite simple, au sens de la définition 1.3.

La même remarque s'applique à la convergence uniforme d'une série de fonctions.

2. Les notations étant toujours celles de 1.5.1, comparons les propriétés qui expriment, d'une part la convergence simple, d'autre part la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbf{N}$, vers la fonction f.

– Il y a convergence simple si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in A$, il existe $N \in \mathbf{N}$, pouvant dépendre de ϵ et de x, tel que $n \geq n$ implique

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \epsilon\,.$$

– Il y a convergence uniforme si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$, pouvant dépendre de ϵ, tel que $n \geq n$ implique, pour tout $x \in A$,

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \epsilon\,,$$

c'est-à-dire

$$\sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \epsilon\,.$$

On remarquera que pour la convergence uniforme, l'entier N peut dépendre de ϵ, mais pas du point x de A considéré, tandis que dans la convergence simple, N peut dépendre à la fois de ϵ et de x.

On laisse au lecteur le soin de comparer, dans le même esprit, les notions de convergence simple et de convergence uniforme d'une série de fonctions.

2. Propriétés de la convergence uniforme

2.1. Théorème (critère de Cauchy pour la convergence uniforme). *Une suite (f_n), $n \in \mathbf{N}$, de fonctions définies sur une partie A de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$), à valeurs réelles ou complexes, converge uniformément si et seulement si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy pour la convergence uniforme :*

– *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous n et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$, $m \geq N$, et tout $x \in A$,*

$$\bigl|f_n(x) - f_m(x)\bigr| \leq \epsilon\,. \tag{$*$}$$

La démonstration du fait que le critère de Cauchy pour la convergence uniforme est une condition nécessaire de convergence uniforme est immédiate. Pour prouver que c'est une condition suffisante, on vérifie d'abord que pour tout $x \in A$, la suite numérique $\bigl(f_n(x)\bigr)$ est de Cauchy, donc converge, ce qui montre déjà que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f. Puis, en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité $(*)$ ci-dessus, on montre que la convergence est uniforme.

2.2. Théorème. *Soit (f_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$), à valeurs réelles ou complexes, convergeant uniformément vers une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$). Si toutes les fonctions f_n sont continues en un point $x_0 \in A$ (resp., en tout point de A), la fonction f est continue en x_0 (resp., en tout point de A).*

Démonstration. Supposons toutes les fonctions f_n continues en $x_0 \in A$. Pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire

$$\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leq \bigl|f(x) - f_n(x)\bigr| + \bigl|f_n(x) - f_n(x_0)\bigr| + \bigl|f_n(x_0) - f(x_0)\bigr|\,. \tag{$**$}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément vers f, il esiste $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$ et tout $y \in A$,

$$\bigl|f_n(y) - f(y)\bigr| \leq \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Ceci étant vrai en particulier pour $y = x$ et pour $y = x_0$, on voit que si $n \geq N$, le premier et le troisième terme du membre de droite de l'inégalité $(**)$ ci-dessus sont majorés par $\epsilon/3$. Considérons maintenant l'entier n comme fixé, et vérifiant $n \geq N$ (par exemple, en prenant $n = N$). La fonction f_n étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$,

$$\bigl|f_n(x) - f_n(x_0)\bigr| \leq \frac{\epsilon}{3}\,.$$

L'inégalité $(**)$ montre alors que pour tout $x \in A$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$,

$$\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| \leq \epsilon\,,$$

ce qui exprime la continuité de f en x_0. □

2.3. Remarques. On peut, de diverses manières, affaiblir les hypothèses du théorème 2.2 sans que sa conclusion soit modifiée. Ainsi, par exemple, il n'est pas indispensable de supposer les fonctions f_n toutes continues en x_0; il suffit qu'il existe une infinité de valeurs distinctes de n pour lesquelles f_n est continue en x_0. De même, au lieu de converger uniformément sur A entier, il suffit que la suite de fonctions continues en x_0 (f_n) converge uniformément sur un voisinage de x_0, pour que sa limite f soit continue en x_0.

2.4. Théorème. *Soit (f_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *Les fonctions f_n sont continues et dérivables sur I;*

(ii) *la suite (f'_n), $n \in \mathbf{N}$, formée par les dérivées des fonctions f_n, converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$);*

(iii) *il existe $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $\bigl(f_n(x_0)\bigr)$, $n \in \mathbf{N}$, converge.*

Alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction continue et dérivable $f : I \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), la convergence étant uniforme sur tout sous-intervalle borné de I, et la dérivé f' de f est égale à g.

Démonstration. Pour tous x et $y \in I$ et tous n et $m \in \mathbf{N}$, on peut écrire, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\bigl|(f_n - f_m)(y) - (f_n - f_m)(x)\bigr| &\leq \sup_{z\in[x,y]} \bigl|(f'_n - f'_m)(z)\bigr|\, |y - x| \\ &\leq \sup_{z\in I}\bigl|(f'_n - f'_m)(z)\bigr|\, |y - x|\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

On a désigné par $[x, y]$ l'intervalle fermé d'extrémités x et y. Par suite, lorsque $x = x_0$ et en choisissant $R > 0$ tel que $|y - x_0| \leq R$,

$$\bigl|f_n(y) - f_m(y)\bigr| \leq \bigl|f_n(x_0) - f_m(x_0)\bigr| + R\sup_{z\in I}\bigl|(f'_n - f'_m)(z)\bigr|\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite numérique $\bigl(f_n(x_0)\bigr)$ converge, elle est de Cauchy, donc il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour n et $m \geq N$, on ait

$$\bigl|f_n(x_0) - f_m(x_0)\bigr| \leq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Puisque la suite (f'_n) converge uniformément, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour n et $m \geq N_2$, on ait

$$\sup_{z\in I}\bigl|(f'_n - f'_m)(z)\bigr| \leq \frac{\epsilon}{2R}\,.$$

Donc, en posant $N = \sup(N_1, N_2)$, on a pour tous $n \geq N$ et $m \geq N$ et tout $y \in I$ vérifiant $|y - x_0| \leq R$,

$$\bigl|f_n(y) - f_m(y)\bigr| \leq \frac{\epsilon}{2} + R\frac{\epsilon}{2R} = \epsilon\,.$$

