Chapitre V

Systèmes dynamiques discrets

1. Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

1.1. Définition. — *Soit Ω un ensemble, U une partie non vide de Ω, et $f : U \to \Omega$ une application. On appelle système dynamique discret engendré par l'application f, la famille d'applications $\{ f^k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ formée par les itérées de l'application f ; plus explicitement,*

$$f^0 = \mathrm{id}_\Omega, \quad f^1 = f \quad \text{et, pour } k \geq 1\,, \quad f^{k+1} = f \circ f^k\,.$$

1.2. Commentaires. — Convenons de noter U_k la partie de Ω sur laquelle est définie l'application f^k. Nous voyons que $U_0 = \Omega$, puisque f^0 est l'application identique de Ω, et que $U_1 = U$. Il est facile de vérifier que pour tout entier $k \geq 1$,

$$U_{k+1} = f^{-1}(U_k) = (f^k)^{-1}(U)\,.$$

Les U_k forment donc uns suite décroissante de parties de Ω :

$$\Omega = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_k \subset U_{k+1} \subset \cdots\,.$$

Bien entendu, il peut arriver que U_k soit vide à partir d'un certain rang. Cependant, le cas le plus intéressant est celui où tous les U_k sont non vides.

Soit $x \in \Omega$. En utilisant le fait que la suite $(U_k\,,\ k \in \mathbb{N})$ est décroissant, nous voyons aisément que l'ensemble I_x des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x \in U_n$, c'est-à-dire tels que $f^n(x)$ soit défini, est toujours un "intervalle" de $\mathbb{N}$ ayant pour extrémité gauche l'origine; plus explicitement, ou bien $I_x = \mathbb{N}$, ou bien il existe un élément N de $\mathbb{N}$ tel que $I_x = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq n \leq N \}$.

1.3. Quelques exemples. — Nous avons rencontré dans le cours plusieurs algorithmes qui correspondent à des systèmes dynamiques discrets. Il en est ainsi par exemple des algorithmes de Newton et de plus profonde descente, que nous rappelons ci-dessous.

a) *L'algorithme de Newton.* — Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, de cla sse C^1 sur cet intervalle. Pour résoudre, par itérations successives, l'équation

$$h(x) = 0\,,$$

nous avons défini, dans le chapitre III, l'application de Newton associée à h, notée N_h, en posant

$$N_h(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}\,.$$

Cette application est définie sur l'ouvert U formé par les éléments x de I tels que $h'(x) \neq 0$. L'algorithme de Newton consiste à prendre pour point de départ un élément x_0 de U et à poser, pour tout $k \in \mathbb{N}$ pour lequel x_0 appartient à l'ensemble de définition de U_k de N_f^k, $x_k = N_f^k(x_0)$. Il consiste donc tout simplement à considérer la suite des valeurs prises en x_0 par les applications qui constituent le système dynamique discret engendré par N_f.

b) *L'algorithme de plus profonde descente.* — Nous avons considéré dans le chapitre III le système linéaire

$$Ax = b\,,$$

dans lequel A est une application linéaire symétrique définie positive donnée de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, b un élément donné de $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$ l'inconnue. Nous avons défini une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en posant

$$\varphi(x) = \begin{cases} A^{-1}b & \text{si } x = A^{-1}b, \\ x - \dfrac{(Ax-b|Ax-b)}{\big(A(Ax-b)\mid Ax-b\big)}\,(Ax-b) & \text{si } x \neq A^{-1}b. \end{cases}$$

Nous avons montré que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite $\big(\varphi^k(x_0)\,,\ k \in \mathbb{N}\big)$ converge vers $A^{-1}b$. L'algorithme de plus profonde descente consiste donc simplement à considérer la suite des valeurs prises, au point x_0, par les applications qui forment le système dynamique discret engendré par φ.

1.4. Définitions. — *Soit Ω un ensemble, U une partie de Ω, $f : U \to \Omega$ une application, et $\{\, f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ le système dynamique discret engendré par f. Soit également x un point de Ω et I_x l'ensemble des éléments $n \in \mathbb{N}$ tels que x soit élément de U_n, c'est-à-dire tels que $f^n(x)$ soit défini.*

1. *On appelle* orbite positive *du point x l'ensemble $\{\, f^n(x) \;;\; n \in I_x \,\}$.*
2. *On appelle* orbite négative *du point x l'ensemble $\{\, y \in \Omega \;;\; \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(y) = x \,\}$.*
3. *On appelle* orbite entière *du point x la réunion de l'orbite positive et de l'orbite négative de x.*
4. *On dit que x est un* point d'équilibre *du système dynamique $\{\, f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ si c'est un point fixe de l'application f, c'est-à-dire si $x \in U$ et $f(x) = x$.*
5. *On dit que x est* point périodique *du système dynamique $\{\, f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $x \in U_p$ et $f^p(x) = x$. On dit alors que l'entier p est une* période *du point périodique x.*
6. *On suppose le point $x \in \Omega$ périodique de période p, avec p entier, $p \geq 1$. On dit que p est la* période primitive *du point x si pour tout entier q vérifiant $1 \leq q < p$, le point x n'est pas périodique de période q.*

1.5. Commentaires. — Les hypothèses et notations sont celles des définitions précédentes.

a) Les orbites positive et négative d'un point $x \in \Omega$ contiennent toujours le point x.

b) Soit x un point d'équilibre. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x \in U_n$, et $f^n(x) = x$. L'orbite positive du point d'équilibre x est le singleton$\{\, x \,\}$.

c) Soit p un entier vérifiant $p \geq 1$. Un point $x \in \Omega$ est périodique de période p si et seulement si ce point est point d'équilibre du système dynamique discret engendré par f^p.
d) Soit p un entier vérifiant $p \geq 1$ et $x \in \Omega$ un point périodique de période p. Pour tout entier $k \geq 1$, le point x est périodique de période kp. L'ensemble des périodes d'un point périodique est l'ensemble des multiples de sa période primitive.
e) L'orbite positive d'un point x, périodique de période p (avec p entier, $p \geq 1$), possède au plus p éléments. L'orbite positive de x possède exactement p éléments si et seulement si p est la période primitive de x. Cette orbite positive est alors l'ensemble $\{\, x\,,\ f(x)\,,\ \ldots\,,\ f^{p-1}(x)\,\}$.
f) Un point d'équilibre est un point périodique de période primitive 1.