La suite de fonctions (f_n) vérifie donc le critère de Cauchy pour la convergence uniforme sur $I \cap [x_0 - R, x_0 + R]$. Elle converge donc uniformément sur cet intervalle. Comme $R > 0$ peut être choisi aussi grand qu'on veut, on voit que la suite (f_n) converge simplement sur I et uniformément sur tout sous-intervalle borné de I. Sa limite f est donc continue.

On revient au cas où x et y sont deux éléments quelconques de I. On a

$$\begin{aligned} \bigl|f(y) - f(x) - g(x)(y-x)\bigr| \leq{} & \bigl|f(y) - f(x) - f_n(y) + f_n(x)\bigr| \\ & + \bigl|f_n(y) - f_n(x) - f_n'(x)(y-x)\bigr| \\ & + \bigl|\bigl(f_n'(x) - g(x)\bigr)(y-x)\bigr| . \end{aligned} \tag{$**$}$$

Mais en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité $(*)$ ci-dessus, on obtient

$$\bigl|f(y) - f(x) - f_n(y) + f_n(x)\bigr| \leq \sup_{z\in I}\bigl|f_n'(z) - g(z)\bigr|\, |y-x| .$$

Soit $\epsilon_1 > 0$. Puisque (f_n') converge uniformément vers g, il existe $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que, pour $n \geq N_3$,

$$\sup_{z\in I}\bigl|f_n'(z) - g(z)\bigr| \leq \frac{\epsilon_1}{3} ,$$

donc aussi

$$\bigl|f_n'(x) - g(x)\bigr| \leq \frac{\epsilon_1}{3} .$$

On considère maintenant x et n comme fixés, avec $n \geq N_3$. Puisque f_n est dérivable au point x et a en ce point pour dérivée $f_n'(x)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $y \in I$ vérifiant $|y - x| \leq \eta$,

$$\bigl|f_n(y) - f_n(x) - f_n'(x)(y-x)\bigr| \leq \frac{\epsilon_1}{3}|y-x| .$$

On voit alors que chacun des termes du second membre de l'inégalité $(**)$ est majoré par $(\epsilon_1/3)|y-x|$. Donc pour $y \in I$ vérifiant $|y-x| \leq \eta$, on a

$$\bigl|f(y) - f(x) - g(x)(y-x)\bigr| \leq \epsilon_1|y-x| ,$$

ce qui prouve que f est dérivable en x et a pour dérivée en ce point $g(x)$. □

2.5. Corollaire. *Soit (g_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite de fonctions continues définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes, convergeant uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on pose*

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} g_n(z)\, dz .$$

La suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbf{N}$, ainsi définie converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la convergence étant uniforme sur tout sous-intervalle borné de I. La fonction f est continue et dérivable sur I, et sa dérivée est g.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a, puisque g_n est continue,

$$f_n' = g_n\,, \qquad f_n(x_0) = 0\,.$$

La suite (f_n) satisfait donc les hypothèses du théorème 2.4. □

2.6. Remarques.

1. Le théorème 2.4 reste valable lorsque les fonctions f_n sont définies sur un disque ouvert du plan complexe $\mathbf{C}$, et à valeurs complexes. La démonstration est inchangée.

De même, le corollaire 2.5 est valable lorsque les fonctions g_n sont définies sur un disque ouvert du plan complexe et à valeurs complexes.

2. Nous avons dans ce cours déduit le corollaire 2.5 du théorème 2.4. À l'inverse, on peut donner une démonstration directe très simple du corollaire 2.5, et en déduire le théorème 2.4, moyennant l'hypothèse supplémentaire de la continuité des fonctions f_n'. La démonstration de 2.4 donnée ici ne nécessite pas cette hypothèse.

3. Tous les résultats établis dans ce paragraphe (2.1, 2.2, 2.4, 2.5) peuvent être adaptés au cas des séries de fonctions. On laisse au lecteur le soin de formuler les énoncés correspondants.

3. La norme de la convergence uniforme

3.1. Rappel. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On appelle *norme* sur E une application $\varphi : E \to \mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)\,;$$

(ii) pour tous x et $y \in E$,

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)\,;$$

(iii) on a

$$\varphi(x) = 0$$

si et seulement si $x = 0$.

3.2. Exemples.

1. Sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la fonction valeur absolue, ou module, $x \mapsto |x|$, est une norme.

2. Soit A un ensemble non vide, et E l'ensemble des applications bornées de A dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Pour tout $f \in E$ on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

On vérifie aisément que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ et que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E. Cette norme sur E est appelée *norme de la convergence uniforme sur* A.

3.3. Définitions. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, muni d'une norme notée $x \mapsto \|x\|$.

1. On dit qu'une suite (x_n), $n \in \mathbf{N}$, d'éléments de E *converge vers un élément* x *de* E, *au sens de la norme dont est muni cet espace*, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$, $\|x_n - x\| \leq \epsilon$.

2. On dit qu'une suite (x_n), $n \in \mathbf{N}$, d'éléments de E est *de Cauchy pour la norme dont est muni cet espace*, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous n et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq N$ et $m \geq N$, $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$.

Comme pour les suites numériques, on montre aisément que toute suite dans un espace vectoriel normé qui converge (au sens de la norme dont est muni cet espace) est de Cauchy pour cette norme. La réciproqie n'est en général pas vraie, ce qui conduit à introduire la définition suivante.