1.6. Définition. — *Soit Ω un ensemble, U une partie de Ω, $f : U \to \Omega$ une application, $\{\, f^n \ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ le système dynamique discret engendré par f et A une partie de Ω.*
On dit que A est positivement invariante *par le système dynamique considéré si pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x)$ est défini et élément de A.*
On dit que A est complètement invariante *par le système dynamique considéré si elle est positivement invariante par ce système et si de plus elle contient l'orbite négative de chacun de ses points.*

Jusqu'à présent, nous n'avons muni l'ensemble Ω d'aucune structure particulière et nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive concernant l'application f. Dans la suite, nous allons nous intéresser à des propriétés faisant intervenir les notions de limite et de convergence. Nous supposerons donc l'ensemble Ω muni d'une topologie, l'application f continue et définie sur une partie ouverte U de Ω.

1.7. Définitions. — *Soit Ω un espace topologique, U un ouvert non vide de Ω, $f : U \to \Omega$ une application continue, $\{\, f^n \ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ le système dynamique discret engendré par f et $x \in \Omega$ un point d'équilibre de ce système.*
1. *On appelle* bassin attractif *du point x l'ensemble des $y \in \Omega$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y soit élément de U_n (ce qui signifie que $f^n(y)$ est défini), et que l'on ait $\lim_{n\to+\infty} f^n(y) = x$.*
2. *Le point d'équilibre x est dit* attractif *si son bassin attractif est un voisinage de ce point ; en d'autres termes, s'il existe un voisinage V de x tel que pour tout élément y de V et tout entier $n \in \mathbb{N}$, y soit élément de U_n et que l'on ait $\lim_{n\to+\infty} f^n(y) = x$.*

1.8. Exemples

a) Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, de classe C^2 sur I. Notons N_f l'application de Newton associée à f. Nous avons prouvé dans le chapitre III (théorème III.10.3) qu'un élément ω de I vérifiant $h(\omega) = 0$ et $h'(\omega) \neq 0$ est un point d'équilibre attractif pour le système dynamique discret engendré par N_f.

b) Soit A une application linéaire symétrique définie positive de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, b un élément de $\mathbb{R}^n$ et $\omega = A^{-1}b$ l'unique solution du système linéaire $Ax = b$. Lors de l'étude de la convergence de la méthode de plus profonde descente, nous avons prouvé (théorème III.8.7) que le point ω est l'unique point d'équilibre du système dynamique engendré par l'application φ (définie ci-dessus, paragraphe 1.3.b), que ce point d'équilibre est attractif et qu'il admet pour bassin attractif $\mathbb{R}^n$ entier.

1.9. Proposition. — *Soit Ω un espace topologique, U un ouvert non vide de Ω, $f : U \to \Omega$ une application continue, $\{ f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ le système dynamique discret engendré par f et $x \in \Omega$ un point d'équilibre de ce système. Le bassin attractif du point x est une partie de Ω complètement invariante par le système dynamique $\{ f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate des définitions 1.6 et 1.7. □

Le résultat suivant va nous permettre de définir la notion d'orbite périodique attractive.

1.10. Proposition. — *Soit Ω un espace topologique, U un ouvert non vide de Ω, $f : U \to \Omega$ une application continue, et $\{ f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ le système dynamique discret engendré par f. Soit $x \in \Omega$ un point périodique de ce système, de période p (avec p entier, $p > 1$). Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Un des points de l'orbite positive de x est point d'équilibre attractif pour le système dynamique engendré par f^p.*
2. *Chacun des points de l'orbite positive de x est point d'équilibre attractif pour le système dynamique engendré par f^p.*

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que l'orbite positive du point périodique x est attractive*, et on appelle* bassin attractif *de cette orbite la réunion des bassins attractifs des points de l'orbite de x, pour le système dynamique discret engendré par f^p.*

Preuve : La propriété 2 implique évidemment la propriété 1. C'est pourquoi il suffit de prouver l'implication inverse. Supposons donc qu'un des points de l'orbite de x soit attractif. Ce point est de la forme $x_k = f^k(x)$, pour un certain entier k vérifiant $0 \le k \le p-1$. D'après la définition 1.6.2, il existe un voisinage V de x_k tel que pour tout $y \in V$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{np}(y)$ soit défini, et que $\lim_{n\to+\infty} f^{np}(y) = x_k$. Nous avons

$$f^{p+k-l}(x_l) = f^{p+k-l} \circ f^l(x) == f^{p+k}(x) = f^k \circ f^p(x) = f^k(x) = x_k$$

et, de même,

$$f^{p+l-k}(x_k) = x_l\,.$$

Puisque f est continue, f^{p+k-l} l'est aussi. Comme V est un voisinage de x_k, $W = (f^{p+k-l})^{-1}(V)$ est un voisinage de x_l. Soit $z \in W$. D'après la définition même de W, $f^{p+k-l}(z)$ est défini et élément de V. Soit $m \in \mathbb{N}$. Si $0 \le m \le p+k-l$, $f^m(z)$ est défini, car $f^{p+k-l}(z)$ l'est. Si $m > p+k-l$, $f^m(z)$ est encore défini; en effet, on peut écrire $f^m(z) = f^{m-p-k+l} \circ f^{p+k-l}(z)$, et on sait que $f^{p+k-l}(z) \in V$ et que pour tout $y \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{np}(y)$ est défini, ce qui implique que $f^{m-p-k+l}(y)$ est défini. Ainsi, nous avons prouvé que $f^m(z)$ est défini pour tout $m \in \mathbb{N}$. Supposons m multiple de p. Nous pouvons écrire $m = np$ et, en supposant $n \geq 2$,

$$f^{np}(z) = f^{p+l-k} \circ f^{(n-2)p} \circ f^{p+k-l}(z)\,,$$

ou, en posant $y = f^{p+k-l}(z)$,

$$f^{np}(z) = f^{p+l-k} \circ f^{(n-2)p}(y)\,.$$

Puisque $y \in V$, $\lim_{n\to+\infty} f^{(n-2)p}(y) = x_k$. Enfin, puisque f^{p+l-k} est continue et que $f^{p+l-k}(x_k) = x_l$,

$$\lim_{n\to+\infty} f^{np}(z) = f^{p+l-k}(x_k) = x_l\,. \qquad \square$$

1.11. Définition. — *Soient Ω et Ξ deux espaces topologiques, U on ouvert de Ω, V un ouvert de Ξ, $f : U \to \Omega$ et $g : V \to \Xi$ deux applications continues. On dit que ces deux applications sont topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme $T : \Omega \to \Xi$ tel que*

$$T(U) = V \qquad \text{et} \qquad T \circ f = g \circ T\,,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$T(U) = V \qquad \text{et} \qquad g = T \circ f \circ T^{-1}\,.$$

On dit alors que l'homéomorphisme $T : \Omega \to \Xi$ conjugue les applications f et g.

1.12. Commentaires. — Les notations sont celles de la définition précédente.

a) L'homéomorphisme $T : \Omega \to \Xi$ conjugue les applications f et g si et seulement si l'homéomorphisme inverse $T^{-1} : \Xi \to \Omega$ conjugue les applications g et f.

b) Supposons les applications continues $f : U \to \Omega$ et $g : V \to \Xi$ topologiquement conjuguées par l'homéomorphisme $T : \Omega \to \Xi$. Soient $\{\, f^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\, g^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ les systèmes dynamiques engendrés, respectivement, par f et par g. Nous notons U_n et V_n les ensembles de définition respectifs de f^n et de g^n. Il est facile de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T(U_n) = V_n\,, \quad T \circ f^n = g^n \circ T\,, \quad g^n = T \circ f^n \circ T^{-1}\,.$$

Cela exprime que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n et g^n sont topologiquement conjugués par T. On exprime ce résultat en disant que lorsque un homéomorphisme $T : \Omega \to \Xi$ conjugue les applications $f : U \to \Omega$ et $g : V \to \Xi$, il conjugue les systèmes dynamiques discrets engendrés par ces applications.

c) Toujours dans les mêmes hypothèses, l'homéomorphisme T permet de mettre en correspondance chaque propriété topologique du système dynamique engendré par f avec la propriété topologique correspondante du système dynamique engendré par g, et inversement.

Ainsi, par exemple, pour tout élément x de Ω, l'homéomorphisme T restreint à l'orbite positive (resp., l'orbite négative, resp., l'orbite entière) de x, pour le système dynamique engendré par f, est un homéomorphisme de cette orbite sur l'orbite correspondante du point $T(x)$ pour le système dynamique engendré par g. L'élément x de Ω est point d'équilibre du système dynamique engendré par f si et seulement si $T(x)$ est point d'équilibre du système dynamique engendré par g. Lorsque c'est le cas, l'homéomorphisme T, restreint au bassin attractif de x, est un homéomorphisme de ce bassin attractif sur le bassin attractif de $T(x)$, et le point d'équilibre x est attractif pour le système dynamique engendré par f si et seulement si $T(x)$ est attractif pour le système dynamique engendré par g.

De même, un élément x de Ω est point périodique de période p du système dynamique engendré par f si et seulement si $T(x)$ est point périodique de période p du système dynamique engendré par g. Lorsque c'est le cas, l'orbite positive de x est attractive si et seulement si l'orbite positive de $T(x)$ est attractive.

d) On vérifie aisément que la conjugaison topologique est une relation d'équivalence.

2. La sphère de Riemann

2.1. Définition. — *On appelle sphère de Riemann le compactifié d'Alexandroff* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *du plan complexe* $\mathbb{C}$.

2.2. Commentaires

a) *Rappel.* — Rappelons (voir par exemple le livre *Topologie*, par G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle, éditions Ellipses, 1996, page 72) que le compactifié d'Alexandroff d'un espace topologique localement compact et non compact E est l'ensemble $\overline{E} = E \cup \{\infty\}$ obtenu en ajoutant à E un point ∞, appelé *point à l'infini*, muni de l'unique topologie ayant les propriétés suivantes :

(i) l'espace $\overline{E}$ est compact,

(ii) la partie E de $\overline{E}$ est dense dans cet espace, et la topologie de E coïncide avec la topologie induite par celle de $\overline{E}$.

On montre alors que les complémentaires dans $\overline{E}$ des parties compactes de E forment un sytème fondamental de voisinages du point ∞.

b) *Topologie de la sphère de Riemann.* — On peut effectuer la construction décrite ci-dessus lorsque $E = \mathbb{C}$, puisque $\mathbb{C}$ est un espace topologique localement compact et non compact. La sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est un espace topologique compact.

Le plan complexe $\mathbb{C}$ s'identifie à un ouvert dense de $\overline{\mathbb{C}}$, dont le complémentaire est ls singleton $\{\infty\}$. Les complémentaires dans $\overline{\mathbb{C}}$ des parties compactes de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire des parties fermées et bornées de $\mathbb{C}$) forment un système fondamental de voisinages de ∞.

c) *Structure de variété analytique de* $\overline{\mathbb{C}}$. — La sphère de Riemann s'identifie à l'espace projectif complexe $\mathbb{PC}(1)$, c'est-à-dire au quotient de $\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence suivante :

deux points (z_1, z_2) et (z'_1, z'_2) de $\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}$ sont équivalents s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $z'_1 = \lambda z_1$ et $z'_2 = \lambda z_2$.

L'injection canonique de $\mathbb{C}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$, identifié à l'espace projectif $\mathbb{PC}(1)$, est l'application qui associe, à chaque $z \in \mathbb{C}$, la classe d'équivalence de $(z, 1)$. Le point à l'infini ∞ s'identifie à la classe d'équivalence de $(1, 0)$.

Soient $\widetilde{U}$ et $\widetilde{U}'$ les ensembles des éléments (z_1, z_2) de $\mathbb{C}^2$ qui vérifient, respectivement, $z_2 \neq 0$ pour le premier, et $z_1 \neq 0$ pour le second. Leur réunion est $\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}$. Soient $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ et $\widetilde{\varphi}' : \widetilde{U}' \to \mathbb{C}$ les applications définies par

$$\widetilde{\varphi}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}\,, \qquad \widetilde{\varphi}'(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1}\,.$$

Soient U et U' les images, respectivement de $\widetilde{U}$ et de $\widetilde{U}'$, par la projection canonique de $\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}$ sur $\mathbb{PC}(1)$. Les deux applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\varphi}'$ sont constantes sur chaque classe d'équivalence, pour la relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de $\mathbb{PC}(1)$. Elles définissent donc deux applications $\varphi : U \to \mathbb{C}$ et $\varphi' : U' \to \mathbb{C}$. On vérifie aisément que ces deux applications sont des homéomorphismes, dont les inverses sont

$$z \mapsto \varphi^{-1}(z) = \text{classe de } (z, 1)\,, \quad z \mapsto (\varphi')^{-1}(z) = \text{classe de } (1, z)\,.$$

On dit que (U, φ) et (U', φ') sont des *cartes* de $\mathbb{PC}(1)$. Comme $U \cup U' = \mathbb{PC}(1)$, on dit que ces deux cartes constituent un *atlas* de $\mathbb{PC}(1)$. L'application de changement de cartes, définie sur $\varphi(U \cap U') = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, et à valeurs dans $\varphi'(U \cap U')$ (qui est aussi égal à $\mathbb{C}\backslash\{0\}$), est

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-1}\,.$$

Elle est analytique, ainsi que son inverse.