3.4. Définition. On dit qu'un espace vectoriel normé est *complet* si, dans cet espace, toute suite de Cauchy (au sens de la norme dont cet espace est muni) converge (au sens de cette même norme).

3.5. Application à la convergence uniforme. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, et E l'ensemble des applications bornées de A dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On vérifie aisément que E est un espace vectoriel, qu'on munit de la norme de la convergence uniforme

$$f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

On peut alors, pour l'essentiel, formuler les résultats du paragraphe 2 en termes des notions introduites ci-dessus.

Ainsi, le théorème 2.1 exprime simplement que l'espace E, muni de la norme de la convergence uniforme, est complet.

Le théorème 2.2 exprime que le sous-espace vectoriel E_c de E formé par les fonctions continues est complet aussi.

Dans le cas où l'intervalle I est borné, le corollaire 2.5 exprime que l'application de E_c dans lui-même qui, à une fonction continue $f : I \to \mathbf{K}$, associe sa primitive nulle en un point x_0 fixé de E, est continue.

On peut également donner diverses interprétations du théorème 2.4, notamment la suivante. On suppose l'intervalle ouvert I borné, et on désigne par F l'ensemble des fonctions définies sur I, à valeurs réelles, bornées, continues et dérivables et à dérivées bornées, continues et dérivables. C'est un espace vectoriel, qu'on munit de la norme (appelée norme de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées premières)

$$f \mapsto \|f\|_1 = \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x)| .$$

On peut alors exprimer une partie des résultats de 2.4 en disant que l'espace F, muni de la norme ci-dessus définie, est complet.

4. Séries de fonctions normalement convergentes

4.1. Définition. Soit A une partie de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{C}$). On munit l'espace des applications bornées f de A dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| .$$

On considère une série de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes, de terme général f_n, $n \in \mathbf{N}$. On suppose les f_n bornées. On dit que la série de fonctions considérée est *normalement convergente* si la série numérique, à termes ≥ 0,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$$

est convergente.

4.2. Théorème. *Une série de fonctions normalement convergente est absolument convergente en tout point du domaine de définition des fonctions, et uniformémént convergente.*

Démonstration. Les notations étant celles de la définition 4.1, soit x un point de A. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|f_n(x)| \leq \sup_{y \in A} |f_n(y)| = \|f_n\| .$$

La série numérique, à termes ≥ 0, de terme général $|f_n(x)|$, est donc majorée terme à terme par la série de terme général $\|f_n\|$, qui par hypothèse est convergente. Elle est donc convergente (ch. 2, prop. 2.3). Ceci prouve que la série de fonctions considérée est absolument convergente en tout point x de A.

Soit $\epsilon > 0$. La série numérique de terme général $\|f_n\|$, étant convegente, satisfait le critère de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tous n et $m \in \mathbf{N}$ vérifiant $n > m \geq N$,on ait

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| \leq \epsilon .$$

Mais on a, pour tout $x \in A$,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| \leq \epsilon\,.$$

Ceci montre que la série de terme général f_n satisfait le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, donc, d'après 2.1, converge uniformément. $\square$

4.3 Remarques.

1. La définition 4.1 peut être adaptée au cas d'une série dont les termes sont éléments d'un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ quelconque: une telle série est dite *normalement convergente* si la série numérique dont les termes sont les normes des termes de la série considérée est convergente. Lorsque l'espace $\mathcal{E}$ est complet, on montre, comme dans la démonstration de 4.2, qu'une série normalement convergente est convergente.

2. En combinant le théorème 4.2 et la proposition 2.3 du chapitre 2, on voit qu'une série de fonctions dont chaque terme a une norme majorée par le terme de même rang d'une série numérique convergente, est normalement convergente, donc absolument convergente en tout point, et uniformément convergente. Cette manière de prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions est souvent employée.

Chapitre IV

Séries entières

1. La notion de rayon de convergence

1.1. Définition. On appelle *série entière* (d'une variable réelle ou complexe) une série de fonctions, définies sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, dont le terme général est de la forme

$$u_n(z) = a_n z^n \,, \qquad n \in \mathbf{N} \,,$$

où a_n est un coefficient élément de $\mathbf{K}$, et z la variable élément de $\mathbf{K}$. On écrit la série sous la forme (sans que cette écriture suppose la convergence de la série)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \,, \qquad \text{ou} \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \,.$$

1.2. Lemme (Abel). *On considère la série entière*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \,, \qquad a_n \in \mathbf{K} \,,\ z \in \mathbf{K} \,.$$

Si, pour une valeur particulière $z_0 \in \mathbf{K}$ de la variable la série numérique

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n + \cdots$$

converge, ou simplement si l'ensemble des termes de cette série est borné, la série entière donnée converge absolument (donc converge) pour tout $z \in K$ vérifiant $|z| < |z_0|$. De plus, pour tout réel ρ vérifiant $0 < \rho < |z_0|$, la convergence est uniforme dans le disque fermé $\{\, z \in \mathbf{K} \,;\, |z| \leq \rho \,\}$.

Démonstration. Supposons l'ensemble des $a_n z_0^n$ borné; il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n z_0^n| = |a_n|\, |z_0|^n \leq M \,.$$

C'est en particulier le cas si la série de terme général $a_n z_0^n$ converge. Supposons $z_0 \neq 0$, car dans le cas contraire il n'y a rien à démontrer. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathbf{K}$,

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \,.$$

Si $|z| < |z_0|$, $|z/z_0| < 1$, donc le terme général $a_n z^n$ est majoré, en module, par le terme général d'une série géométrique convergente. Ceci prouve la convergence absolue, donc la convergence, de la série entière considérée pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| < |z_0|$.

De même, si ρ est un réel vérifiant $0 < \rho < |z_0|$, on a, pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| \leq \rho$,

$$|a_n z^n| \leq M \left| \frac{\rho}{z_0} \right|^n ,$$

ce qui prouve la convergence normale (donc uniforme) de la série entière considérée dans le disque fermé $\{ z \in \mathbf{K} \, ; \, |z| \leq \rho \}$. □

1.3. Proposition. *On considère la série entière*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots , \qquad a_n \in \mathbf{K} , \ z \in \mathbf{K} .$$

Il existe un élément unique R de $[0, +\infty]$, appelé rayon de convergence de la série, tel que cette série converge pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| < R$, et diverge pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| > R$. Le disque ouvert

$$\{ z \in \mathbf{K} \, ; \, |z| < R \}$$

est appelé disque de convergence de la série entière considérée.

Démonstration. On considère la partie de $\mathbf{R}^+$

$$B = \{ r \in \mathbf{R}^+ \mid \text{il existe } M > 0 \text{ tel que pour tout } n \in \mathbf{N} , \ |a_n| r^n \leq M \} .$$

On voit que 0 est élément de B et que si $r_1 \geq 0$ est élément de B, l'intervalle fermé $[0, r_1]$ est contenu dans B. Par conséquent B est un intervalle de $\mathbf{R}^+$ d'extrémité gauche 0, fermé à son extrémité gauche. Soit R son extrémité droite (qui peut être un réel ≥ 0 fini, ou être $+\infty$); c'est la borne supérieure de B dans $\overline{\mathbf{R}}$. D'après 1.2, la série entière considérée converge pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| < R$. D'autre part, si $z \in \mathbf{K}$ vérifie $|z| > R$, l'ensemble des $a_n z^n$ n'est pas borné, donc la série de terme général $a_n z^n$ diverge. □

1.4 Remarques et exemples.

1. Les notations étant celles de la démonstration de 1.3, le rayon de convergence R peut, selon les cas, être élément de B (alors $B = [0, R]$) ou non (alors $B = [0, R[$). De même, si $z \in \mathbf{K}$ vérifie $|z| = R$, la série de terme général $a_n z^n$ peut, selon les cas, être convergente ou divergente.

2. **Exemple.** La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$. Elle diverge pour tout $z \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z| = 1$.

3. **Autre exemple.** La série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$
a pour rayon de convergence $R = 1$. Elle converge pour $z = -1$, et diverge pour $z = 1$.

4. **Autre exemple.** La série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$$
a pour rayon de convergence $R = 0$.

1.5. Détermination du rayon de convergence. Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser la formule qui a servi à le définir, c'est-à-dire chercher la borne supérieure de la partie de $\mathbf{R}^+$ désignée par B dans la démonstration de 1.3.

On peut aussi utiliser la formule, déduite de la règle de Cauchy,
$$\frac{1}{R} = \limsup \left(|a_n|^{1/n}\right) .$$
Cette formule est toujours vraie, moyennant les conventions
$$\frac{1}{+\infty} = 0 , \qquad \frac{1}{0} = +\infty .$$
En d'autres termes, si $\limsup\left(|a_n|^{1/n}\right) = +\infty$, on a $R = 0$, et si $\limsup\left(|a_n|^{1/n}\right) = 0$, on a $R = +\infty$.

On peut aussi, dans certains cas, utiliser la formule, déduite de la règle de d'Alembert,
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| ,$$
qui est vraie si la limite figurant au second membre existe, avec les mêmes conventions que ci-dessus. Mais on rencontre des cas où la limite figurant au second membre n'existe pas, donc où la formule n'est pas applicable (ce qui n'empêche évidemment pas le rayon de convergence d'exister). C'est le cas, par exemple, si a_n est nul pour n impair et égal à 1 pour n pair.

1.6 Proposition. *On considère les séries entières*
$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{$*$}$$
et
$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots . \tag{$**$}$$

Soient R et R' leurs rayons de convergence respectifs.

1. *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ un scalaire non nul. La série entière*

$$\lambda a_0 + \lambda a_1 z + \cdots + \lambda a_n z^n + \cdots$$

a pour rayon de convergence R.

2. *La série entière*

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + \cdots + (a_n + b_n)z^n + \cdots$$

a un rayon de convergence $\geq \inf(R, R')$.

3. *La série entière*

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots ,$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} ,$$

a un rayon de convergence $\geq \inf(R, R')$.

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 sont des conséquences de propriétés élémentaires des séries numériques (chapitre II, paragraphe 1.4). La propriété 3 résulte de la convergence absolue d'une série entière pour tout élément z du disque de convergence, et du théorème 3.5 du chapitre II sur le produit de deux séries numériques absolument convergentes. □

2. Propriétés de la somme d'une série entière

2.1. Proposition. *On considère la série entière*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

et on suppose son rayon de convergence $R > 0$. Pour tout R_1 vérifiant $0 < R_1 < R$, cette série converge uniformément dans le disque

$$\{ z \in \mathbf{K} \, ; \, |z| \leq R_1 \} ,$$

et converge simplement dans le disque de convergence ouvert

$$\{ z \in \mathbf{K} \, ; \, |z| < R \} .$$

Sa somme est une fonction continue dans ce disque de convergence.

Démonstration. La première partie de cette proposition a déjà été démontrée (proposition 1.2). D'après le théorème 2.2 du chapitre III, la somme de la série considérée est continue sur tout disque fermé centré à l'origine et de rayon $R_1 < R$. Mais pour tout point z du disque de convergence, c'est-à-dire vérifiant $|z| < R$, on peut trouver R_1 vérifiant $|z| < R_1 < R$, donc la somme de la série considérée est continue en z. □

2.2 Remarque. Dans le disque de convergence, la convergence de la série entière considérée n'est en général pas uniforme, mais simple. Il faut bien prendre garde au fait que la convergence uniforme dans tout disque fermé centré sur l'origine et de rayon $R_1 < R$ implique la convergence simple, mais non la convergence uniforme, dans le disque de convergence, c'est-à-dire dans le disque ouvert centré à l'origine et de rayon R.