On exprime ce résultat en disant que $\mathbb{PC}(1)$ (donc aussi la sphère de Riemann, puisqu'elle s'identifie à cet espace) est une *variété analytique complexe* de dimension 1.

On remarque que φ^{-1} est l'injection canonique de $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, lorsque celle-ci est identifiée à $\mathbb{PC}(1)$.

2.3. Fraction rationnelle sur la sphère de Riemann. — Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux et $R = \dfrac{P}{Q}$ la fraction rationnelle ayant P pour numérateur et Q pour dénominateur. Cette fraction rationnelle est une fonction définie sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des zéros de Q :

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) \neq 0\,.$$

On prolonge R en une application, encore notée R, de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même. Pour cela, on doit définir $R(z)$ lorsque $z \in \mathbb{C}$ et $Q(z) = 0$, et lorsque $z = \infty$. Il est tout à fait naturel de poser

$$R(z) = \infty \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \text{ et } Q(z) = 0\,.$$

Pour définir $R(\infty)$, posons

$$R(\infty) = \lim_{z\in\mathbb{C}\,,\ |z|\to+\infty} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\,.$$

Nous convenons bien sûr que si la limite, lorsque $z \in \mathbb{C}$ et $|z| \to +\infty$, de $\left|\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right|$ est $+\infty$, la valeur de $R(\infty)$ est le point à l'infini ∞ de $\overline{\mathbb{C}}$.

Il est facile de voir que si le degré de P est strictement supérieur au degré de Q, $R(\infty) = \infty$, et que si le degré de Q est strictement supérieur à celui de P, $R(\infty) = 0$. Enfin, si P et Q sont de même degré, et si les termes de plus haut degré de $P(z)$ et de $Q(z)$ sont $a_n z^n$ et $b_n z^n$, respectivement, avec a_n et $b_n \in \mathbb{C}$, tous deux non nuls, $R(\infty) = \dfrac{a_n}{b_n}$.

2.4. Proposition. — *Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux et $R = \dfrac{P}{Q}$ la fraction rationnelle ayant P pour numérateur et Q pour dénominateur. Le prolongement naturel de R en une application de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle même, décrit ci-dessus, est une application holomorphe.*

Preuve : Nous allons utiliser les cartes (U, φ) et (U', φ') de la sphère de Riemann, définies en 2.2.c. Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Nous allons distinguer plusieurs cas.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $Q(z_0) \neq 0$, nous avons, pour $z \in \mathbb{C}$ assez voisin de z_0,

$$\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,.$$

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $Q(z_0) = 0$, nous avons de même

$$\varphi' \circ R \circ \varphi^{-1}(z) = \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{-1} = \frac{Q(z)}{P(z)}\,.$$

Si $z_0 = \infty$ et $R(z_0) \in \mathbb{C}$, nous avons de même

$$\varphi \circ R \circ (\varphi')^{-1}(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\,.$$

Enfin si $z_0 = \infty$ et $R(z_0) = \infty$, nous avons

$$\varphi' \circ R \circ (\varphi')^{-1}(z) = \left(\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\right)^{-1} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}\,.$$

Ces expressions montrent que dans tous les cas, l'application R, composée avec les cartes (φ ou φ') adéquates, ou leurs inverses, s'exprime, au voisinage de z_0, comme une fraction rationnelle de la variable $z \in \mathbb{C}$ dont le dénominateur ne s'annule pas au voisinage du point considéré. Nous pouvons donc conclure que R est une application holomorphe au voisinage de chacun des points z_0 de $\overline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire une application holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$.

□

2.5. Remarque. — Le résultat qui précède s'applique en particulier au cas où $Q = 1$, c'est-à-dire au cas où l'application R est en fait une application polynomiale P. En utilisant le théorème de d'Alembert, il est facile de vérifier qu'une application holomorphe de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même définie par une fraction rationnelle R, est une application polynomiale, si et seulement si le seul élément z de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que $R(z) = \infty$ est le point à l'infini ∞.

2.6. Définition. — *Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux, et $R = \dfrac{P}{Q}$ la fraction rationnelle ayant P pour numérateur et Q pour dénominateur. On appelle* degré *de R, le plus grand des deux nombres suivants : le degré de P, et le degré de Q.*

2.7. Remarque. — Le degré d'une fraction rationnelle intervient notamment pour la question suivante. Soit $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Considérons l'équation, dans laquelle $z \subset \overline{\mathbb{C}}$ est l'inconnue,

$$R(z) = a\,.$$

Le nombre de solutions de cette équation est toujours inférieur ou égal au degré de R. En effet, cette équation équivaut à l'équation polynomiale

$$P(z) - aQ(z) = 0\,,$$

qui, d'après le théorème de d'Alembert, a génériquement (c'est-à-dire en dehors des cas exceptionnels où certaines solutions sont multiples) un nombre de solutions égal au degré du polynôme $P - aQ$. Or celui-ci est toujours inférieur ou égal au degré de R (il est égal au degré de R sauf lorsque P et Q sont de même degré n et que a prend la valeur exceptionnelle pour laquelle $P - aQ$ est de degré $\leq n - 1$).

2.8. Définition. — *Soit A une matrice élément du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, ayant pour expression*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, \quad \text{avec} \quad a\,,\ b\,,\ c \text{ et } d \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } ad - bc = 1\,.$$

On appelle transformation de Möbius *associée à la matrice A l'application holomorphe de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même, définie par la fraction rationnelle*

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,.$$

2.9. Proposition. — *Soient A et B deux matrices éléments du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, M_A et M_B les transformations de Möbius qui leur sont associées. L'application composée $M_A \circ M_B$ est la transformation de Möbius $M_{A\,B}$ associée à la matrice $A\,B$, produit des matrices A et B.*

Preuve : Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\,.$$

Nous avons

$$M_B(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}\,, \quad M_A(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}\,,$$

et par suite

$$M_A \circ M_B(z) = \frac{a\,\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\,\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}\,.$$

Nous avons donc bien

$$M_A \circ M_B(z) = M_{A\,B}(z)\,. \qquad \square$$

2.10. Corollaire. — *L'ensemble des transformations de Möbius de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, avec pour loi de composition la composition des applications et pour élément neutre l'application identique, est un groupe. L'application qui associe à chaque matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ la transformation de Möbius M_A est un isomorphisme de groupes.*

Preuve : Soit $A \in SL(2, \mathbb{C})$, et M_A la transformation de Möbius associée. On vérifie immédiatement que M_A est l'application identique de $\overline{\mathbb{C}}$ si et seulement si A est la matrice unité. La proposition qui précède montre alors que la transformation de Möbius associée à une matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ est inversible et a pour inverse la transformation de Möbius associée à la matrice A^{-1}. Elle montre aussi que l'ensemble des transformations de Möbius est un groupe, et que l'application $A \mapsto M_A$, avec $A \in SL(2, \mathbb{C})$, est un isomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ sur le groupe des transformations de Möbius. $\square$

2.11. Proposition. — *Soient α, β et γ trois éléments distincts de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Il existe une transformation de Möbius M telle que $M(\alpha) = 0$, $M(\beta) = 1$ et $M(\gamma) = \infty$.*

Preuve : Nous allons traiter le cas où α, β et γ sont tous trois éléments de $\mathbb{C}$; nous laissons au lecteur le soin de traiter les cas où l'un de ces éléments de la sphère de Riemann est le point à l'infini ∞.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice élément de $SL(2, \mathbb{C})$, et M_A la transformation de Möbius associée. Nous allons montrer qu'on peut toujours déterminer les coefficients de la matrice A de manière telle que M_A ait les propriétés désirées.

Nous avons $M_A(\alpha) = 0$ si et seulement si $a\alpha + b = 0$.

Nous avons $M_A(\beta) = 1$ si et seulement si $a\beta + b = c\beta + d$.

Nous avons $M_A(\gamma) = \infty$ si et seulement si $c\gamma + d = 0$.

D'autre part, puisque $A \in SL(2, \mathbb{C})$, nous avons $ad - bc = 1$.

De la première et de la troisième égalités ci-dessus, nous tirons

$$b = -a\alpha\,, \qquad d = -c\gamma\,. \tag{$*$}$$

En remplaçant b et d par ces expressions dans la seconde et la quatrième égalités ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{a}{c} = \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}\,, \qquad ac = \frac{1}{\alpha - \gamma}\,,$$

d'où nous tirons

$$a^2 = \frac{\beta - \gamma}{(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)}\,, \qquad c^2 = \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)}\,.$$

Ces équations déterminent les complexes a et c (il y a deux valeurs possibles de a opposées l'une de l'autre, et de même deux valeurs possibles de c). Les égalités $(*)$ déterminent alors b et d. □

3. Un exemple de système dynamique sur la sphère de Riemann

3.1. Le système étudié. — Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{C}$, et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application

$$f(z) = (z - a)(z - b)\,.$$

Considérons l'application de Newton associée à f :

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{(z-a)(z-b)}{2z - a - b} = \frac{z^2 - ab}{2z - a - b}\,.$$

L'application N_f est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{\,(a+b)/2\,\}$, mais puisqu'elle est définie par une fraction rationnelle, nous pouvons la prolonger en une application holomorphe (encore notée N_f) de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même en posant

$$N_f\big((a+b)/2\big) = \infty\,, \qquad N_f(\infty) = \infty\,.$$

Nous allons nous intéresser au système dynamique engendré par N_f.

3.2. Points d'équilibre. — Il est facile de vérifier que

$$N_f(a) = a\,, \qquad N_f(b) = b\,, \qquad N_f(\infty) = \infty\,.$$

Ainsi, a, b et ∞ sont points d'équilibre du système. On voit aisément qu'il n'y en a pas d'autre.

L'orbite positive du point $(a+b)/2$ est $\big\{\,(a+b)/2\,,\ \infty\,\big\}$.

Afin de déterminer les bassins attractifs des points d'équilibre, nous allons effectuer une transformation qui conjugue le système dynamique engendré par N_f à un système d'expression plus simple.

3.3. La transformation T. — Soit $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ l'application holomorphe de la sphère de Riemann dans elle-même associée à la fraction rationnelle

$$T(z) = \frac{z - a}{z - b}\,.$$

On rappelle que le prolongement de T à $\overline{\mathbb{C}}$ vérifie

$$T(b) = \infty\,, \qquad T(\infty) = 1\,.$$

L'application T n'est pas une transformation de Möbius. Cependant soit H_{a-b} l'homothétie de rapport $a-b$, c'est-à-dire l'application de $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même définie par

$$H_{a-b}(z) = (a-b)z \text{ si } z \in \mathbb{C}, \quad H_{a-b}(\infty) = \infty .$$

On vérifie alors aisément que $H_{a-b}^{-1} \circ T$ est une transformation de Möbius. Par suite, T est inversible et son inverse est l'application holomorphe de $\overline{\mathbb{C}}$ associée à la fraction rationnelle

$$T^{-1}(Z) = \frac{bZ-a}{Z-1} .$$

On a bien sûr

$$T^{-1}(\infty) = b , \qquad T^{-1}(1) = \infty .$$

3.4. Proposition. — *Soit* $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *l'application*

$$g(z) = z^2 , \qquad g(\infty) = \infty .$$

La transformation T *conjuque les applications* N_f *et* g*. En d'autres termes, on a*

$$T \circ N_f \circ T^{-1} = g .$$

Preuve : Nous pouvons nous contenter de vérifier cette propriété lorsque tous les termes rencontrés dans le calcul sont éléments de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire lorsque les expressions figurant au dénominateur des fractions rationnelles considérées sont non nulles. Le cas général s'en déduit par continuité. Soit $Z \in \mathbb{C}$. Posons $z = T^{-1}(Z)$, $w = N_f(z)$. Nous avons

$$z = \frac{bZ-a}{Z-1} , \quad w = \frac{z^2-ab}{2z-a-b} , \quad T(w) = \frac{w-a}{w-b} .$$

Effectuons les calculs afin d'exprimer $T(w)$ au moyen de Z. Nous obtenons

$$T(w) = \frac{z-a-\dfrac{(z-a)(z-b)}{2z-a-b}}{z-b-\dfrac{(z-a)(z-b)}{2z-a-b}} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = Z^2 .$$

Nous avons donc bien $T \circ N_f \circ T^{-1}(Z) = Z^2 = g(Z)$. □

3.5. Le système dynamique engendré par g**. —** Puisque $g(z) = z^2$, le système dynamique engendré par g admet trois points fixes : 0, 1 et ∞. On a

$$\left|g^n(z)\right| = |z|^{2^n} .$$

Nous voyons donc que le bassin attractif du point d'équilibre 0 est le disque $\{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z| < 1 \,\}$, et que le bassin d'équilibre du point ∞ est $\{\,\infty\,\} \cup \{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z| > 1 \,\}$. Les points d'équilibre 0 et ∞ sont donc attractifs. Le point d'équilibre 1 se trouve sur le cercle trigonométrique $\{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z| = 1 \,\}$, qui est la frontière commune aux bassins attractifs des deux autres points d'équilibre 0 et ∞. Il n'est donc pas attractif.