2.3 Théorème (dérivées d'une série entière). *On considère la série entière*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots ; \tag{$*$}$$

on note R son rayon de convergence.

1. *La série entière, déduite de la série donnée par dérivation terme à terme,*

$$a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots , \tag{$**$}$$

a même rayon de convergence R que la série donnée. Si $R > 0$, la somme de la série entière considérée $(*)$ est une fonction dérivable dans le disque de convergence, dont la dérivée est égale dans ce disque à la somme de la série $(**)$.

2. *Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, la série entière, déduite de $(*)$ par k dérivations terme à terme successives,*

$$k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{k+n} z^n + \cdots , \tag{$***$}$$

a pour rayon de convergence R. Si $R > 0$, la somme de la série entière considérée $(*)$ est k fois dérivable dans le disque de convergence, et a pour dérivée k-ième, dans ce disque, la somme de la série $(***)$.

Démonstration.

1. Soient deux réels r et r_1, vérifiant $0 < r < r_1$. On a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{r} |a_{n+1}| r^{n+1} \leq (n+1) |a_{n+1}| r^n = \frac{n+1}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n |a_{n+1}| r_1^{n+1} .$$

Mais puisque $0 < r/r_1 < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{r_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = 0 .$$

Donc, pour n assez grand,

$$\frac{n+1}{r_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n < 1\,,$$

et on a la double inégalité

$$\frac{1}{r}|a_{n+1}|r^{n+1} \leq (n+1)|a_{n+1}|r^n \leq |a_{n+1}|r_1^{n+1}\,.$$

Soit R_1 le rayon de convergence de la série entière $(**)$. Pour tout $r > R$, la première inégalité ci-dessus montre que l'ensemble des $(n+1)|a_{n+1}|r^n$ n'est pas borné, donc que $r \geq R_1$. On en déduit $R_1 \leq R$. En particulier, si $R = 0$, $R_1 = 0$. Si $R > 0$, pour tout $r < R$ on peut trouver r_1 tel que $r < r_1 < R$. La seconde inégalité ci-dessus montre alors que $r \leq R_1$, et par suite que $R \leq R_1$. En définitive, $R = R_1$.

Supposonr $R > 0$. La série $(**)$, déduite de $(*)$ par dérivation terme à terme, converge uniformément dans tout disque ouvert centré sur l'origine et de rayon $\rho < R$. La série $(*)$ converge aussi dans ce disque. Le théorème 2.4 du chapitre III montre que la somme de la série $(*)$ est une fonction dérivable dans le disque considéré, dont la dérivée est la somme de la série $(**)$. Ceci étant vrai pour tout $\rho < R$, on voit que la somme de la série $(*)$ est dérivable dans le disque de convergence, et a pour dérivée la somme de la série $(**)$.

2. Cette assertion se déduit immédiatement de la précédente par récurrence. □

2.4. Théorème (primitives d'une série entière). *On considère la série entière*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots\,; \qquad (*)$$

on note R son rayon de convergence.

1. *La série entière*

$$b_0 + a_0 z + \frac{a_1}{2}z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n}z^{n+1} + \cdots\,, \qquad b \in \mathbf{K} \text{ quelconque}\,, \qquad (**)$$

dont le terme de degré $n \geq 1$ est la primitive nulle à l'origine du terme de degré $n-1$ de la série donnée, a même rayon de convergence R que la série donnée. Si $R > 0$, la somme de la série entière $(**)$ est une fonction dérivable dans le disque de convergence, dont la dérivée est égale dans ce disque à la somme de la série donnée $(*)$.

2. *Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, la série entière*

$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_{k-1}z^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!a_n}{(n+k)!}z^{n+k}\,, \qquad (***)$$

où $b_0, b1, \ldots, b_{k-1}$ sont des scalaires quelconques éléments du corps $\mathbf{K}$, dont le terme de degré $n+k$ (avec $n \geq 0$) se déduit du terme de degré n de $(*)$ par k intégrations successives, *a pour rayon de convergence R. Si $R > 0$, la somme de la série entière $(***)$ est k fois dérivable dans le disque de convergence, et a pour dérivée k-ième la somme de la série $(*)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.3 à $(**)$ et $(***)$. □

2.5. Corollaire. *La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est une fonction de classe C^∞, c'est-à-dire ayant des dérivées de tous les ordres continues, dans le disque de convergence. Pour tout entier $k \geq 1$, la série entière obtenue en dérivant (resp., en intégrant) terme à terme k fois la série entière donnée, a pour rayon de convergence R, et sa somme, dans le disque de convergence, est la dérivée d'ordre k (resp., est une primitive d'ordre k) de la somme de la série entière donnée.*

2.6. Exemple. Considérons la série entière

$$1 + 2z + \cdots + (n+1)z^n + \cdots ,$$

et désignons sa somme par $S(z)$, dans le disque de convergence. En prenant une primitive terme à terme de cette série, on obtient la série géométrique

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots ,$$

dont on sait que le rayon de convergence est 1, et dont la somme, dans le disque de convergence, est $1/(1-z)$. On peut donc affirmer que la série entière considérée a pour rayon de convergence 1, et que sa somme, dans le disque de convergence, est

$$S(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} .$$

3. Fonctions analytiques

On a, dans le paragraphe précédent, étudié quelques propriétés des fonctions définies par la somme d'une série entière. On a vu qu'une telle fonction est continue et possède, dans le disque de convergence, des dérivées de tous ordres continues, qui sont les sommes des séries obtenues en dérivant terme à terme, un nombre de fois égal à l'ordre de la dérivée considérée, la série donnée.