Les bassins attractifs se 0 et de ∞, ainsi que leur frontière commune, le cercle trigonométrique, sont des parties de $\overline{\mathbb{C}}$ complètement invariantes de $\overline{\mathbb{C}}$, pour le système dynamique engendré par g (proposition 1.9). Sur le cercle trigonométrique, il y a une infinité de points périodique, tous les points de la forme $e^{2i\pi r}$ où r est un nombre rationnel (élément de $\mathbb{Q}$).

3.6. Le système dynamique engendré par N_f. — L'application T^{-1} applique le bassin d'équilibre des points 0 et ∞ (pour le système dynamique engendré par g) sur les bassins d'équilibre des point a et b, respectivement (pour le système dynamique engendré par N_f). Elle applique le cercle trigonométrique sur la courbe de $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\{\infty\} \cup \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \ |z-a| = |z-b| \},$$

qui n'est autre que la réunion du singleton $\{\infty\}$ et de la médiatrice du segment de droite d'extrémités a et b. Nous voyons donc que la frontière commune aux bassins attractifs des points a et b, pour le système dynamique engendré par N_f, est la médiatrice du segment de droite d'extrémités a et b, complétée par le point à l'infini ∞. Les points d'équilibre a et b sont attractifs, le point ∞ ne l'est pas, et il y a sur la médiatrice du segment de droite d'extrémités a et b une infinité de points périodiques, tous les points de la forme

$$z = \frac{be^{2i\pi r} - a}{e^{2i\pi r} - 1}, \quad \text{avec } r \in \mathbb{Q}.$$

4. Familles normales

Avant d'aller plus loin dans l'étude des systèmes dynamiques engendrés par une fraction rationnelle sur la sphère de Riemann, nous allons rappeler quelques résultats d'Analyse complexe.

4.1. Définition. — *Soit D un ouvert non vide connexe de $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes sur D, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est normale si elle est uniformément bornée sur toute partie compacte K de $\mathbb{C}$ contenue dans D, c'est-à-dire si, pour toute partie compacte K de $\mathbb{C}$ vérifiant $K \subset D$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in K$, $\bigl|f(z)\bigr| \leq M$.*

4.2. Remarque. — L'espace des applications holomorphes de D dans $\mathbb{C}$ peut être muni de la structure semi-métrique de la convergence uniorme sur tout compact (voir par exemple *Topologie*, par G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle, éditions Ellipses, page 122). Les familles normales sont les parties qui sont bornées pour cette structure semi-métrique.

4.3. Une convention de langage. — Soit γ une courbe différentiable fermée simple dans $\mathbb{C}$ (courbe de Jordan). D'après le théorème de Jordan, le complémentaire de γ dans $\mathbb{C}$ a exactement deux composantes connexes dont une seule est d'adhérence compacte. Cette composante connexe sera appelée *intétrieur* de γ.

4.4. Proposition. — *Soit D un ouvert non vide connexe de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur D, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{F}$ est normale, la famille $\mathcal{F}'$ formée par les dérivées des éléments de $\mathcal{F}$ est normale.*

Preuve : Rappelons tout d'abord la formule de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe sur D, γ une courbe fermée différentiable simple contenue dans D et dont l'intérieur est contenu dans D. Pour tout point z intérieur à γ, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,. \qquad (*)$$

En dérivant les deux membres de cette formule par rapport à z, on obtient la formule

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\,. \qquad (**)$$

Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans D. Il existe une courbe fermée différentiable simple γ, contenue dans D, dont l'intérieur contient K. Soit l la longueur de γ, et $d(\gamma, K)$ la distance de γ à K. On rappelle que

$$d(\gamma, K) = \inf_{(\xi,z)\in\gamma\times K} |\xi - z|\,.$$

C'est la borne inférieure d'une fonction continue strictement positive sur le compact $\gamma\times K$, donc $d(\gamma, K) > 0$. Pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in K$, nous avons, compte tenu de la formule $(**)$,

$$\bigl|f'(z)\bigr| \leq \frac{l}{2\pi\bigl(d(\gamma,K)\bigr)^2} \sup_{\xi\in\gamma}\bigl|f(\xi)\bigr|\,.$$

Mais la famille $\mathcal{F}$ étant normale, et γ étant compacte, il existe $M > 0$, ne dépendant pas du choix de l'élément f de $\mathcal{F}$, tel que

$$\sup_{\xi\in\gamma}\bigl|f(\xi\bigr| \leq M\,.$$

On en déduit que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in K$,

$$\bigl|f'(z)\bigr| \leq \frac{lM}{2\pi\bigl(d(\gamma,K)\bigr)^2}\,.$$

Cela prouve que la famille $\mathcal{F}' = \{\, f' \;;\; f \in \mathcal{F}\,\}$ est normale. □

4.5. Proposition. — *Soit D un ouvert non vide connexe de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur D, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{F}$ est normale, elle est uniformément équicontinue sur toute partie compacte K de $\mathbb{C}$ contenue dans D.*

Preuve : Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans D. Nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si z et z' sont deux éléments de K qui vérifient $|z - z'| \leq \eta$, et si $f \in \mathcal{F}$, alors $\bigl|f(z) - f(z')\bigr| \leq \varepsilon$.
La distance $d(K, D^c$ du compact K au complémentaire D^c de D dans $\mathbb{C}$ est strictement positive, puisque Kest compact et D^c fermé. Soit r un réel vérifiant $0 < 2r < d(K, D^c)$. Pour tout $y \in K$ soit

$$\Delta_y = \{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z - y| < r\,\}$$

le disque ouvert de centre y et de rayon r. Lorsque y parcourt K, les disques Δ_y forment un recouvrement ouvert du compact K, dont on peut extraire un recouvrement fini. Il existe donc une famille finie de pointz y_i de K, $1 \leq i \leq n$, telle que $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta_{y_i}$. Posons

$$K_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{ \, z \in \mathbb{C} \ ; \quad |z - y_i| \leq 2r \, \} \, .$$