On va maintenant donner quelques brèves indications sur le problème réciproque: à quelles conditions une fonction donnée, définie sur une partie D de $\mathbf{K}$, est-elle égale, au moins dans un certain disque contenu dans D, à la somme d'une série entière?

3.1. Définition. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$. Soit $z_0 \in D$. On dit que f est *analytique* au point z_0, ou *développable en série entière* au point z_0, s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $R \geq r$, tels que le disque ouvert

$$\{\, z \in \mathbf{K} \,;\, |z - z_0| < r \,\} ,$$

de centre z_0 et de rayon r, soit contenu dans D, et que l'on ait, pour tout élément z de ce disque,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

La série entière en $(z - z_0)$ figurant au membre de droite de l'égalité ci-dessus est appelée *série de Taylor* de la fonction f au point z_0.

Lorsque $z_0 = 0$, la série de Taylor de f à l'origine est aussi appelée *série de Mac Laurin* de f.

3.2. Proposition. *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, analytique en un point $z_0 \in D$. Il existe un disque ouvert*

$$\{ z \in \mathbf{K} \,;\, |z - z_0| < r \} ,$$

de centre z_0 et de rayon $r > 0$, contenu dans D, dans lequel f est continue et indéfiniment dérivable. La série de Taylor de f au point z_0,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

a pour coefficients

$$a_0 = f(z_0) \qquad \text{et, pour tout } k \in \mathbf{N}\,,\; k \geq 1\,, \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} ,$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f. En particulier, la série de Taylor de f au point z_0 est unique.

Démonstration. Les premières affirmations résultent des remarques faites au début de ce paragraphe et de la définition 3.1. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière montre qu'on a, pour tout entier $k \geq 0$ et tout point $z \in \mathbf{K}$ tel que $|z - z_0| < r$,

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{n!} (z - z_0)^n ,$$

d'où les formules, indiquées dans l'énoncé, donnant les coefficients a_k. □

3.3. Remarque. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, analytique en un point $z_0 \in D$. D'après la proposition 3.2, il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans D, et que, sur ce disque, la fonction f soit égale à la somme de sa série de Taylor au point z_0. On montre que la fonction f est analytique en tout point du disque de centre z_0 et de rayon r. Contrairement à ce qu'un examen superficiel de la question pourrait laisser penser, cette propriété n'est nullement évidente. Elle exprime en effet que pour tout point $z_1 \in \mathbf{K}$ vérifiant $|z_1 - z_0| < r$, la série de Taylor de f au point z_1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$$

a un rayon de convergence non nul, et une somme égale à f sur un voisinage du point z_1. Ceci est trivial pour $z_1 = z_0$, mais pas du tout trivial pour $z_1 \neq z_0$.

3.4. Quelques questions. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, z_0 un point intérieur à D, c'est-à-dire tel qu'il existe un disque ouvert de centre z_0 contenu dans D. Supposons f continue en z_0, et ayant en ce point des dérivées de tous ordres. On peut alors former la série de Taylor de f en z_0:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n .$$

On peut se demander si le rayon convergence de cette série entière est non nul, et si, dans l'affirmative, sa somme est, dans le disque de convergence, égale à la fonction f. Les réponses à ces questions diffèrent selon que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

(i) Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on montre qu'il suffit que f soit une seule fois dérivable sur un voisinage de z_0 (c'est-à-dire sur une partie de D contenant un disque ouvert de centre z_0), pour que f soit analytique en z_0. *A fortiori*, si f est continue en z_0 et a en ce point des dérivées de tous les ordres, elle est une fois dérivable sur un voisinage de z_0 (puisque l'existence de la dérivée seconde de f en z_0 suppose l'existence de la dérivée première, non seulement en z_0, mais sur un voisinage de ce point), donc est analytique en z_0; on peut alors affirmer que sa série de Taylor en ce point a un rayon de convergence non nul et une somme égale à f sur un voisinage de z_0.

(ii) Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, les réponses sont négatives. La série de Taylor de f au point z_0 peut très bien avoir un rayon de convergence nul, ou encore avoir un rayon de convergence non nul et une somme qui n'est égale à f en aucun autre point que le point z_0.

Considérons par exemple la fonction, définie sur $\mathbf{R}$,

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) & \text{pour } z \neq 0, \\ 0 & \text{pour } z = 0. \end{cases}$$

On vérifie (exercice) qu'elle est continue et qu'elle a des dérivées de tous ordres, en tout point de $\mathbf{R}$, et en particulier à l'origine. On vérifie également qu'à l'origine, la fonction f et ses dérivées de tous ordres sont nulles. La série de Taylor de f à l'origine est donc identiquement nulle; son rayon de convergence est $+\infty$, mais sa somme n'est égale à f en aucun point autre que l'origine, puisque $f(z) > 0$ pour tout $z \neq 0$.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle soit analytique en un point intérieur à son domaine de définition.