Nous voyons que K_1 est compact, car c'est la réunion de n disques fermés, centrés sur les points y_i et de rayon $2r$. De plus, d'après le choix de r, $K_1 \subset D$. Compte tenu de la proposition précédente, la famille $\mathcal{F}'$ est normale. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $\xi \in K_1$, $\left| f'(\xi) \right| \leq M$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Soit η un réel vérifiant

$$0 < \eta < \inf \left(r, \frac{\varepsilon}{M} \right) \, .$$

Soient z et z' deux éléments de K vérifiant $|z - z'| \leq \eta$. Nous avons, *a fortiori*, $|z - z'| \leq r$. Puisque $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta_{y_i}$, il existe un entier $i \in \{ \, 1 \, , \, \ldots \, , \, n \, \}$ tel que $z \in \Delta_{y_i}$. Mais alors z et z' sont tous deux éléments du disque fermé de centre y_i et de rayon $2r$; comme ce disque est convexe et contenu dans K_1, le segment de droite γ, d'extrémités z et z', est contenu dans K_1. Nous pouvons alors écrire

$$f(z') - f(z) = \int_\gamma f'(\xi) \, d\xi \, ,$$

d'où nous déduisons les majorations

$$\left| f(z') - f(z) \right| \leq M |z' - z| \leq M\eta \leq M \, \frac{\varepsilon}{M} \leq \varepsilon \, . \qquad \square$$

4.6. Théorème de Stieltjes – Vitali – Montel. — *Soit D un ouvert non vide connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n \, , \ n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions holomorphes sur D, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si la famille $\{ \, f_n \ ; \ \ n \in \mathbb{N} \}$ et normale, on peut extraire de cette suite une sous-suite qui converge vers une fonction holomorphe sur D, la convergece étant uniforme sur toute partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans D.*

Preuve : Voir par exemple *Analyse complexe*, par P. Dolbeault, Masson, Paris, 1990, page 68. $\square$

5. Les ensembles de Fatou et de Julia d'une fraction rationnelle

5.1. Le problème étudié et les notations. — Dans tout ce paragraphe, P et Q sont deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux et $R = P/Q$ la fraction rationnelle ayant P pour numérateur et Q pour dénominateur. On suppose R de degré ≥ 2, et on la prolonge en une application holomorphe (encore notée R) de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même, comme indiqué en 2.3. Soit $\{ \, R^n \ ; \ \ n \in \mathbb{N} \}$ le système dynamique discret engendré par R.

Nous allons nous intéresser aux points périodiques de ce système, et tout d'abord associer, à chaque point périodique, un nombre complexe appelé *multiplicateur* de ce point. La proposition suivante va nous permettre de prouver que tous les points d'une orbite périodique ont le même multiplicateur. C'est pourquoi on parlera de *multiplicateur d'une orbite périodique*.

5.2. Proposition. — *Dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un point périodique du système dynamique $\{ R^n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$, de période primitive $p \geq 1$. On note $\{ z_0 \, , \; z_1 = R(z_0) \, , \; \ldots \, , \; z_{p-1} = R^{p-1}(z_0) \}$ l'orbite de ce point. Pour tout $i \in \{ 0 \, , \; 1 \, , \; \ldots \, , \; p-1 \}$, on pose*

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{d}{dz} \big(R^p(z) \big) \, \Big|_{z=z_i} & \text{si } z_i \neq \infty, \\ \dfrac{d}{dz} \Big(\big(R^p(z^{-1}) \big)^{-1} \Big)^{-1} \, \Big|_{z=0} & \text{si } z_i = \infty. \end{cases}$$

Chaque λ_i est appelé multiplicateur du point périodique z_i. Les λ_i, $0 \leq i \leq p-1$, sont tous égaux. Leur valeur commune est appelée multiplicateur de l'orbite périodique $\{ z_0 \, , \; z_1 = R(z_0) \, , \; \ldots \, , \; z_{p-1} = R^{p-1}(z_0) \}$.

Preuve : Nous supposerons pour simplifier qu'aucun des z_i n'est égal au point à l'infini. En remarquant que $R^p = R \circ R \circ \cdots \circ R$ (avec p termes R), et en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, nous obtenons

$$\lambda_i = \frac{d}{dz} \big(R^p(z) \big) \, \Big|_{z=z_i} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{d}{dz} \big(R^p(z) \big) \, \Big|_{z=z_{i+k}} \, ,$$

où par convention $z_p = z_0$, $z_{p+1} = z_1$, …, $z_{p+i-1} = z_{i-1}$.
Cette expression de λ_i ne diffère de celle de λ_0 que par l'ordre des facteurs. Donc pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p-1$, nous avons bien $\lambda_i = \lambda_0$. □

5.3. Définition. — *Les hypothèses et notations étant celles de la proposition 5.2, on dit que l'orbite périodique $\{ z_0 \, , \; z_1 = R(z_0) \, , \; \ldots \, , \; z_{p-1} = R^{p-1}(z_0) \}$ est*

- *fortement attractive si son multiplicateur est de module < 1,*
- *répulsive si son multiplicateur est de module > 1,*
- *indifférentesi son multiplicateur est de module 1. Dans ce dernir cas, on dit que l'orbite est*
  - *indifférente rationnelle si son multiplicateur est de la forme $e^{2i\pi r}$, avec $r \in \mathbb{Q}$,*
  - *indifférente irrationnelle si son multiplicateur est de la forme $e^{2i\pi r}$, avec $r \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q}$.*

On dit également qu'un point x_i de cette orbite est fortement attractif, répulsif, indifférent rationnel ou indifférent irrationnel selon que l'orbite est fortement attractive, répulsive, indifférente rationnelle ou indifférente irrationnelle.

5.4. Remarque. — Dans la définition ci-dessus, nous avons choisi de dire qu'une orbite périodique dont le multiplicateur est de module < 1 est fortement attractive, alors que de nombreux auteurs disent, plus simplement, qu'une telle orbite est attractive. Nous avons fait cela pour éviter toute confusion avec la notion d'orbite périodique attractive introduite dans la proposition 1.10.