3.5. Théorème. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et x_0 un point de I. La fonction f est analytique au point x_0 si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(i) *il existe un réel $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et que la fonction f possède des dérivées de tous les ordres en tout point de cet intervalle;*

(ii) *il existe deux constantes $A \geq 0$ et $k > 0$ telles que, pour tout point $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, et tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$|f^{(n)}(x)| \leq Ak^n n!\,.$$

Démonstration. Supposons f analytique au point x_0. D'après la définition, il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et que, sur cet intervalle, f soit égale à la somme d'une série entière

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

de rayon de convergence $R > r$. On sait alors que f a des dérivées de tous ordres en tout point x de l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$, données, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par la formule

$$f^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+m)!a_{n+m}}{m!}(x - x_0)^m\,. \tag{$*$}$$

Soit $\rho > 0$ vérifiant $r < \rho < R$. La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n$$

étant absolument convergente, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n| \leq M\rho^{-n}\,. \tag{$**$}$$

En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient, pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, la majoration

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{m!} \frac{|x - x_0|^m}{\rho^{n+m}}\,. \tag{$***$}$$

Mais d'autre part, pour $|u| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}\,.$$

En dérivant n fois par rapport à u les deux membres de cette égalité (la dérivation terme à terme de la série du membre de gauche étant légitime dans le disque de convergence), on obtient

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{m!} u^m = \frac{n!}{(1-u)^{n+1}}\,.$$

En utilisant cette égalité pour exprimer le membre de droite de l'inégalité ($***$), en posant $u = |z - z_0|/\rho$, on obtient

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M\rho n!}{\big(\rho - |x - x_0|\big)^{n+1}} \leq \frac{M\rho n!}{(\rho - r)^{n+1}}\,.$$

C'est l'inégalité indiquée, avec $A = M\rho/(\rho - r)$ et $k = (\rho - r)^{-1}$.

Supposons maintenant qu'il existe un réel $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$ soit contenu dans I et que la fonction f possède des dérivées de tous les ordres en tout point de cet intervalle; supposons aussi qu'il existe deux constantes $A \geq 0$ et $k > 0$ telles que, pour tout point $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq Ak^n n!\,.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \int_0^1 \frac{(1-t)^n (x - x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}\big((1-t)x_0 + tx\big)\,dt\,.$$

On en déduit la majoration

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m \right| \leq A(n+1)\big(k|x - x_0|\big)^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n\,dt = A\big(k|x - x_0|\big)^{n+1}\,.$$

Ceci montre que pour $|x - x_0| < k^{-1}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x0)^m \right| = 0\,,$$

donc que f est analytique au point x_0. $\square$

3.6. Les relations de Cauchy-Riemann. Les quelques indications qui suivent permettront peut-être au lecteur d'entrevoir la richesse de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Soit f une fonction à valeurs complexes, définie et dérivable sur une partie ouverte D de $\mathbf{C}$. Tout élément z de $\mathbf{C}$ sera noté

$$z = x + iy\,, \qquad \text{avec } x \text{ et } y \in \mathbf{R}\,,\ i = \sqrt{-1}\,.$$

On note d'autre part u et v la partie réelle et la partie imaginaire de f, et on les considère comme des fonctions des deux variables réelles x et y. On a donc

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)\,.$$

Exprimons que f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$. D'après la définition de la dérivée

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Faisons d'abord $z = z_0 + \epsilon$, avec $\epsilon \in \mathbf{R}$. On obtient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0 + \epsilon, y_0) - u(x_0, y_0)}{\epsilon} + i\frac{v(x_0 + \epsilon, y_0) - v(x_0, y_0)}{\epsilon}\,.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on voit que les parties réelle $\operatorname{Re} f'(z_0)$ et imaginaire $\operatorname{Im} f'(z_0)$ de la dérivée $f'(z_0)$ de la fonction f au point z_0 sont liées aux dérivées partielles de la partie réelle et de la partie imaginaire de f par rapport à la première variable x, par les relations

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\,, \qquad \operatorname{Im} f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\,.$$

Faisons maintenant $z = z_0 + i\epsilon$, avec $\epsilon \in \mathbf{R}$. On obtient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -i\frac{u(x_0, y_0 + \epsilon) - u(x_0, y_0)}{\epsilon} + \frac{v(x_0, y_0 + \epsilon) - v(x_0, y_0)}{\epsilon}\,.$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\,, \qquad \operatorname{Im} f'(z_0) = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\,.$$

Les dérivées partielles des fonctions u et v vérifient donc les relations, appelées *relations de Cauchy-Riemann*,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\,.$$

Ainsi qu'on l'a indiqué ci-dessus sans démonstration, la dérivabilité de f en tout point de l'ouvert D de $\mathbf{C}$ implique l'analyticité de f, donc l'existence et la continuité de ses dérivées de tous les ordres. Par suite, les fonctions u et v sont indéfiniment différentiables. En dérivant les relations de Cauchy-Riemann, et en utilisant les relations (exprimant le lemme de Schwarz)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\,,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,.$$

Les fonctions u et v sont donc solutions d'une même équation aux dérivées partielles, appelée *équation de Laplace*. On dit que ce sont des fonctions *harmoniques*.

4. La fonction exponentielle

4.1. Définition. On appelle *fonction exponentielle*, et on note $z \mapsto \exp(z)$, ou $z \mapsto e^z$, la fonction définie par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

La série entière figurant au membre de droite ayant pour rayon de convergence $+\infty$, la fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{C}$ entier, et à valeurs complexes.

4.2. Théorème. *On a, pour tous z_1 et $z_2 \in \mathbf{C}$,*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\,. \qquad (*)$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\exp(z)$ est non nul, et

$$\bigl(\exp(z)\bigr)^{-1} = \exp(-z)\,. \qquad (**)$$

En particulier,

$$\exp(0) = 1\,. \qquad (***)$$

Démonstration. Les séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!} \qquad \text{and} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

sont absolument convergentes. D'après le théorème 3.5, du chapitre II, leur produit est la série de terme général

$$\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1} z_2}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{(n-k)!k!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!}\,,$$

qui, d'après la formule du binôme, n'est autre que

$$\frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}\,.$$

Ceci prouve l'égalité (1). En faisant $z_1 = z$, $z_2 = -z$, on en déduit l'égalité $(**)$. On obtient $(***)$ en faisant $z = 0$. $\square$

4.3. Corollaire. *La fonction exponentielle est un homomorphisme de $\mathbf{C}$, muni de la structure de groupe abélien dont la loi de composition est l'addition, dans le groupe abélien $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, muni de la structure de groupe abélien dont la loi de composition est la multiplication.*