Il est facile de montrer qu'une orbite fortement attractive au sens de la définition 5.3 est attractive au sens de la proposition 1.10. Soit en effet λ le multiplicateur d'un point z_i de l'orbite. Nous avons (en supposant par exemple $z_i \neq \infty$, le cas $z_i = \infty$ pouvant être traité de manière analogue),

$$R^p(z) - z_i = R^p(z) - R^p(z_i) = \lambda(z - z_i) + \mathbf{o}(z - z_i)\,.$$

Comme $|\lambda| < 1$, il existe un réel k vérifiant $|\lambda| < k < 1$, et l'expression ci-dessus montre qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|z - z_i| < \eta$,

$$\bigl|R^p(z) - z_i\bigr| = \bigl|R^p(z) - R^p(z_i)\bigr| \leq k|z - z_i|\,,$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigl|R^{np}(z) - z_i\bigr| \leq k^n|z - z_i|\,,$$

ce qui prouve que le disque de centre z_i et de rayon η est contenu dans le bassin attractif de z_i, pour le système dynamique engendré par R^p, donc que ce point est attractif pour ce système au sens de la définition 1.7.2.

Mais réciproquement, il peut arriver qu'une orbite périodique indifférente, au sens de la définition 5.3, soit attractive au sens de la proposition 1.10.

5.5. Définitions. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, on appelle ensemble de Fatou de R l'ensemble F des points $z \in \overline{\mathbb{C}}$ qui possèdent un voisinage sur lequel la famille $\{\, R^n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ est normale.*

On appelle ensemble de Julia de R le complémentaire J dans $\overline{\mathbb{C}}$ de l'ensemble de Fatou F de R.

5.6. Commentaires

a) Nous avons défini la notion de famille normale pour une famille de fonctions holomorphes définies sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Cette définition s'étend aisément à une famille $\mathcal{F}$ d'applications holomorphes, définies sur un ouvert connexe D de $\overline{\mathbb{C}}$, et à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$, comme suit : la famille $\mathcal{F}$ est normale s'il existe un point ω de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\omega \notin f(D)$, et si pour toute partie compacte K de $\overline{\mathbb{C}}$ contenue dans D, il existe une partie compacte K_1 de $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{\,\omega\,\}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in K$, on ait $f(z) \in K_1$.

b) D'après les définitions 5.5, l'ensemble de Fatou de R est une partie ouverte F de $\overline{\mathbb{C}}$; son complémentaire, l'ensemble de Julia de R, est donc une partie fermée J de $\overline{\mathbb{C}}$.

5.7. Proposition. — *Les hypothèses et notations étant celles de 5.1, l'ensemble de Fatou F et l'ensemble de Julia J de R sont des parties complètement invariantes de $\overline{\mathbb{C}}$.*

Preuve : Soit $z \in F$, et $y \in R^{-1}(z)$. D'après la définition de F, il existe un voisinage V de z sur lequel la famille $\{ R^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$ est normale. Soit $W = R^{-1}(V)$. Puisqiue R est continue, W est un voisinage de y, et $R(W) \subset V$. En remarquant que pour $n \geq 1$, $R^n = R^{n-1} \circ R$, on voit alors immédiatement que $\{ R^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$ est normale sur W. Donc $y \in F$. □

5.8. Proposition. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, pour tout entier $p \geq 1$, les ensembles de Fatou et de Julia de R sont les mêmes que les ensembles de Fatou et de Julia de R^p.*

Preuve : L'ensemble de Faton de R^p contient évidemment celui de R. Pour prouver l'inclusion inverse, on remarque que la réunion d'un nombre fini de parties compactes de $\overline{\mathbb{C}}$ est compacte, donc que la réunion d'un nombre fini de familles normales est une famille normale. □

5.9. Proposition. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, l'ensemble de Julia J de R contient tous les points périodiques répulsifs et tous les points périodiques indifférents rationnels du système dynamique engendré par la fraction rationnelle R. Par contre, tous les points périodiques fortement attractifs appartiennent à l'ensemble de Fatou F de R, et leurs bassins attractifs sont contenus dans F.*

5.10. Proposition. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, tout point de l'ensemble de Julia J de R est limite d'une suite de points périodiques.*

Nous arrivons enfin aux théorèmes essentiels suivants, utilisés pour la construction effective de l'ensemble de Julia.

5.11. Théorème. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, l'ensemble de Julia J de R est l'adhérence de la réunion de toutes les orbites périodiques répulsives du système dynamique $\{ R^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$.*

5.12. Théorème. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, pour tout point z de l'ensemble de Julia J de R, l'orbite négative de z est dense dans J. Autrement dit, l'ensemble de Julia J est égal à l'adhérence de l'orbite négative d'un quelconque de ses points.*

5.13. Théorème. — *Toujours dans les hypothèses et avec les notations de 5.1, soit $\gamma = \{ z_0 \, , \ z_1 = R(z_0) \, , \ \ldots \, , \ z_{p-1} = R^{p-1}(z_0) \}$ une orbite périodique fortement attractive, de période primitive $p \geq 1$, du système dynamique $\{ R^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$. Le bassin attractif de γ est contenu dans l'ensemble de Fatou de R, et la frontière de ce bassin attractif est égale à l'ensemble de Julia J de R.*

6. L'ensemble de Mandelbrot

Nous nous bornerons à quelques indications sans démonstration.
Considérons l'application P_c de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

$$P_c(z) = z^2 + c\,,$$

où $c \in \mathbb{C}$ est une constante. Prolongeons cette application en une application holomorphe de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ dans elle-même, en posant

$$P_c(\infty) = \infty\,,$$

et considérons le système dynamique discret $\{\, P_c^n \;;\;\; n \in \mathbb{N}\}$, engendré par l'application P_c. Nous noterons J_c l'ensemble de Julia de P_c, afin de mettre en évidence le fait qu'il dépend de la constante c.
Il est facile de vérifier que le point ∞ est un point d'équilibre attractif du système. L'ensemble de Julia J_c est donc la frontière du bassin attractif $A(\infty)$ de ce point.
Julia et Fatou on prouvé que J_c est soit un ensemble connexe, soit un ensemble de Cantor.
Par définition, l'ensemble de Mandelbrot M est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels J_c est connexe :

$$M = \{\, c \in \mathbb{C} \;;\;\; J_c \text{ connexe} \,\}\,.$$

Comme d'autre part Fatou et Julia ont prouvé que J_c est connexe si et seulement si l'origine 0 n'est pas dans le bassin attractif $A(\infty)$ du point à l'infini, on peut aussi caractériser l'ensemble de Mandelbrot comme suit :

$$M = \{\, c \in \mathbb{C} \;;\;\; P_c^n(0) \text{ ne tend pas vers } \infty \text{ lorsque } n \to +\infty \,\}\,.$$

C'est cette caractérisation qu'on utilise en général pour la détermination explicite de l'ensemble de Mandelbrot.
Douady et Hubbard ont prouvé que l'ensemble de Mandelbrot M est connexe.