4.4. Théorème. *La fonction exponentielle est dérivable en tout point $z \in \mathbf{C}$, et vérifie*

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z)\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, puisque le rayon de convergence est $+\infty$. □

4.5. Fonctions trigonométriques et hyperboliques. À partir de la fonction exponentielle, on définit les fonctions cosinus (notation $z \mapsto \cos z$), sinus (notation $z \mapsto \sin z$), cosinus hyperbolique (notation $z \mapsto \cosh z$), sinus hyperbolique (notation $z \mapsto \sinh z$) :

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\,, \qquad \cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}\,,$$
$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,, \qquad \sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}\,.$$

On a les relations :

$$\exp z = \cosh z + \sinh z\,, \qquad \cos z = \cosh(iz)\,,$$
$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z\,, \qquad \sin z = \frac{\sinh(iz)}{i}\,.$$

Ces fonctions sont les sommes des séries entières, ayant toutes pour rayon de convergence $+\infty$,

$$\cos z = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} z2p\,, \qquad \cosh z = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} z^{2p}\,,$$
$$\sin z = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1}\,, \qquad \sinh z = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} z^{2p+1}\,.$$

On reconnaît, pour z réel, les développements de Taylor étudiés en première année. Cependant, alors qu'en première année on considérait seulement des dévelooppements limités, on sait maintenant que ces séries convergent.

De la formule d'addition établie en 4.2, on déduit :

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2\,,\\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\,,\\
\cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2\,,\\
\sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2\,.
\end{aligned}$$

On a également les formules

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,.$$

Posons, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$z = x + iy\,, \qquad \text{avec} \qquad x \in \mathbf{R}\,,\ y \in \mathbf{R}\,.$$

On peut alors écrire

$$\exp z = \exp(x)\bigl(\cos y + i \sin y\bigr)\,.$$

On remarque que

$$\exp \overline{z} = \overline{\exp z}\,,$$

où on a noté $\overline{z}$ et $\overline{\exp z}$ les complexes conjugués, respectivement, de z et de $\exp z$.

On remarquera que pour $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\bigl|\exp(iy)\bigr| = 1\,, \quad \cos y = \operatorname{Re}\exp(iy)\,, \quad \sin y = \operatorname{Im}\exp(iy)\,.$$

4.6. Périodicité de la fonction exponentielle. Considérons la fonction $y \mapsto \cos y$, avec $y \in \mathbf{R}$. Montrons qu'elle s'annule pour au moins une valeur strictement positive de y. Dans le cas contraire, sa primitive, $y \mapsto \sin y$, serait strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. Soit $a > 0$. La fonction f, définie par

$$f(y) = y \sin a + \cos y\,,$$

qui a pour dérivée

$$f'(y) = \sin a - \sin y\,,$$

serait strictement décroissante sur la demi-droite $]a, +\infty[$. Mais puisque pour tout $y \in \mathbf{R}$, $|\cos y| \leq 1$, on a nécessairement

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty\,,$$

ce qui est en contradiction avec la décroissance de f sur $]a, +\infty[$. On a donc prouvé qu'il existe des $y > 0$ tels que $\cos y = 0$.

Par définition $\pi/2$ est le plus petit réel $y > 0$ tel que $\cos y = 0$.

On a

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0\,, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1\,, \quad \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i\,.$$

En utilisant la formule d'addition, on obtient

$$\exp(i\pi) = -1\,, \qquad \exp(2i\pi) = 1\,,$$

et, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp z\,.$$

Ceci exprime que la fonction exponentielle, $z \mapsto \exp z$, est périodique de période $2i\pi$.

4.7. Une détermination de la fonction logarithme. D'après la formule donnant la somme d'une série géométrique on a, pour tout $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots .$$

En intégrant terme à terme, on obtient une série entière de même rayon de convergence, 1. Par définition, sa somme est appelée logarithme de $(1+z)$, et notée

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n .$$

On a

$$\frac{d}{dz} \ln(1+z) = \frac{1}{1+z} .$$

En faisant le changement de variables

$$1 + z = u ,$$

on obtient

$$\ln u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (u-1)^n , \qquad (*)$$

la série figurant au membre de droite étant convergente dans le disque $\{ u \in \mathbf{C} ; |u-1| < 1 \}$.

En utilisant la composition de séries entières, on montre que, pour tout élément u de ce disque,

$$\exp(\ln u) = u .$$

Plus généralement, soit D le complémentaire dans $\mathbf{C}$ du demi-axe réel négatif $]-\infty, 0]$, fermé en 0. Tout élément u de D peut, de manière unique, s'exprimer sous la forme

$$u = \rho \exp(i\theta) , \qquad \text{avec } \rho \in \mathbf{R} ,\ \rho > 0 ,\ \theta \in \mathrm{R} ,\ -\pi < \theta < \pi .$$

En considérant comme connue la notion de logarithme d'un réel > 0 (apprise en première année), on pose, par définition,

$$\ln u = \ln \rho + i\theta .$$

On montre aisément que pour $u \in \mathbf{C}$ vérifiant $|u-1| < 1$, cette définition coïncide avec la définition $(*)$ donnée ci-dessus. On dit que la fonction ainsi définie est une détermination de la fonction logarithme. Elle vérifie, pour tout $u \in D$,

$$\exp(\ln u) = u . \qquad (**)$$

Soit $k \in \mathbf{Z}$ un entier, de signe quelconque. Posons, pour tout $z \in D$,

$$f(z) = \ln z + 2ki\pi .$$

La fonction exponentielle étant périodique, de période $2i\pi$, on a, pour tout $u \in D$,

$$\exp\big(f(u)\big) = u .$$

On dit que f est une autre détermination de la fonction logarithme.